

# Zur Linearisierung zufälliger dynamischer Systeme

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Augsburg

vorgelegt von  
Thomas Wanner  
aus Augsburg

Augsburg  
September 1993

Thomas Wanner  
Institut für Mathematik  
Universität Augsburg  
Universitätsstraße 14  
86135 Augsburg

1. Berichterstatter:  
2. Berichterstatter:  
Tag der mündlichen Prüfung:

Prof. Dr. Bernd Aulbach  
Prof. Dr. Ludwig Arnold (Universität Bremen)  
29. November 1993

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>1 Zufällige Differenzgleichungen</b>	<b>8</b>
1.1 Grundlegende Begriffe und Definitionen . . . . .	8
1.2 Quasibeschränkte Lösungen . . . . .	12
1.3 Zufällige invariante Faserbündel . . . . .	22
1.4 Hierarchien und zentrale Faserbündel . . . . .	31
1.5 Asymptotische Phasen . . . . .	41
1.6 Topologische Entkopplung . . . . .	48
1.7 Topologische Linearisierung . . . . .	57
<b>2 Zufällige Differentialgleichungen</b>	<b>65</b>
2.1 Grundlegende Begriffe und Definitionen . . . . .	65
2.2 Quasibeschränkte Lösungen . . . . .	68
2.3 Zufällige invariante Mannigfaltigkeiten . . . . .	77
2.4 Hierarchien und zentrale Mannigfaltigkeiten . . . . .	85
2.5 Asymptotische Phasen . . . . .	91
2.6 Topologische Entkopplung . . . . .	95
2.7 Topologische Linearisierung . . . . .	98
<b>3 Zufällige dynamische Systeme</b>	<b>106</b>
3.1 Definitionen und lineare Theorie . . . . .	106
3.2 Diskrete zufällige dynamische Systeme . . . . .	116
3.3 Kontinuierliche zufällige dynamische Systeme . . . . .	133
3.4 Lokale Ergebnisse . . . . .	144
3.5 Parameterabhängige zufällige dynamische Systeme . . . . .	159
<b>A Hilfsmittel</b>	<b>161</b>
A.1 Fixpunktsätze und Meßbarkeit . . . . .	161
A.2 Ein Existenzsatz für zufällige Differentialgleichungen . . . . .	164
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>168</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>169</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>170</b>

# Einleitung

Gegen Ende des letzten Jahrhunderts schlug der französische Mathematiker Henri Poincaré einen neuen Weg bei der Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen ein. Während sich nämlich die Mathematiker vor ihm — angefangen mit Isaac Newton, dem “Erfinder” der Differentialgleichung — hauptsächlich mit *quantitativen* Fragestellungen beschäftigt hatten, d.h. mit expliziten Lösungsmethoden und mit der konkreten Form der Lösungen, richtete Poincaré sein Augenmerk auf *qualitative* Eigenschaften der Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung, d.h. etwa auf ihr asymptotisches Verhalten. Damit legte er den Grundstein für die sogenannte *qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen*, die ohne Zweifel ein wichtiger Bestandteil der Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts ist und gegenwärtig aus einer relativ umfangreichen Ansammlung von Methoden und Techniken besteht, die (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) mittels der Schlagworte Poincaré-Bendixon-Theorie, Lyapunov-Stabilität, Invarianz, Grenzmengen, Attraktoren, Lyapunov-Funktionen und Linearisierung charakterisiert werden kann.

Wie der Titel der vorliegenden Arbeit bereits andeutet, wird im folgenden die letztgenannte Methode der *Linearisierung* Gegenstand der Untersuchungen sein. Für den Fall nichtautonomer Differentialgleichungen wird diese Methode von SELL [37] folgendermaßen beschrieben:

“Study the behavior of solutions of the linear equation  $y' = A(t)y$  near  $y = 0$ , and then show (if possible) that the solutions of the nonlinear equation

$$y' = A(t)y + F(y, t)$$

near  $y = 0$  inherit the same behavior.”<sup>1</sup>

Für autonome Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = Ax + F(x), \tag{0.1}$$

mit einer  $d \times d$ -Matrix  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  und einer  $C^1$ -Abbildung  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $F(0) = 0$  und  $DF(0) = 0$ , wurde dieses Programm in den letzten Jahrzehnten erfolgreich umgesetzt. Unter anderem wurden dabei die folgenden beiden Ergebnisse bewiesen.

- Bezeichnet man die direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume der Matrix  $A$  zu Eigenwerten mit negativem, verschwindendem oder positivem Realteil jeweils mit  $E_-$ ,  $E_0$  oder  $E_+$ , so ist hinlänglich bekannt, daß diese Unterräume des  $\mathbb{R}^d$  invariant bezüglich der autonomen linearen Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax \tag{0.2}$$

---

<sup>1</sup>Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß die nichtlineare Differentialgleichung  $y' = A(t)y + F(y, t)$  die triviale Lösung besitzt, daß also die Identität  $F(0, t) = 0$  für beliebige  $t$  erfüllt ist.

sind, d.h. eine Lösung von (0.2), die in einem dieser Räume startet, verbleibt für alle Zeit in dem entsprechenden Unterraum — und gleiches gilt natürlich auch für die beiden direkten Summen  $E_- \oplus E_0$  und  $E_0 \oplus E_+$ . Des weiteren konvergieren alle in  $E_-$  (beziehungsweise in  $E_+$ ) enthaltenen Lösungen für  $t \rightarrow \infty$  (beziehungsweise für  $t \rightarrow -\infty$ ) exponentiell gegen 0, und die dabei auftretenden “exponentiellen Konvergenzraten” werden von den Realteilen der in der linken (beziehungsweise in der rechten) offenen Halbebene von  $\mathbb{C}$  liegenden Eigenwerte von  $A$  bestimmt.

Man verifiziert leicht, daß diese linearen Unterräume des  $\mathbb{R}^d$  im allgemeinen nicht mehr invariante Mengen für die nichtlineare Ausgangsgleichung (0.1) sind. Es läßt sich jedoch zeigen, daß in der Nähe der Ruhelage 0 fünf (lokale) *invariante Mannigfaltigkeiten* für (0.1) entstehen, die im Ursprung tangential zu  $E_-$ ,  $E_- \oplus E_0$ ,  $E_0$ ,  $E_0 \oplus E_+$  beziehungsweise  $E_+$  verlaufen und *stabile*, *zentral-stabile*, *zentrale*, *zentral-instabile* beziehungsweise *instabile Mannigfaltigkeit* genannt werden, d.h. man erhält nichtlineare Analoga zu den invarianten Unterräumen von (0.2). Darüber hinaus konvergieren alle Lösungen von (0.1), die auf der stabilen Mannigfaltigkeit starten, für  $t \rightarrow \infty$  exponentiell gegen die Ruhelage 0, wobei die oben erwähnten exponentiellen Konvergenzraten erhalten bleiben. Analoges gilt auch für Lösungen, die auf der instabilen Mannigfaltigkeit starten<sup>2</sup>.

- Ein Linearisierungsergebnis im wortwörtlichen Sinn wurde um 1960 von HARTMAN [20, 21] und GROBMAN [17, 18] bewiesen und ist heute als *klassischer Satz von Hartman-Grobman* bekannt: Ist die obige Matrix  $A$  hyperbolisch, d.h. liegt keiner ihrer Eigenwerte auf der imaginären Achse, so existiert eine Nullumgebung  $U \subset \mathbb{R}^d$  und ein Homöomorphismus  $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^d$  mit  $h(0) = 0$ , der Lösungen von (0.1) auf Lösungen von (0.2) abbildet, solange sie nur in  $U$  verlaufen — und umgekehrt. Geometrisch bedeutet dies, daß das Phasenportrait der nichtlinearen Gleichung (0.1) in der Nähe der Ruhelage 0 gerade das homöomorphe Bild des Phasenportraits von (0.2) in der Nähe des Ursprungs ist.

Leider besitzt die Methode der Linearisierung auch ihre Grenzen. So ist etwa die Hyperbolizitätsvoraussetzung im klassischen Satz von Hartman-Grobman tatsächlich erforderlich, wie man sich an Hand der vier skalaren Differentialgleichungen

$$\dot{x} = x^2 \quad , \quad \dot{x} = -x^2 \quad , \quad \dot{x} = x^3 \quad , \quad \dot{x} = -x^3$$

leicht überlegt. Anfang der siebziger Jahre zeigten PALMER [34] und SHOSHITAISHVILI [38, 39], daß im nicht-hyperbolischen Fall die oben angegebene Formulierung des klassischen Satzes von Hartman-Grobman richtig bleibt, sofern man nur das lineare System (0.2) durch eine neue nichtlineare Differentialgleichung ersetzt, die wenigstens noch “größtenteils” linear ist — nur ein nichtlinearer Anteil, der der zentralen Mannigfaltigkeit (oder auch *Zentrumsmannigfaltigkeit*) von (0.1) entspricht, bleibt stehen. Dieses Ergebnis, das *verallgemeinerter Satz von Hartman-Grobman* genannt wird, paßt zwar nicht genau in den Rahmen der von Sell angegebenen Definition der Linearisierungsmethode, soll jedoch im folgenden trotzdem dazu gezählt werden, da ja mittels eines teilweise linearisierten Systems Aussagen über die ursprüngliche Gleichung

<sup>2</sup>Die Beweise dieser Aussagen findet man in der Monographie HIRSCH, PUGH, SHUB [26], sowie in fast jedem Buch über gewöhnliche Differentialgleichungen, das sich mit der qualitativen Theorie beschäftigt, zum Beispiel in AMANN [1, pp. 264ff] oder HARTMAN [22, Chapter IX]. Die obigen Bezeichnungen der *fünf klassischen invarianten Mannigfaltigkeiten* gehen auf KELLEY [28] zurück.

hergeleitet werden können<sup>3</sup>. Ähnliches gilt auch für das Mitte der sechziger Jahre bewiesene *Reduktionsprinzip* von KELLEY [29] und PLISS [35], das Aussagen zur Stabilität der Ruhelage 0 von (0.1) unter Verwendung einer einfacheren Differentialgleichung macht.

Parallel zu dieser Linearisierungstheorie für autonome Differentialgleichungen entstand eine analoge Theorie für *autonome Differenzgleichungen* — und beide zusammen bilden einen Teil der Theorie der *dynamischen Systeme*, die sich bekanntlich in zwei Klassen aufteilen lassen: Autonome Differentialgleichungen erzeugen *kontinuierliche dynamische Systeme*, während die *diskreten dynamischen Systeme* auf autonome Differenzgleichungen zurückgehen. Da mittels dynamischer Systeme unter anderem Bewegungsvorgänge jeglicher Art modelliert werden können, ist es nicht weiter verwunderlich, daß sie zahlreiche Anwendungen in außermathematischen Gebieten gefunden haben, und auch innerhalb der Mathematik sind dynamische Systeme noch immer ein wichtiger Forschungsgegenstand.

In neuerer Zeit zeigt sich jedoch immer mehr, daß die Modellierung gewisser “realer Vorgänge” durch dynamische Systeme nicht unbedingt befriedigende Ergebnisse liefern muß. Dies hat seinen tieferen Grund in der Tatsache, daß reale Systeme häufig sehr stark durch Störeinflüsse aus der Umgebung beeinflusst werden — und der Versuch der Einarbeitung all dieser Störeinflüsse in das modellierende dynamische System ist bei einem endlich-dimensionalen Zustandsraum fast zwangsläufig zum Scheitern verurteilt. Erschwerend kommt noch hinzu, daß genaues Datenmaterial über diese Störeinflüsse im allgemeinen nicht zur Verfügung steht, vielleicht abgesehen von Häufigkeiten, mit denen gewisse Gruppen von Störeinflüssen auftreten.

Diese letzte Bemerkung deutet bereits an, daß die *Wahrscheinlichkeitstheorie* ein geeigneter Rahmen für die Modellierung der Störeinflüsse sein könnte. Und in der Tat ist es mittels einer Verbindung der Theorie der dynamischen Systeme und der Wahrscheinlichkeitstheorie möglich, bei der mathematischen Modellierung eines realen Systems komplexe Störeinflüsse zu integrieren. Das dabei entstehende mathematische Objekt wird *zufälliges dynamisches System* genannt. Derartige Systeme wurden zuerst an der Universität Bremen untersucht, und dabei konnten in den vergangenen Jahren so große Fortschritte erzielt werden, daß man mittlerweile bereits von einer Theorie zufälliger dynamischer Systeme sprechen kann<sup>4</sup>.

Es wird das Hauptziel der vorliegenden Arbeit sein, Teile der eingangs erläuterten Linearisierungstheorie auf zufällige dynamische Systeme zu übertragen. Dabei werden dann sowohl bekannte Ergebnisse (wie zum Beispiel die Existenz zufälliger invarianter Mannigfaltigkeiten, die bereits in den Arbeiten von CARVERHILL [14], BOXLER [12] und DAHLKE [15] behandelt wurde) mittels neuer Beweise teilweise reproduziert, als auch neue Ergebnisse hergeleitet (etwa die zufälligen Versionen der Sätze von Hartman-Grobman). Aus beweistechnischen Gründen müssen dazu jedoch zunächst *zufällige nichtautonome Differenzen- und Differentialgleichungen* genauer untersucht werden — in Fortführung und Erweiterung der Arbeit [41]. Im einzelnen ist diese Dissertation folgendermaßen aufgebaut.

Das erste Kapitel ist der Untersuchung zufälliger nichtautonomer Differenzgleichungen gewidmet. Nach einer kurzen Wiederholung und Zusammenstellung benötigter Begriffe und Ergebnisse im ersten Abschnitt, wird in den nächsten beiden Abschnitten ein Existenzsatz für zufällige invariante Faserbündel bei zufälligen nichtautonomen Differenzgleichungen bewiesen.

<sup>3</sup>Neuere Beweise des verallgemeinerten Satzes von Hartman-Grobman für den autonomen Fall findet man in KIRCHGRABER, PALMER [30], und für den Fall nichtautonomer Differential- und Differenzgleichungen in den Arbeiten HILGER [24, 25], sowie in [41].

<sup>4</sup>Für einen Überblick sei auf die Arbeit ARNOLD, CRAUEL [4] verwiesen. Große Teile der Theorie werden in dem Buch ARNOLD [2] enthalten sein.

Zu diesem Zweck wird im zweiten Abschnitt — in Anlehnung an die Arbeit [41] — zunächst der Begriff der quasibeschränkten Lösung eingeführt, der für das gesamte erste Kapitel von fundamentaler Bedeutung ist. Des weiteren werden noch vier Lemmata bewiesen, die Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit derartiger Lösungen machen. Damit kann dann im dritten Abschnitt die Existenz zweier zufälliger invarianter Faserbündel gezeigt werden, die im Grunde genommen zufällige nichtautonome Analoga der eingangs erwähnten invarianten Mannigfaltigkeiten sind.

Mit diesem Existenzsatz ist bereits ein großer, wenn nicht gar der größte Schritt in Richtung Linearisierungstheorie zufälliger nichtautonomer Differenzgleichungen vollzogen, denn die Ergebnisse der weiteren Abschnitte des ersten Kapitels sind mehr oder weniger geometrisch leicht vorstellbare Folgerungen aus diesem Satz. So wird im vierten Abschnitt durch mehrfache Anwendung des Satzes die Existenz zweier Hierarchien<sup>5</sup> zufälliger invarianter Faserbündel bewiesen, wie auch zahlreicher weiterer zufälliger invarianter Faserbündel. Damit stehen dann unter anderem auch die zufälligen nichtautonomen Analoga der zu Beginn dieser Einleitung beschriebenen fünf klassischen invarianten Mannigfaltigkeiten zur Verfügung.

Im fünften Abschnitt wird das asymptotische Verhalten beliebiger Lösungen untersucht, indem jeder Lösung der betrachteten nichtlinearen Differenzgleichung auf kanonische Art und Weise Lösungen auf den Hierarchiefaserbündeln zugeordnet werden, die sogenannten asymptotischen Phasen. Richtig interpretiert liefert das unmittelbar eine zufällige nichtautonome Version des Reduktionsprinzips.

Zum Abschluß des ersten Kapitels werden dann im siebten Abschnitt die beiden Sätze von Hartman-Grobman für zufällige nichtautonome Differenzgleichungen bewiesen, nachdem im sechsten Abschnitt ein darauf hinführendes Ergebnis zur Entkopplung zufälliger nichtautonomer Differenzgleichungen angegeben wird.

Das sich anschließende zweite Kapitel ist völlig analog zum ersten Kapitel aufgebaut, nur werden jetzt zufällige nichtautonome Differentialgleichungen behandelt. Da sich hierbei die Beweistechniken des ersten Kapitels — insbesondere ab dem vierten Abschnitt — ohne allzu große Änderungen übernehmen lassen, werden einige Beweise im zweiten Kapitel entweder nur grob skizziert, oder gar nicht eigens angegeben. Beiden Kapiteln ist gemeinsam, daß unter relativ starken Voraussetzungen an den nichtlinearen Anteil der betrachteten Gleichungen globale Ergebnisse hergeleitet werden. Ferner wird stets mit Normen gearbeitet, die von der Zeit und vom Zufall abhängen. Dies liegt daran, daß beide Kapitel — wenn sie auch für sich genommen durchaus interessante Ergebnisse enthalten — maßgeschneidert sind für die Anwendung auf zufällige dynamische Systeme.

Diese Anwendung ist dem dritten Kapitel der Arbeit vorbehalten. Es beginnt mit einer kurzen Einführung in die Theorie der zufälligen dynamischen Systeme, in der neben den grundlegenden Definitionen die Diskussion linearer zufälliger dynamischer Systeme naturgemäß an vorderster Stelle steht — denn ohne fundiertes Wissen über lineare Systeme wäre eine Linearisierungstheorie natürlich undenkbar. Von fundamentaler Bedeutung ist hierbei der *multiplikative Ergodensatz* von OSELEDETS [32], der vor genau 25 Jahren bewiesen wurde und das asymptotische Verhalten linearer zufälliger dynamischer Systeme mit Hilfe der sogenannten *Lyapunov-Exponenten* beschreibt. Er ermöglicht die Konstruktion *zufälliger Normen*, die bei der Anwendung der Ergebnisse der ersten beiden Kapitel benötigt werden. Abgerundet wird der erste Abschnitt des dritten Kapitels durch einige Bemerkungen zum Begriff der Quasibeschränktheit von Abbildungen und einem Resultat, das die Blockdiagonalisierung linearer zufälliger dynamischer Systeme

---

<sup>5</sup>Im deterministischen autonomen Spezialfall geht die Existenz dieser Hierarchien auf AULBACH [10] zurück.

gestattet.

Nach diesen Vorbereitungen kann nun mit der Entwicklung einer Linearisierungstheorie für zufällige dynamische Systeme begonnen werden — und der zweite Abschnitt des dritten Kapitels ist den diskreten zufälligen dynamischen Systemen gewidmet. Zu diesem Zweck wird in einem leichten Lemma zunächst die Klasse der zufälligen nichtautonomen Differenzgleichungen beschrieben, die durch ihre allgemeine Lösung tatsächlich ein diskretes zufälliges dynamisches System erzeugen<sup>6</sup>. Danach können dann endlich, nach einer Auflistung der für den gesamten Abschnitt geltenden Voraussetzungen an das betrachtete diskrete zufällige dynamische System, die Ergebnisse des ersten Kapitels übertragen werden — und man erhält somit zufällige Versionen aller zu Beginn dieser Einleitung erwähnten Ergebnisse der Linearisierungstheorie. Hierbei fallen sogar für den deterministischen Spezialfall Resultate ab, die in der Literatur anscheinend in dieser Form noch nicht behandelt wurden:

- Einerseits kann gezeigt werden, daß sich innerhalb der stabilen (beziehungsweise der instabilen) Mannigfaltigkeit, die ja im allgemeinen noch weitere invariante Untermannigfaltigkeiten enthält, die “meisten” Lösungen für  $t \rightarrow \infty$  (beziehungsweise für  $t \rightarrow -\infty$ ) ganz speziellen Untermannigfaltigkeiten “tangential” annähern,
- zum anderen zeigt sich, daß der Homöomorphismus in den Sätzen von Hartman-Grobman so gewählt werden kann, daß die invarianten Mannigfaltigkeiten bijektiv auf ihre entsprechenden linearen Analoga abgebildet werden.

Völlig analog zur Vorgehensweise des zweiten Abschnittes könnte man jetzt die Ergebnisse des zweiten Kapitels auf kontinuierliche zufällige dynamische Systeme anwenden. Teils aus Platzgründen, teils aus Gründen, die zu Beginn des dritten Abschnittes angegeben werden, wird dies jedoch nicht weiter ausgeführt. Statt dessen wird der kontinuierliche Fall direkt auf den bereits behandelten diskreten Fall zurückgeführt — und so erhält man die gewünschten Linearisierungsergebnisse auch für kontinuierliche zufällige dynamische Systeme.

Während im zweiten und dritten Abschnitt nur globale Ergebnisse bewiesen wurden, wird im darauf folgenden vierten Abschnitt demonstriert, wie sich daraus lokale Ergebnisse ableiten lassen. Dies wird zunächst für eine große Klasse diskreter zufälliger dynamischer Systeme ausgeführt, bevor im Anschluß daran kontinuierliche zufällige dynamische Systeme behandelt werden, die von zufälligen Differentialgleichungen herrühren. Um dabei wirklich aussagekräftige Resultate zu erhalten, muß eine sehr feine, aber relativ aufwendige Abschneidetechnik verwendet werden.

Der letzte Abschnitt des dritten Kapitels enthält schließlich eine Version des verallgemeinerten Satzes von Hartman-Grobman für parameterabhängige zufällige dynamische Systeme, wie er für Anwendungen in der Bifurkationstheorie benötigt wird.

Den Abschluß der Arbeit bildet ein kurzer Anhang, in dem einerseits einige, in den ersten beiden Kapiteln benötigte Hilfsergebnisse bewiesen werden, und andererseits — aus Gründen der Vollständigkeit — ein globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz für zufällige nichtautonome Differentialgleichungen angegeben wird.

---

<sup>6</sup>An dieser Stelle drängt sich vermutlich die Frage auf, warum man im ersten Kapitel allgemeine zufällige nichtautonome Differenzgleichungen behandelt, und sich nicht von vornherein auf die kleinere Klasse der Gleichungen zurückzieht, die wirklich zufällige dynamische Systeme erzeugen. Die Antwort auf diese Frage ist einfach: Es ist prinzipiell unmöglich, die Beweise des ersten Kapitels innerhalb dieser kleineren Klasse zu führen, denn im allgemeinen wird die Gleichung (1.44) in Lemma 1.5.1 nicht mehr in dieser Klasse liegen!

Einige generelle Bemerkungen sollen diesen Überblick beenden. In der vorliegenden Arbeit werden nur Aussagen bezüglich Stetigkeit oder Lipschitz-Stetigkeit gemacht, d.h. es fehlen etwa Resultate zur Differenzierbarkeit der konstruierten zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten<sup>7</sup>. Der Grund dafür ist in der Tatsache zu finden, daß das Hauptziel dieser Dissertation der Beweis der Sätze von Hartman-Grobman für zufällige dynamische Systeme war — und der in diesen Sätzen auftretende Homöomorphismus ist bekanntlich im allgemeinen nicht differenzierbar, selbst bei differenzierbaren Ausgangssystemen. All die anderen Linearisierungsergebnisse wurden in die Arbeit aufgenommen, da sie auf dem Weg dorthin in natürlicher Weise als “Nebenprodukte” abfallen.

Beim Verfassen der Arbeit wurde besonderer Wert darauf gelegt, sie in sich möglichst geschlossen zu halten. Deshalb werden alle benötigten Definitionen und Resultate entweder explizit angegeben oder zitiert. Ferner werden auch Zwischenschritte (wie zum Beispiel Meßbarkeitsbeweise) relativ ausführlich angegeben — häufig jedoch in Fußnoten, um den Lesefluß nicht unnötig zu unterbrechen.

Zu guter Letzt möchte ich noch denen danken, die am Entstehen dieser Arbeit in der einen oder anderen Form beteiligt waren: Herrn Prof. Dr. Ludwig Arnold, der auf einem DMV-Seminar den Anstoß zu der Arbeit gab und entscheidende Hinweise und Bemerkungen beisteuerte, Herrn Prof. Dr. Bernd Aulbach, der die Betreuung an der Universität Augsburg übernahm und mir stets mit Anregungen zur Seite stand, Herrn Prof. Dr. Fritz Colonius, der reges Interesse am Fortgang der Arbeit zeigte, sowie den Herren Götz Grammel, Marco Holzmann und Dr. Stanislaus Maier, die Teile des Manuskripts lasen und wertvolle Hinweise gaben. Des weiteren danke ich der Universität Augsburg und der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die durch ein Doktorandenstipendium im Rahmen des Graduiertenkollegs “Mathematik — Analyse, Optimierung und Steuerung komplexer Systeme” die finanzielle Grundlage für diese Arbeit geschaffen haben.

---

<sup>7</sup>Dazu vergleiche man die bereits erwähnten Arbeiten von BOXLER [12] und DAHLKE [15].

# Kapitel 1

## Zufällige Differenzengleichungen

### 1.1 Grundlegende Begriffe und Definitionen

Wie bereits erwähnt wurde, wird in diesem ersten Kapitel eine Linearisierungstheorie für nicht-autonome zufällige Differenzengleichungen entwickelt. Deshalb sollen zunächst einige grundlegende Tatsachen über derartige Gleichungen wiederholt, sowie die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Notation angegeben werden.

Eine Teilmenge  $I \subset \mathbb{Z}$  heißt *diskretes Intervall* beziehungsweise  *$\mathbb{Z}$ -Intervall*, falls sie der Durchschnitt eines gewöhnlichen reellen Intervalls mit der Menge  $\mathbb{Z}$  ist.  $I$  heißt *nach rechts unbeschränkt*, falls entweder  $I = \mathbb{Z}$  oder  $I = \{k \in \mathbb{Z} : k \geq \kappa_0\}$  für ein  $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$  gilt. Ähnlich lassen sich *nach links unbeschränkte Intervalle* definieren. Da im folgenden ein eventuell existierendes Maximum von  $I$  leichte Unsymmetrien hervorruft, definiert man noch ein  $I$  zugeordnetes diskretes Intervall, und zwar

$$I^* := \begin{cases} I \setminus \{\max I\} & , \text{ falls das Maximum von } I \text{ existiert} \\ I & , \text{ falls } I \text{ nach rechts unbeschränkt ist} \end{cases}$$

Für nach rechts unbeschränkte Intervalle ist die Einführung von  $I^*$  also ohne Bedeutung — und die Ergebnisse der nächsten Abschnitte behandeln sowieso meistens den Fall  $I = \mathbb{Z}$  (abgesehen von einigen Beweisen).

Seien nun  $I \subset \mathbb{Z}$  ein beliebiges diskretes Intervall mit  $I^* \neq \emptyset$ ,  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein Meßraum (im Sinne von BAUER [11, p. 39]) und  $P$  ein beliebiger Parameterraum; ferner sei  $f : I^* \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine beliebige Abbildung. Dann heißt eine Gleichung der Form

$$\boxed{x_{k+1} = f(k, \omega, x_k, p)} \quad (1.1)$$

(*nichtautonome*) *parameterabhängige Differenzengleichung (mit Parametern  $\omega$  und  $p$ )*. Für festes  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  heißt eine Abbildung  $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die auf einem nichtleeren diskreten Intervall  $J \subset I$  definiert ist,  $\omega, p$ -Lösung von (1.1), sofern für alle  $k \in J^*$  die Identität

$$\lambda(k+1) = f(k, \omega, \lambda(k), p)$$

gilt<sup>1</sup>. Eine Beziehung der Form

$$x_{\kappa_0} = \xi_0 \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup>Man beachte, daß im Fall  $J^* = \emptyset$ , d.h. falls  $J$  einpunktig ist, jede Abbildung  $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine  $\omega, p$ -Lösung von (1.1) ist.

mit festem  $\kappa_0 \in I$  und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$  heißt wie üblich *Anfangsbedingung zu (1.1)* — und eine Lösung  $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  löst das *Anfangswertproblem (1.1), (1.2)*, falls  $\kappa_0 \in J$  und  $\lambda(\kappa_0) = \xi_0$  erfüllt sind.

Offensichtlich existiert bei gegebenem  $\kappa_0 \in I$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  die  $\omega, p$ -Lösung des Anfangswertproblems (1.1), (1.2) auf dem diskreten Intervall  $\{k \in I : k \geq \kappa_0\}$  und ist dort eindeutig bestimmt. Diese Lösung läßt sich rekursiv wie folgt angeben:

$$\lambda(k; \kappa_0, \omega, \xi_0, p) := \begin{cases} \xi_0 & \text{für } k = \kappa_0 \\ f(k-1, \omega, \lambda(k-1; \kappa_0, \omega, \xi_0, p), p) & \text{für } k > \kappa_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Ist darüber hinaus die Abbildung  $f(k, \omega, \cdot, p)$  für beliebige  $k \in I^*$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  bijektiv, so existiert zu jedem beliebigen Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte  $\omega, p$ -Lösung auf ganz  $I$ , und zwar:

$$\lambda(k; \kappa_0, \omega, \xi_0, p) := \begin{cases} \xi_0 & \text{für } k = \kappa_0 \\ f(k-1, \omega, \lambda(k-1; \kappa_0, \omega, \xi_0, p), p) & \text{für } k > \kappa_0 \\ f^{-1}(k, \omega, \lambda(k+1; \kappa_0, \omega, \xi_0, p), p) & \text{für } k < \kappa_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Dabei wurde die inverse Abbildung von  $f(k, \omega, \cdot, p)$  mit  $f^{-1}(k, \omega, \cdot, p)$  bezeichnet. In beiden Fällen nennt man die Abbildung  $\lambda$  die *allgemeine Lösung der Differenzgleichung (1.1) (im Sinne von (1.3) oder (1.4))*. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß die allgemeine Lösung der Identität

$$\lambda(k_2; \kappa, \omega, \xi, p) = \lambda(k_2; k_1, \omega, \lambda(k_1; \kappa, \omega, \xi, p), p) \quad (1.5)$$

genügt, für alle  $\kappa, k_1, k_2 \in I$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  und  $p \in P$ , wobei im nichtinvertierbaren Fall noch  $\kappa \leq k_1 \leq k_2$  vorausgesetzt werden muß.

Bis jetzt wurden noch keine Voraussetzungen bezüglich Meßbarkeit oder Stetigkeit der Abbildung  $f$  angegeben. Sei dazu im folgenden  $P$  ein metrischer Raum und  $\mathcal{B}$  die  $\sigma$ -Algebra seiner Borelschen Mengen. Ist dann die Abbildung  $f$  meßbar, so heißt die Gleichung (1.1) *zufällige Differenzgleichung (mit Parameter  $p \in P$ )*. Es kann leicht gezeigt werden, daß die allgemeine Lösung  $\lambda$  im Sinne von (1.3) genau dann meßbar ist, wenn dies auf die Abbildung  $f$  zutrifft. Ist ferner  $f(k, \omega, \cdot, p)$  sogar bijektiv für alle  $k \in I^*$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$ , so ist die allgemeine Lösung im Sinne von (1.4) genau dann meßbar, wenn sowohl  $f$  als auch die oben definierte Abbildung  $f^{-1} : I^* \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  meßbar sind. In beiden Fällen heißt der stochastische Prozeß  $(\lambda(k; \kappa_0, \cdot, \xi_0, p))_{k \in J}$ , mit  $J = \{\kappa \in I : \kappa \geq \kappa_0\}$  oder  $J = I$ , die *p-Lösung des Anfangswertproblems*  $x_{k+1} = f(k, \omega, x_k, p)$ ,  $x_{\kappa_0} = \xi_0$ .

Was die Stetigkeit der allgemeinen Lösung bezüglich der letzten beiden Variablen angeht, erhält man leicht die folgenden Aussagen: Die allgemeine Lösung im Sinne von (1.3) ist genau dann stetig in den letzten beiden Variablen, wenn die Abbildung  $f(k, \omega, \cdot, \cdot)$  für beliebige  $k \in I^*$  und  $\omega \in \Omega$  stetig ist. Ist darüber hinaus  $f(k, \omega, \cdot, p)$  für alle  $k \in I^*$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  bijektiv, so ist die allgemeine Lösung im Sinne von (1.4) genau dann stetig in den letzten beiden Variablen, wenn dies für  $f$  und  $f^{-1}$  gilt.

Nach diesen grundlegenden Bemerkungen soll nun auf der Klasse der zufälligen Differenzgleichungen ein Äquivalenzbegriff eingeführt werden, der in späteren Abschnitten — um genau zu sein, in Abschnitt 1.6 beziehungsweise Abschnitt 1.7 — noch zu eingehenden Untersuchungen Anlaß geben wird. Dieser Begriff ist eine nichtautonome Version der sogenannten "topologischen Äquivalenz", wie sie etwa in dem Buch von IRWIN [27, p. 32] definiert wird. (Man vergleiche dazu auch Abbildung 1.1.)

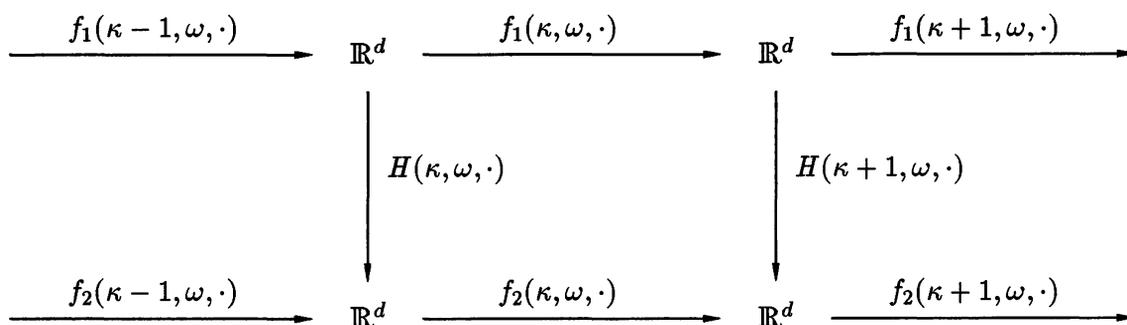


Abbildung 1.1: Zur Definition der topologischen Äquivalenz

**Definition 1.1.1** Gegeben seien zwei zufällige Differenzengleichungen

$$\boxed{x_{k+1} = f_1(k, \omega, x_k)} \quad (1.6)$$

und

$$\boxed{x_{k+1} = f_2(k, \omega, x_k)} \quad (1.7)$$

mit einem diskreten Intervall  $I \subset \mathbb{Z}$  (mit  $I^* \neq \emptyset$ ) und meßbaren Abbildungen  $f_1, f_2 : I^* \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Dann heißen die Gleichungen (1.6) und (1.7) topologisch äquivalent vermöge  $H$ , wenn es eine Abbildung  $H : I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (a) Für beliebige  $\kappa \in I$  und  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $H(\kappa, \omega, \cdot)$  ein Homöomorphismus auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Umkehrabbildung  $H^{-1}(\kappa, \omega, \cdot)$ , und die Abbildungen  $H, H^{-1} : I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sind meßbar.
- (b) Für jede beliebige  $\omega$ -Lösung  $\mu$  von (1.6) ist die Abbildung  $H(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung der Gleichung (1.7).
- (c) Für jede beliebige  $\omega$ -Lösung  $\nu$  von (1.7) ist die Abbildung  $H^{-1}(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.6).

Man kann sich leicht überlegen, daß in der obigen Definition die Bedingung (c) automatisch erfüllt ist, wenn (a) und (b) gelten. Das nun folgende einfache Lemma wird sich später als sehr nützlich erweisen.

**Lemma 1.1.2** Gegeben seien zwei vermöge  $H$  topologisch äquivalente, zufällige Differenzengleichungen

$$\boxed{x_{k+1} = f_1(k, \omega, x_k)} \quad (1.8)$$

und

$$\boxed{x_{k+1} = f_2(k, \omega, x_k)} \quad (1.9)$$

mit einem diskreten Intervall  $I \subset \mathbb{Z}$  (mit  $I^* \neq \emptyset$ ) und meßbaren Abbildungen  $f_1, f_2 : I^* \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Existiert dann die allgemeine Lösung von (1.8) im Sinne von (1.4), ist sie meßbar, und auch noch stetig bezüglich der letzten Variablen, so gilt dies auch für die allgemeine Lösung von (1.9).

**Beweis:** Unter Verwendung von Definition 1.1.1(c) erhält man für beliebige  $\kappa \in I^*$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  die Identität

$$H^{-1}(\kappa + 1, \omega, f_2(\kappa, \omega, \xi)) = f_1(\kappa, \omega, H^{-1}(\kappa, \omega, \xi)),$$

oder

$$f_2(\kappa, \omega, \xi) = H(\kappa + 1, \omega, f_1(\kappa, \omega, H^{-1}(\kappa, \omega, \xi))).$$

Damit ist  $f_2$  meßbar, und die Abbildungen  $f_2(\kappa, \omega, \cdot)$  sind bijektiv und stetig, für alle  $\kappa \in I^*$  und  $\omega \in \Omega$ . Beachtet man nun noch die für beliebige  $\kappa \in I^*$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gültige Identität

$$f_2^{-1}(\kappa, \omega, \xi) = H(\kappa, \omega, f_1^{-1}(\kappa, \omega, H^{-1}(\kappa + 1, \omega, \xi))),$$

so folgt leicht die Behauptung.  $\diamond$

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der obige Begriff der topologischen Äquivalenz zufälliger Differenzgleichungen, der ja in der Tat eine Äquivalenzrelation liefert, im Hinblick auf die Klassifikation von nichtautonomen zufälligen Differenzgleichungen ziemlich nutzlos ist! Man überlegt sich nämlich leicht, daß zum Beispiel zwei Differenzgleichungen bereits dann topologisch äquivalent sind, wenn ihre allgemeinen Lösungen im Sinne von (1.4) existieren, und wenn diese Lösungen meßbar sind, sowie stetig bezüglich der letzten Variablen. Was den Begriff dennoch interessant macht ist die Tatsache, daß die Konstruktionen der Abschnitte 1.6 beziehungsweise 1.7 weitergehende Aussagen über die in Definition 1.1.1 auftauchende Abbildung  $H$  erlauben. Speziell werden sich eventuelle Periodizitätseigenschaften der Differenzgleichung bezüglich der Variablen  $k$  auf die Abbildung  $H$  übertragen, d.h. im autonomen Fall etwa ist  $H$  unabhängig von  $k$ . Damit erhält man dann Aussagen, die die autonome Situation echt verallgemeinern.

Zum Abschluß dieses einleitenden Abschnittes soll noch kurz auf lineare zufällige Differenzgleichungen eingegangen werden. Dazu sei  $I \subset \mathbb{Z}$  wieder ein diskretes Intervall mit  $I^* \neq \emptyset$ , und  $(\Omega, \mathcal{F})$  sei ein beliebiger Meßraum. Ferner seien  $A : I^* \times \Omega \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^d)$  und  $b : I^* \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  beliebige Abbildungen. Dann heißt die Differenzgleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + b(k, \omega)} \quad (1.10)$$

(inhomogene, nichtautonome) lineare Differenzgleichung, mit Parameter  $\omega$ . Die zugehörige homogene lineare Differenzgleichung ist gegeben durch

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k} \quad (1.11)$$

Wegen der vorausgesetzten Invertierbarkeit der linearen Abbildungen  $A(k, \omega)$  existiert zu jeder Anfangsbedingung eine eindeutig bestimmte  $\omega$ -Lösung von (1.10) beziehungsweise (1.11) auf ganz  $I$ , d.h. die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen existieren im Sinne von (1.4).

Um die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (1.11) übersichtlich angeben zu können, bedient man sich der sogenannten *Übergangsabbildung*  $\Phi(m, n, \omega)$ . Diese ist rekursiv definiert durch

$$\Phi(m, n, \omega) := \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{R}^d} & \text{für } m = n \\ A(m-1, \omega) \circ \dots \circ A(n, \omega) & \text{für } m > n \\ A(m, \omega)^{-1} \circ \dots \circ A(n-1, \omega)^{-1} & \text{für } m < n \end{cases}$$

für beliebige  $m, n \in I$  und  $\omega \in \Omega$ . Die allgemeine Lösung von (1.11) lautet dann natürlich

$$\lambda(k; \kappa_0, \omega, \xi_0) = \Phi(k, \kappa_0, \omega) \xi_0 .$$

Die folgenden Eigenschaften der Übergangsabbildung folgen unmittelbar aus der obigen Definition:

$$\begin{aligned} \Phi(k+1, m, \omega) &= A(k, \omega) \Phi(k, m, \omega) , \\ \Phi(k, m, \omega) &= \Phi(k, n, \omega) \Phi(n, m, \omega) , \\ \Phi(k, m, \omega)^{-1} &= \Phi(m, k, \omega) , \end{aligned}$$

wobei  $m, n, k \in I$  und  $\omega \in \Omega$  beliebig sind.

Nun läßt sich auch die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzgleichung (1.10) explizit angeben. Die *Formel der Variation der Konstanten* lautet im diskreten Fall:

$$\lambda(k; \kappa_0, \omega, \xi_0) = \begin{cases} \xi_0 & \text{für } k = \kappa_0 \\ \Phi(k, \kappa_0, \omega) \xi_0 + \sum_{i=\kappa_0}^{k-1} \Phi(k, i+1, \omega) b(i, \omega) & \text{für } k > \kappa_0 \\ \Phi(k, \kappa_0, \omega) \xi_0 - \sum_{i=k}^{\kappa_0-1} \Phi(k, i+1, \omega) b(i, \omega) & \text{für } k < \kappa_0 \end{cases} . \quad (1.12)$$

Diese Formel ist, zusammen mit einer diskreten Version des bekannten Gronwall-Lemmas, für die Entwicklung der nun folgenden Theorie unentbehrlich<sup>2</sup>.

Sind nun abschließend die Abbildungen  $A$  und  $b$  meßbar, so nennt man (1.10) beziehungsweise (1.11) eine *lineare zufällige Differenzgleichung*. In diesem Fall ist auch die Übergangsabbildung  $\Phi : I \times I \times \Omega \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^d)$  meßbar, denn wegen der Stetigkeit der Inversenbildung in  $\text{GL}(\mathbb{R}^d)$  ist die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times \Omega & \rightarrow & \text{GL}(\mathbb{R}^d) \\ (k, \omega) & \mapsto & A(k, \omega)^{-1} \end{cases}$$

natürlich meßbar.

## 1.2 Quasibeschränkte Lösungen

In diesem Abschnitt soll der Grundstein für die weitere Entwicklung der Theorie gelegt werden. Es wird sich bald zeigen, daß es von fundamentaler Bedeutung ist, eine spezielle Klasse von Lösungen zufälliger Differenzgleichungen auszuzeichnen und zu studieren. Diese Klasse der sogenannten *quasibeschränkten Lösungen* ist durch ihr asymptotisches Wachstumsverhalten charakterisiert. Für die Anwendung der Ergebnisse des vorliegenden ersten Kapitels auf zufällige dynamische Systeme (man vergleiche dazu Kapitel 3) ist es dabei unumgänglich, nicht nur mit einer einzigen festen Norm auf dem zugrunde liegenden Phasenraum  $\mathbb{R}^d$  zu arbeiten, sondern vielmehr mit einer Familie von Normen, die sowohl von der (diskreten) Zeit, als auch vom Zufall abhängen. In der nun folgenden Definition sollen diese Begriffe präzise eingeführt werden.

<sup>2</sup>Der leichte Induktionsbeweis von (1.12) — wie auch die erwähnte diskrete Version des Gronwall-Lemmas — ist in Abschnitt 2.1 der Arbeit [41] zu finden.

**Definition 1.2.1** Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein beliebiger Meßraum und  $\|\cdot\|_{k,\omega}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ , eine Familie von Normen auf dem  $\mathbb{R}^d$ , so daß die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ (k, \omega, x) & \mapsto & \|x\|_{k,\omega} \end{cases}$$

meßbar ist. Sei weiter  $I \subset \mathbb{Z}$  ein diskretes Intervall,  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine beliebige Abbildung und  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  eine positive Konstante.

- (a)  $\mu$  heißt  $\gamma^+$ -quasibeschränkt (bezüglich  $\omega \in \Omega$ ), falls  $I$  nach rechts unbeschränkt ist und die folgende Abschätzung für ein  $\kappa \in I$  gilt<sup>3</sup>:

$$\sup\{\gamma^{-k}\|\mu(k)\|_{k,\omega} : k \geq \kappa, k \in I\} < \infty.$$

In diesem Fall definiert man  $\|\mu\|_{\kappa,\omega,\gamma}^+ := \sup\{\gamma^{-k}\|\mu(k)\|_{k,\omega} : k \geq \kappa, k \in I\}$ .

- (b)  $\mu$  heißt  $\gamma^-$ -quasibeschränkt (bezüglich  $\omega \in \Omega$ ), falls  $I$  nach links unbeschränkt ist und die Abschätzung

$$\sup\{\gamma^{-k}\|\mu(k)\|_{k,\omega} : k \leq \kappa, k \in I\} < \infty$$

für ein  $\kappa \in I$  erfüllt ist. In diesem Fall wird das Supremum mit  $\|\mu\|_{\kappa,\omega,\gamma}^-$  bezeichnet.

- (c) Schließlich heißt  $\mu$   $\gamma$ -quasibeschränkt (bezüglich  $\omega \in \Omega$ ), falls  $I = \mathbb{Z}$  ist und  $\mu$  der Ungleichung

$$\sup\{\gamma^{-k}\|\mu(k)\|_{k,\omega} : k \in \mathbb{Z}\} < \infty$$

genügt. Man definiert dann  $\|\mu\|_{\omega,\gamma} := \sup\{\gamma^{-k}\|\mu(k)\|_{k,\omega} : k \in \mathbb{Z}\}$ .

Einige einfache Bemerkungen sollen diese zentrale Definition ergänzen. Zunächst ist eine Abbildung  $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^d$  offensichtlich genau dann  $\gamma$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , wenn es eine reelle Konstante  $C \geq 0$  gibt, so daß für alle  $k \in \mathbb{Z}$  die Abschätzung

$$\|\mu(k)\|_{k,\omega} \leq C\gamma^k$$

gilt — und die kleinste Zahl  $C$  mit dieser Eigenschaft ist gerade  $\|\mu\|_{\omega,\gamma}$ . Mit anderen Worten: Eine Abbildung ist genau dann  $\gamma$ -quasibeschränkt, wenn sie “asymptotisch nicht schneller wächst” als die Exponentialfunktion  $\gamma^k$ . (Ähnliche Charakterisierungen lassen sich natürlich auch für die übrigen beiden Quasibeschränktheitsbegriffe angeben.) Es sei jedoch noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß nicht eine feste Norm auf dem  $\mathbb{R}^d$  verwendet wird, sondern vielmehr eine Familie von Normen, die sowohl von der Zeit, als auch vom Zufall abhängen!

Wie bereits eingangs erwähnt wurde, müssen zunächst einige Aussagen über quasibeschränkte Lösungen zufälliger Differenzgleichungen hergeleitet werden. Den Anfang macht das folgende Lemma. Es gibt Bedingungen an, unter denen gewisse nichtlineare zufällige Differenzgleichungen eine eindeutig bestimmte  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega$ -Lösung besitzen. Darüber hinaus wird die meßbare und die stetige Abhängigkeit dieser Lösung von einem Parameter untersucht. (Im Hinblick auf spätere Anwendungen werden im folgenden Lemma zuerst deterministische Differenzgleichungen behandelt, die von zwei Parametern  $\omega$  und  $p$  abhängen. Erst danach kommen die zufälligen Differenzgleichungen zum Zuge.)

<sup>3</sup>Trivialerweise gilt die Abschätzung dann auch für jedes beliebige andere  $\kappa \in I$ .

**Lemma 1.2.2** Gegeben sei die (deterministische) Differenzengleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + f(k, \omega, x_k, p) + f_0(k, \omega, p)} \quad (1.13)$$

die von zwei Parametern  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  abhängt, wobei  $P$  ein beliebiger metrischer Raum ist. Das diskrete Intervall  $I \subset \mathbb{Z}$  sei nach links unbeschränkt,  $A^- : I^* \times \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^{d^-})$ ,  $f : I^* \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  und  $f_0 : I^* \times \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  seien beliebige Abbildungen. Weiter sei  $\Phi^-(m, n, \omega)$  die Übergangsabbildung der homogenen linearen Differenzengleichung  $x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k$ .

Angenommen, für (feste) Parameterwerte  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  sind die folgenden drei Bedingungen für beliebige  $m, n \in I$ ,  $k \in I^*$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^-}$  erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\Phi^-(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq K\alpha_-^{m-n} \quad \text{für } m \geq n, \\ f(k, \omega, 0, p) &= 0, \\ \|f(k, \omega, x, p) - f(k, \omega, \bar{x}, p)\|_{k+1, \omega} &\leq L\|x - \bar{x}\|_{k, \omega}, \end{aligned}$$

mit reellen Konstanten  $\alpha_- > 0$ ,  $K \geq 1$  und  $L \geq 0$ , sowie

$$\|\Phi^-(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} := \sup\{\|\Phi^-(m, n, \omega)z\|_{m, \omega} : z \in \mathbb{R}^{d^-}, \|z\|_{n, \omega} \leq 1\}.$$

Dann erhält man für beliebige  $\gamma > \alpha_- + KL$  und  $\kappa \in I$  die folgende Aussage: Ist die Zahl

$$M_{\omega, p} := \sup\{\gamma^{-k}\|f_0(k, \omega, p)\|_{k+1, \omega} : k < \kappa, k \in I\}$$

endlich, so existiert eine eindeutig bestimmte  $\omega, p$ -Lösung  $\mu(\cdot, \omega, p) : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  von (1.13), die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, und man erhält die Abschätzung:

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha_- - KL} M_{\omega, p}. \quad (1.14)$$

Ist darüber hinaus — im Fall  $I = \mathbb{Z}$  — die Menge  $\{\gamma^{-k}\|f_0(k, \omega, p)\|_{k+1, \omega} : k \in \mathbb{Z}\}$  beschränkt, so ist  $\mu(\cdot, \omega, p)$  sogar  $\gamma$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\omega, \gamma} \leq \frac{K}{\gamma - \alpha_- - KL} \sup\{\gamma^{-k}\|f_0(k, \omega, p)\|_{k+1, \omega} : k \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.15)$$

Sei nun zuletzt noch vorausgesetzt, daß (1.13) eine zufällige Differenzengleichung ist, d.h. daß die Abbildungen  $A^-$ ,  $f$  und  $f_0$  meßbar sind. Ferner sollen die obigen Bedingungen für alle  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  gelten. Dann folgt:

- (a) Die oben definierte Abbildung  $\mu : I \times \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  ist meßbar.
- (b) Sind die Abbildungen  $f(k, \omega, \cdot, \cdot)$  und  $f_0(k, \omega, \cdot)$  für beliebige  $k \in I^*$  und  $\omega \in \Omega$  stetig und ist die Menge  $\{M_{\omega, p} : p \in P\}$  beschränkt, für beliebige  $\omega \in \Omega$ , so ist auch die Abbildung  $\mu(k, \omega, \cdot) : P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  stetig, für alle  $k \in I$  und  $\omega \in \Omega$ .

**Bemerkung 1.2.3** Das Lemma kann auch auf Differenzengleichungen der Form

$$x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k, p)$$

angewandt werden, vorausgesetzt die Abbildung  $F : I^* \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  erfüllt

$$\|F(k, \omega, x, p) - F(k, \omega, \bar{x}, p)\|_{k+1, \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{k, \omega}$$

und

$$\sup\{\gamma^{-k} \|F(k, \omega, 0, p)\|_{k+1, \omega} : k < \kappa, k \in I\} < \infty .$$

Man definiert in diesem Fall nämlich einfach

$$\begin{aligned} f(k, \omega, x, p) &:= F(k, \omega, x, p) - F(k, \omega, 0, p), \\ f_0(k, \omega, p) &:= F(k, \omega, 0, p). \end{aligned}$$

Lemma 1.2.2 wird später mehrfach in dieser Form angewandt werden, ohne daß darauf eigens hingewiesen wird.  $\square$

**Beweis:** Die Abschätzung (1.15) kann leicht aus (1.14) abgeleitet werden, wenn man die Identität

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\omega, \gamma} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\kappa, \omega, \gamma}^-$$

beachtet. (Man vergleiche dazu auch den Beweis von Lemma 2.2.2 in [41].) Der Beweis der restlichen Aussagen des obigen Lemmas wird in mehrere Teile zerlegt.

(I) Zunächst soll der einfache Spezialfall  $I = (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z}$ ,  $f_0(k, \omega, p) \equiv 0$  auf  $I^* \times \Omega \times P$  und  $L = 0$ , d.h.  $f(k, \omega, x, p) \equiv 0$  auf  $I^* \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times P$ , behandelt werden. Sei dazu  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  eine  $\omega$ -Lösung der homogenen linearen Differenzgleichung

$$x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k, \tag{1.16}$$

die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega \in \Omega$  ist. Ferner sei  $\kappa_0 \in I$  beliebig, aber fest. Dann liefert die Definition der Übergangsabbildung für beliebige  $k \leq \kappa_0$  die Identität

$$\mu(\kappa_0) = \Phi^-(\kappa_0, k, \omega)\mu(k),$$

woraus sofort die folgende Abschätzung abgeleitet werden kann:

$$\|\mu(\kappa_0)\|_{\kappa_0, \omega} \leq \|\Phi^-(\kappa_0, k, \omega)\|_{k, \kappa_0, \omega} \|\mu(k)\|_{k, \omega} \leq K \alpha_-^{\kappa_0} \left(\frac{\gamma}{\alpha_-}\right)^k \|\mu\|_{\kappa_0, \omega, \gamma}^-.$$

Gemäß Voraussetzung gilt die Ungleichung  $\gamma > \alpha_- + KL = \alpha_-$ , weswegen die rechte Seite der obigen Ungleichung für  $k \rightarrow -\infty$  gegen 0 konvergiert. Dies impliziert  $\mu(\kappa_0) = 0$  für alle  $\kappa_0 \in I$ , d.h. die triviale Lösung ist die einzige  $\omega$ -Lösung von (1.13), die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Offensichtlich beendet die Definition  $\mu(k, \omega, p) := 0$  für beliebige  $k \in I$  den Beweis von Lemma 1.2.2 in dem eben behandelten Spezialfall.

(II) Sei nun wieder speziell  $I = (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z}$ . Ferner sei  $f_0$  beliebig und  $L = 0$ , d.h.  $f(k, \omega, x, p) \equiv 0$  auf  $I^* \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times P$ . Wegen des bereits bewiesenen Teils (I) gibt es höchstens eine  $\omega, p$ -Lösung der inhomogenen linearen Differenzgleichung

$$x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + f_0(k, \omega, p), \tag{1.17}$$

die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, da die Differenz zweier solcher Lösungen stets eine  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega$ -Lösung von (1.16) ist — und damit identisch verschwindet. Um die Existenz einer derartigen Lösung zu zeigen, definiert man

$$\mu(k, \omega, p) := \sum_{i=-\infty}^{k-1} \Phi^-(k, i+1, \omega) f_0(i, \omega, p)$$

für beliebige  $k \in I$ . Diese unendliche Reihe konvergiert für alle  $k \in I$  wegen  $\gamma > \alpha_- + KL = \alpha_-$  und der Abschätzung

$$\|\Phi^-(k, i+1, \omega) f_0(i, \omega, p)\|_{k, \omega} \leq K \alpha_-^{k-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha_-}\right)^i M_{\omega, p},$$

die für alle  $i < k \leq \kappa$  erfüllt ist. Ferner läßt sich leicht zeigen, daß  $\mu$  tatsächlich eine  $\omega, p$ -Lösung von (1.17) auf ganz  $I$  ist. Die geforderte Abschätzung (1.14) folgt aus der Gültigkeit von

$$\begin{aligned} \|\mu(k, \omega, p)\|_{k, \omega} &\leq \sum_{i=-\infty}^{k-1} \|\Phi^-(k, i+1, \omega)\|_{i+1, k, \omega} \|f_0(i, \omega, p)\|_{i+1, \omega} \leq \\ &\leq K \alpha_-^{k-1} M_{\omega, p} \cdot \sum_{i=-\infty}^{k-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha_-}\right)^i = \frac{K}{\gamma - \alpha_-} M_{\omega, p} \cdot \gamma^k, \end{aligned}$$

für beliebige  $k \leq \kappa$ . Zu guter Letzt impliziert die obige Definition von  $\mu(\cdot, \omega, p)$  unmittelbar die Meßbarkeit von  $\mu$ , sofern eine zufällige Differenzengleichung (1.17) vorliegt und die Voraussetzungen des Lemmas für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  gelten<sup>4</sup>. Die in (b) angegebene Stetigkeit bezüglich  $p$  ist eine leichte Folgerung aus dem Weierstraßschen Majorantenkriterium, zusammen mit der weiter oben angegebenen konvergenten Majorante für die  $\mu$  definierende Reihe. Damit ist (II) vollständig bewiesen.

(III) Wieder sei das zugrunde liegende diskrete Intervall von der Form  $I = (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z}$ , darüber hinaus seien nun sowohl  $L \geq 0$  als auch  $f_0$  beliebig. Der Beweis der Aussagen des Lemmas für diese Situation verwendet zwei Fixpunktsätze, die im Anhang angegeben sind. Sei dazu  $X_\omega$  der Banachraum aller Abbildungen  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  sind, versehen mit der Norm  $\|\cdot\|_{\kappa, \omega, \gamma}$ . Dann genügen die Auswertungsabbildungen

$$\begin{cases} X_\omega & \rightarrow \mathbb{R}^{d^-} \\ \nu & \mapsto \nu(k) \end{cases}$$

für beliebiges  $k \in I$  und  $\omega \in \Omega$  wegen der Abschätzung

$$\|\nu(k)\| \leq m_{k, \omega} \|\nu(k)\|_{k, \omega} \leq m_{k, \omega} \gamma^k \|\nu\|_{\kappa, \omega, \gamma}$$

den in Lemma A.1.2 beziehungsweise Lemma A.1.3 geforderten Voraussetzungen<sup>5</sup>. Seien nun  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  wie in der Formulierung des Lemmas gewählt. Zur Konstruktion einer

<sup>4</sup>Die Abbildung  $\mu$  ist ja der punktweise Grenzwert einer Folge meßbarer Abbildungen — und damit natürlich meßbar.

<sup>5</sup>Die Existenz der in der letzten Abschätzung auftauchenden Konstanten  $m_{k, \omega}$  ist eine leichte Folgerung der Äquivalenz aller Normen auf dem  $\mathbb{R}^{d^-}$ .

Kontraktion  $T_{\omega,p}$  auf  $X_\omega$  sei ferner  $\nu_{\omega,p} \in X_\omega$  beliebig. Dann erfüllt die inhomogene lineare Differenzgleichung

$$x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + f(k, \omega, \nu_{\omega,p}(k), p) + f_0(k, \omega, p) \quad (1.18)$$

wegen der für alle  $k < \kappa$  (d.h.  $k \in I^*$ ) gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} \gamma^{-k} \|f(k, \omega, \nu_{\omega,p}(k), p) + f_0(k, \omega, p)\|_{k+1, \omega} &\leq L\gamma^{-k} \|\nu_{\omega,p}(k)\|_{k, \omega} + \gamma^{-k} \|f_0(k, \omega, p)\|_{k+1, \omega} \leq \\ &\leq L\|\nu_{\omega,p}\|_{\bar{\kappa}, \omega, \gamma} + M_{\omega,p} \end{aligned} \quad (1.19)$$

alle Voraussetzungen des bereits bewiesenen Teils (II), d.h. die Gleichung (1.18) besitzt eine eindeutig bestimmte Abbildung  $\nu_{\omega,p}^* : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Definiert man jetzt  $T_{\omega,p}\nu_{\omega,p} := \nu_{\omega,p}^*$ , so wird dadurch ein Operator  $T_{\omega,p} : X_\omega \rightarrow X_\omega$  erzeugt. Des weiteren liefern (II) und (1.19) die Ungleichung

$$\|T_{\omega,p}\nu_{\omega,p}\|_{\bar{\kappa}, \omega, \gamma} \leq \frac{K}{\gamma - \alpha_-} (L\|\nu_{\omega,p}\|_{\bar{\kappa}, \omega, \gamma} + M_{\omega,p}). \quad (1.20)$$

Nun läßt sich mit Hilfe von (II) aber leicht zeigen, daß die Operatorenfamilie  $T_{\omega,p}, (\omega, p) \in \Omega \times P$ , der Bedingung (ii) von Lemma A.1.2 genügt, und für jedes  $\omega \in \Omega$  erfüllt die Familie  $T_{\omega,p}, p \in P$ , die Bedingung (ii) von Lemma A.1.3.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß der oben definierte Operator  $T_{\omega,p}$  tatsächlich eine Kontraktion auf  $X_\omega$  ist. Seien dazu  $\nu_1, \nu_2 \in X_\omega$  beliebig. Dann ist die Abbildung  $T_{\omega,p}\nu_1 - T_{\omega,p}\nu_2$  eine  $\omega, p$ -Lösung der inhomogenen linearen Differenzgleichung

$$x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + f(k, \omega, \nu_1(k), p) - f(k, \omega, \nu_2(k), p),$$

die darüber hinaus sogar  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Wendet man nun (II) auf diese Differenzgleichung an, so erhält man die Abschätzung

$$\|T_{\omega,p}\nu_1 - T_{\omega,p}\nu_2\|_{\bar{\kappa}, \omega, \gamma} \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha_-} \|\nu_1 - \nu_2\|_{\bar{\kappa}, \omega, \gamma}.$$

Wegen  $\gamma > \alpha_- + KL$  ist der Operator  $T_{\omega,p}$  also in der Tat eine Kontraktion auf  $X_\omega$  — und somit besitzt er einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\mu(\cdot, \omega, p) \in X_\omega$ . Da eine Abbildung  $\nu \in X_\omega$  natürlich genau dann ein Fixpunkt von  $T_{\omega,p}$  ist, wenn  $\nu$  eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega, p$ -Lösung von (1.13) ist, folgt die erste Behauptung des Lemmas. Die Ungleichung (1.14) ist eine unmittelbare Konsequenz der Abschätzung

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\bar{\kappa}, \omega, \gamma} \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha_-} \|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\bar{\kappa}, \omega, \gamma} + \frac{K}{\gamma - \alpha_-} M_{\omega,p},$$

die ihrerseits aus  $T_{\omega,p}\mu(\cdot, \omega, p) = \mu(\cdot, \omega, p)$  und (1.20) abgeleitet werden kann. Schließlich folgen die Behauptungen in (a) und (b) sofort aus Lemma A.1.2 beziehungsweise Lemma A.1.3 — womit der Beweis von (III) abgeschlossen wäre.

(IV) Um auch den Beweis von Lemma 1.2.2 abzuschließen, sei nun  $I \subset \mathbb{Z}$  ein beliebiges, nach links unbeschränktes diskretes Intervall und  $\kappa \in I$  beliebig, aber fest. Ferner sei  $\tilde{\mu}(\cdot, \omega, p) : (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  die in (III) konstruierte Abbildung, falls nur die Einschränkung von (1.13)

auf das diskrete Intervall  $(-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z} \subset I$  betrachtet wird. Es läßt sich dann leicht zeigen, daß die mittels

$$\mu(k, \omega, p) := \begin{cases} \tilde{\mu}(k, \omega, p) & , k \leq \kappa \\ \lambda(k; \kappa, \omega, \tilde{\mu}(\kappa, \omega, p), p) & , k > \kappa \end{cases}$$

definierte Abbildung  $\mu(\cdot, \omega, p) : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  allen Aussagen des obigen Lemmas genügt<sup>6</sup>.  $\diamond$

Im nun folgenden zweiten Lemma dieses Abschnittes sollen Bedingungen angegeben werden, die die  $\gamma^+$ -Quasibeschränktheit (bezüglich  $\omega$ ) einer jeden beliebigen  $\omega$ -Lösung gewisser nichtlinearer deterministischer Differenzgleichungen garantieren, die von einem Parameter  $\omega \in \Omega$  abhängen. Darüber hinaus soll die Aussage des letzten Lemmas ergänzt werden, indem das Wachstum der Differenz zweier Lösungen für  $k \rightarrow -\infty$  nach unten abgeschätzt wird.

**Lemma 1.2.4** *Gegeben sei die (deterministische) Differenzgleichung*

$$\boxed{x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + f(k, \omega, x_k) + f_0(k, \omega)} \quad (1.21)$$

die von einem Parameter  $\omega \in \Omega$  abhängt. Das diskrete Intervall  $I \subset \mathbb{Z}$  sei nach rechts unbeschränkt,  $A^- : I \times \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^{d^-})$ ,  $f : I \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  und  $f_0 : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  seien beliebige Abbildungen. Weiter sei  $\Phi^-(m, n, \omega)$  die Übergangsabbildung der homogenen linearen Differenzgleichung  $x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k$ .

Angenommen, für einen (festen) Parameterwert  $\omega \in \Omega$  sind die folgenden drei Bedingungen für beliebige  $m, n, k \in I$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^-}$  erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\Phi^-(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq K \alpha_-^{m-n} \quad \text{für } m \geq n, \\ f(k, \omega, 0) &= 0, \\ \|f(k, \omega, x) - f(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} &\leq L \|x - \bar{x}\|_{k, \omega}, \end{aligned}$$

mit reellen Konstanten  $\alpha_- > 0$ ,  $K \geq 1$  und  $L \geq 0$ . Dann erhält man für beliebige  $\gamma > \alpha_- + KL$  und  $\kappa \in I$ : Ist die Zahl

$$M_\omega := \sup\{\gamma^{-k} \|f_0(k, \omega)\|_{k+1, \omega} : k \geq \kappa, k \in I\}$$

endlich, so ist jede  $\omega$ -Lösung  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  von (1.21)  $\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  und es gilt die Abschätzung:

$$\|\mu\|_{\kappa, \omega, \gamma}^+ \leq K \gamma^{-\kappa} \|\mu(\kappa)\|_{\kappa, \omega} + \frac{K}{\gamma - \alpha_- - KL} M_\omega.$$

Ist darüber hinaus  $I = \mathbb{Z}$  und sind  $\mu, \mu^* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  zwei  $\omega$ -Lösungen von (1.21), so erhält man für beliebige  $k, \kappa \in \mathbb{Z}$  mit  $k \leq \kappa$  die Ungleichung:

$$\|\mu(k) - \mu^*(k)\|_{k, \omega} \geq \frac{1}{K} \gamma^{k-\kappa} \|\mu(\kappa) - \mu^*(\kappa)\|_{\kappa, \omega}.$$

<sup>6</sup>In der Definition von  $\mu$  bezeichnet  $\lambda$  wie üblich die allgemeine Lösung der parameterabhängigen Differenzgleichung (1.13) im Sinne von (1.3).

**Beweis:** Sei  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.21) und  $\kappa \in I$  beliebig, aber fest. Dann liefert die Formel der Variation der Konstanten (1.12) für alle  $k \geq \kappa$  die Identität

$$\mu(k) = \Phi^-(k, \kappa, \omega)\mu(\kappa) + \sum_{i=\kappa}^{k-1} \Phi^-(k, i+1, \omega) (f(i, \omega, \mu(i)) + f_0(i, \omega)) ,$$

mit deren Hilfe leicht die folgende Abschätzung hergeleitet werden kann:

$$\begin{aligned} \|\mu(k)\|_{k,\omega} &\leq K\alpha_-^{k-\kappa}\|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} + K\alpha_-^{k-1} \sum_{i=\kappa}^{k-1} \alpha_-^{-i} (L\|\mu(i)\|_{i,\omega} + \|f_0(i, \omega)\|_{i+1,\omega}) \leq \\ &\leq K\alpha_-^k \left( \alpha_-^{-\kappa}\|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} + \frac{L}{\alpha_-} \sum_{i=\kappa}^{k-1} \alpha_-^{-i}\|\mu(i)\|_{i,\omega} + \frac{M_\omega}{\alpha_-} \sum_{i=\kappa}^{k-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha_-}\right)^i \right) . \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\Lambda(k) := \alpha_-^{-k}\|\mu(k)\|_{k,\omega}$$

und

$$\Gamma(k) := K\alpha_-^{-\kappa}\|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} + \frac{KM_\omega}{\alpha_-} \sum_{i=\kappa}^{k-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha_-}\right)^i$$

läßt sich die obige Ungleichung in der Form

$$\Lambda(k) \leq \Gamma(k) + \frac{KL}{\alpha_-} \sum_{i=\kappa}^{k-1} \Lambda(i) \quad \text{für alle } k \geq \kappa$$

schreiben. Die Anwendung des diskreten Gronwall-Lemmas (man vergleiche dazu [41, Satz 2.1.3]) liefert dann nach einigen Umformungen (wie im Beweis von Lemma 2.2.3 in [41])

$$\Lambda(k) \leq \left(\frac{\gamma}{\alpha_-}\right)^k \left( K\gamma^{-\kappa}\|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} + \frac{K}{\gamma - \alpha_- - KL} M_\omega \right) ,$$

sowie

$$\gamma^{-k}\|\mu(k)\|_{k,\omega} = \Lambda(k) \left(\frac{\alpha_-}{\gamma}\right)^k \leq K\gamma^{-\kappa}\|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} + \frac{K}{\gamma - \alpha_- - KL} M_\omega$$

für beliebige  $k \geq \kappa$ . Daraus folgt sofort die gewünschte Abschätzung für  $\|\mu\|_{\kappa,\omega,\gamma}^+$ .

Sei nun  $I = \mathbb{Z}$  und seien  $\mu, \mu^* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  zwei  $\omega$ -Lösungen von (1.21). Definiert man dann

$$\nu(k) := \mu(k) - \mu^*(k) ,$$

so ist  $\nu$  eine  $\omega$ -Lösung der Differenzgleichung

$$x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + f(k, \omega, x_k + \mu^*(k)) - f(k, \omega, \mu^*(k)) , \quad (1.22)$$

und es läßt sich leicht verifizieren, daß diese Gleichung allen Voraussetzungen des bereits bewiesenen Teils genügt (mit  $M_\omega = 0$ ). Somit gilt für die allgemeine Lösung  $\lambda$  von (1.22) (im Sinne von (1.3)) für alle  $k, \kappa \in \mathbb{Z}$  mit  $k \leq \kappa$  und  $x \in \mathbb{R}^{d^-}$  die Abschätzung

$$\|\lambda(\kappa; k, \omega, x)\|_{\kappa,\omega} \leq K\gamma^{\kappa-k}\|x\|_{k,\omega} ,$$

und damit

$$\|\nu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} = \|\lambda(\kappa; k, \omega, \nu(k))\|_{\kappa,\omega} \leq K\gamma^{\kappa-k} \|\nu(k)\|_{k,\omega}.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt unmittelbar die Abschätzung für  $\mu(k) - \mu^*(k)$  nach unten. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\diamond$

Besonders interessant wird die im obigen Lemma enthaltene Abschätzung nach unten im Spezialfall  $f_0(k, \omega) \equiv 0$ , d.h. falls (1.21) die triviale Lösung besitzt. Dann läßt sich nämlich  $\mu^*(k) \equiv 0$  wählen, und man erhält so für jede Lösung von (1.21) eine untere Schranke in Bezug auf das Wachstumsverhalten für  $k \rightarrow -\infty$ .

Die folgenden beiden Lemmata sind in gewissem Sinne "dual" zu den beiden vorangegangenen. Zunächst sollen Bedingungen angegeben werden, unter denen gewisse nichtlineare Differenzgleichungen (die wieder von zwei Parametern  $\omega$  und  $p$  abhängen) genau eine  $\omega, p$ -Lösung besitzen, die  $\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Wie schon in Lemma 1.2.2 wird auch der Fall der zufälligen Differenzgleichungen behandelt, sowie die meßbare beziehungsweise stetige Abhängigkeit dieser Lösung von den Parametern untersucht.

**Lemma 1.2.5** *Gegeben sei die (deterministische) Differenzgleichung*

$$\boxed{x_{k+1} = A^+(k, \omega)x_k + f(k, \omega, x_k, p) + f_0(k, \omega, p)} \quad (1.23)$$

die von zwei Parametern  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  abhängt, wobei  $P$  ein beliebiger metrischer Raum ist. Das diskrete Intervall  $I \subset \mathbb{Z}$  sei nach rechts unbeschränkt,  $A^+ : I \times \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^{d^+})$ ,  $f : I \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  und  $f_0 : I \times \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  seien beliebige Abbildungen. Weiter sei  $\Phi^+(m, n, \omega)$  die Übergangsabbildung der homogenen linearen Differenzgleichung  $x_{k+1} = A^+(k, \omega)x_k$ .

Angenommen, für (feste) Parameterwerte  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  sind die folgenden drei Bedingungen für beliebige  $m, n, k \in I$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^+}$  erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(m, n, \omega)\|_{n,m,\omega} &\leq K\alpha_+^{m-n} \quad \text{für } m \leq n, \\ f(k, \omega, 0, p) &= 0, \\ \|f(k, \omega, x, p) - f(k, \omega, \bar{x}, p)\|_{k+1,\omega} &\leq L\|x - \bar{x}\|_{k,\omega}, \end{aligned}$$

mit reellen Konstanten  $\alpha_+ > 0$ ,  $K \geq 1$  und  $L \geq 0$ . Dann gilt für beliebige  $0 < \gamma < \alpha_+ - KL$  und  $\kappa \in I$  die folgende Aussage: Ist die Zahl

$$M_{\omega,p} := \sup\{\gamma^{-k}\|f_0(k, \omega, p)\|_{k+1,\omega} : k \geq \kappa, k \in I\}$$

endlich, so existiert eine eindeutig bestimmte  $\omega, p$ -Lösung  $\mu(\cdot, \omega, p) : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  von (1.23), die  $\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, und man erhält die Abschätzung:

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\kappa,\omega,\gamma}^+ \leq \frac{K}{\alpha_+ - \gamma - KL} M_{\omega,p}.$$

Ist darüber hinaus — im Fall  $I = \mathbb{Z}$  — die Menge  $\{\gamma^{-k}\|f_0(k, \omega, p)\|_{k+1,\omega} : k \in \mathbb{Z}\}$  beschränkt, so ist  $\mu(\cdot, \omega, p)$  sogar  $\gamma$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\omega,\gamma} \leq \frac{K}{\alpha_+ - \gamma - KL} \sup\{\gamma^{-k}\|f_0(k, \omega, p)\|_{k+1,\omega} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Sei nun zuletzt noch vorausgesetzt, daß (1.23) eine zufällige Differenzgleichung ist, d.h. daß die Abbildungen  $A^+$ ,  $f$  und  $f_0$  meßbar sind. Ferner sollen die obigen Bedingungen für alle  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  gelten. Dann folgt:

- (a) Die oben definierte Abbildung  $\mu : I \times \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  ist meßbar.
- (b) Sind die Abbildungen  $f(k, \omega, \cdot, \cdot)$  und  $f_0(k, \omega, \cdot)$  für beliebige  $k \in I$  und  $\omega \in \Omega$  stetig und ist die Menge  $\{M_{\omega, p} : p \in P\}$  beschränkt, für beliebige  $\omega \in \Omega$ , so ist auch die Abbildung  $\mu(k, \omega, \cdot) : P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  stetig, für alle  $k \in I$  und  $\omega \in \Omega$ .

**Beweis:** Der Beweis kann völlig analog zum Beweis von Lemma 1.2.2 geführt werden.  $\diamond$

Das letzte Ergebnis dieses Abschnittes ist das Analogon zu Lemma 1.2.4. Es gibt Bedingungen an, unter denen jede  $\omega$ -Lösung gewisser nichtlinearer Differenzgleichungen (die von einem Parameter  $\omega \in \Omega$  abhängen)  $\gamma^-$ -quasibeschränkt ist bezüglich  $\omega$ . Des weiteren wird das Lösungsverhalten für  $k \rightarrow \infty$  näher untersucht.

**Lemma 1.2.6** Gegeben sei die (deterministische) Differenzgleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A^+(k, \omega)x_k + f(k, \omega, x_k) + f_0(k, \omega)} \quad (1.24)$$

die von einem Parameter  $\omega \in \Omega$  abhängt. Das diskrete Intervall  $I \subset \mathbb{Z}$  sei nach links unbeschränkt,  $A^+ : I^* \times \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^{d^+})$ ,  $f : I^* \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  und  $f_0 : I^* \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  seien beliebige Abbildungen. Weiter sei  $\Phi^+(m, n, \omega)$  die Übergangsabbildung der homogenen linearen Differenzgleichung  $x_{k+1} = A^+(k, \omega)x_k$ .

Angenommen, für einen (festen) Parameterwert  $\omega \in \Omega$  sind die folgenden drei Bedingungen für beliebige  $m, n \in I$ ,  $k \in I^*$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^+}$  erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq K\alpha_+^{m-n} \quad \text{für } m \leq n, \\ f(k, \omega, 0) &= 0, \\ \|f(k, \omega, x) - f(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} &\leq L\|x - \bar{x}\|_{k, \omega}, \end{aligned}$$

mit reellen Konstanten  $K \geq 1$ ,  $L \geq 0$  und  $\alpha_+ > KL$ . Dann ist für jedes  $k \in I^*$  die Abbildung  $A^+(k, \omega) + f(k, \omega, \cdot) + f_0(k, \omega)$  eine Bijektion auf dem  $\mathbb{R}^{d^+}$ , d.h. alle  $\omega$ -Lösungen von (1.24) existieren auf ganz  $I$  und sind dort eindeutig bestimmt. Des weiteren gilt für jede beliebige Wahl von  $0 < \gamma < \alpha_+ - KL$  und  $\kappa \in I$ : Ist die Zahl

$$M_\omega := \sup\{\gamma^{-k}\|f_0(k, \omega)\|_{k+1, \omega} : k < \kappa, k \in I\}$$

endlich, so ist jede  $\omega$ -Lösung  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  von (1.24)  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  und es gilt die Abschätzung:

$$\|\mu\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- \leq K\gamma^{-\kappa}\|\mu(\kappa)\|_{\kappa, \omega} + \frac{K}{\alpha_+ - \gamma - KL}M_\omega.$$

Ist darüber hinaus  $I = \mathbb{Z}$  und sind  $\mu, \mu^* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  zwei  $\omega$ -Lösungen von (1.24), so erhält man für beliebige  $k, \kappa \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq \kappa$  die Ungleichung:

$$\|\mu(k) - \mu^*(k)\|_{k, \omega} \geq \frac{1}{K}\gamma^{k-\kappa}\|\mu(\kappa) - \mu^*(\kappa)\|_{\kappa, \omega}.$$

**Beweis:** Um die Invertierbarkeit der rechten Seite von (1.24) für festes  $k \in I^*$  nachzuweisen, sei zunächst  $z \in \mathbb{R}^{d^+}$  beliebig. Definiert man dann einen Operator  $T_{k, \omega, z} : \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  durch

$$T_{k, \omega, z}(x) := A^+(k, \omega)^{-1}z - A^+(k, \omega)^{-1}f(k, \omega, x) - A^+(k, \omega)^{-1}f_0(k, \omega),$$

so erhält man mittels  $A^+(k, \omega)^{-1} = \Phi^+(k, k+1, \omega)$  für alle  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^+}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|T_{k,\omega,z}(x) - T_{k,\omega,z}(\bar{x})\|_{k,\omega} &\leq \|\Phi^+(k, k+1, \omega)\|_{k+1,k,\omega} \|f(k, \omega, x) - f(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1,\omega} \leq \\ &\leq \frac{KL}{\alpha_+} \|x - \bar{x}\|_{k,\omega}, \end{aligned}$$

wobei gemäß Voraussetzung  $\frac{KL}{\alpha_+} < 1$  ist. Damit besitzt  $T_{k,\omega,z}$  einen eindeutig bestimmten Fixpunkt in  $\mathbb{R}^{d^+}$  — und die Invertierbarkeit der rechten Seite von (1.24) folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß  $x$  genau dann ein Fixpunkt von  $T_{k,\omega,z}$  ist, wenn  $z = A^+(k, \omega)x + f(k, \omega, x) + f_0(k, \omega)$  gilt.

Die übrigen Aussagen des obigen Lemmas können völlig analog zum Beweis von Lemma 1.2.4 nachgewiesen werden.  $\diamond$

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch kurz auf die Bedingungen eingegangen werden, die in den vergangenen vier Hilfssätzen an die Übergangsabbildungen der homogenen linearen Differenzgleichungen  $x_{k+1} = A^\pm(k, \omega)x_k$  gestellt wurden. Es ist hinlänglich bekannt (man vergleiche etwa [41, Satz A.3.5]), daß im deterministischen, autonomen Fall, d.h. für

$$A^\pm(k, \omega) \equiv A^\pm \in \text{GL}(\mathbb{R}^{d^\pm}),$$

diese Bedingungen erfüllt sind, sofern nur die Beträge aller Eigenwerte von  $A^-$  (beziehungsweise  $A^+$ ) kleiner als  $\alpha_-$  (beziehungsweise größer als  $\alpha_+$ ) sind. Es ist dann sogar möglich, die Normen  $\|\cdot\|_{k,\omega} := \|\cdot\|$  unabhängig von  $k$  und  $\omega$  zu wählen, etwa gleich einer beliebig vorgegebenen Norm auf dem  $\mathbb{R}^{d^-}$  (beziehungsweise  $\mathbb{R}^{d^+}$ ).

Im zufälligen, echt nichtautonomen Fall ist jedoch zu diesem Zeitpunkt noch völlig unklar, ob für eine hinreichend große Gleichungsklasse obige Bedingungen an die Übergangsabbildungen überhaupt erfüllbar sind — beziehungsweise ob es für die Normen  $\|\cdot\|_{k,\omega}$  eine kanonische Wahl gibt. Im dritten Kapitel wird sich zeigen, daß dies in der Tat möglich ist. (Man vergleiche dazu Satz 3.1.3 und Satz 3.1.5.)

### 1.3 Zufällige invariante Faserbündel

Nach den eher technischen Ausführungen des letzten Abschnittes soll nun damit begonnen werden, das in der Einleitung beschriebene Ziel der vorliegenden Arbeit anzugehen — die Übertragung linearer Phänomene auf nichtlineare Gleichungen, um somit ein möglichst vollständiges geometrisches Bild vom Lösungsverhalten gewisser zufälliger nichtlinearer Gleichungen zu erhalten.

Zur Motivation des zentralen Ergebnisses dieses Abschnittes soll zunächst die zufällige lineare Differenzgleichung

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} A^+(k, \omega) & 0 \\ 0 & A^-(k, \omega) \end{pmatrix} x_k \quad (1.25)$$

betrachtet werden, wobei die Abbildungen  $A^\pm : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{d^\pm})$  den Voraussetzungen der Lemmata 1.2.2 beziehungsweise 1.2.5 genügen, mit  $0 < \alpha_- < \alpha_+$ , und  $\gamma \in (\alpha_-, \alpha_+)$ . Es läßt sich dann sehr leicht zeigen, daß die beiden zufälligen Unterraumbündel (man vergleiche dazu

auch Abbildung 1.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^+(\omega) &:= \{(k, x^+, x^-) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-} : x^- = 0\}, \\ \mathcal{U}^-(\omega) &:= \{(k, x^+, x^-) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-} : x^+ = 0\} \end{aligned}$$

invariant bezüglich (1.25) sind, d.h. startet eine Lösung dieser Differenzgleichung in  $\mathcal{U}^+(\omega)$ , so verbleibt sie für alle Zeiten in diesem Unterraumbündel. (Analog für  $\mathcal{U}^-(\omega)$ .)

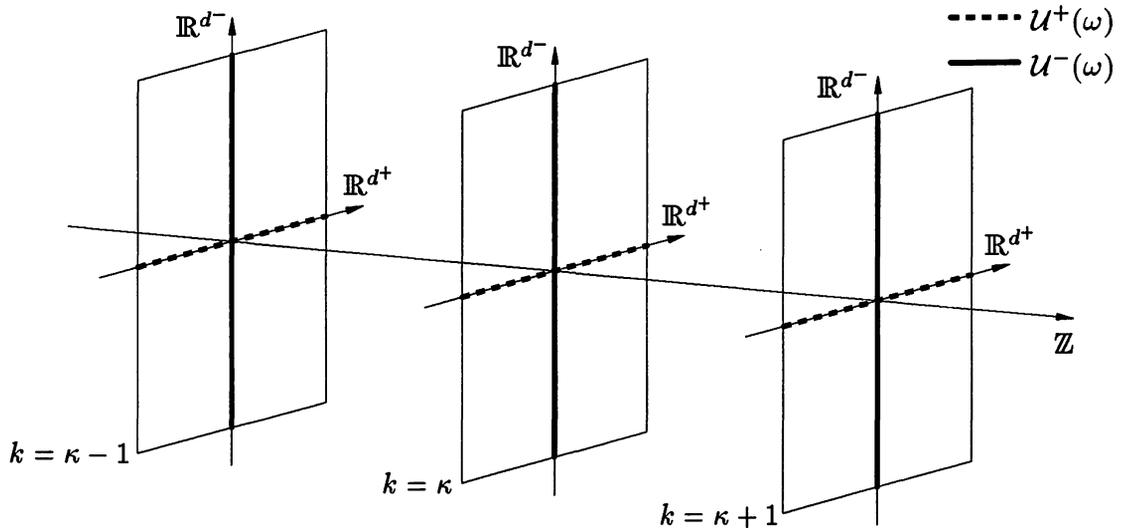


Abbildung 1.2: Zufällige invariante Unterraumbündel

Es wäre natürlich wünschenswert, wenn man diese Situation im nichtlinearen Fall wiederfinden könnte<sup>7</sup>. Wie der folgende Satz zeigt, geht dieser Wunsch für gewisse nichtlineare Gleichungen in Erfüllung. Dabei wird es für den Beweis des Ergebnisses von zentraler Bedeutung sein, daß sich im obigen linearen Fall die zufälligen invarianten Unterraumbündel in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^+(\omega) &= \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-} : \lambda(\cdot; k, \omega, x) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\}, \\ \mathcal{U}^-(\omega) &= \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-} : \lambda(\cdot; k, \omega, x) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\} \end{aligned}$$

dynamisch charakterisieren lassen, wobei  $\lambda$  die allgemeine Lösung der Differenzgleichung (1.25) bezeichnet.

**Satz 1.3.1** Gegeben sei die parameterabhängige zufällige Differenzgleichung

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} A^+(k, \omega) & 0 \\ 0 & A^-(k, \omega) \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} F^+(k, \omega, x_k, p) \\ F^-(k, \omega, x_k, p) \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

mit einem beliebigen metrischen Raum  $P$ , sowie meßbaren Abbildungen  $A^\pm : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^{d^\pm})$  und  $F^\pm : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^\pm}$ , wobei  $\mathbb{R}^d := \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-}$ . Für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  seien die Abbildungen  $F^\pm(k, \omega, \cdot, \cdot)$  stetig, und darüber hinaus gelte:

<sup>7</sup>Es versteht sich von selbst, daß dabei im allgemeinen die Unterraumbündel  $\mathcal{U}^\pm(\omega)$  durch entsprechende nichtlineare Analoga ersetzt werden müssen.

- (1) Die Übergangsabbildungen  $\Phi^\pm(m, n, \omega)$  der homogenen linearen Differenzgleichungen  $x_{k+1}^\pm = A^\pm(k, \omega)x_k^\pm$  genügen den Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq K\alpha_+^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n, \\ \|\Phi^-(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq K\alpha_-^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n \end{aligned}$$

mit  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ , sowie reellen Konstanten  $\alpha_+ > \alpha_- > 0$  und  $K \geq 1$ . Dabei bezeichnet  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  je eine Norm auf  $\mathbb{R}^{d^+}$  beziehungsweise  $\mathbb{R}^{d^-}$  gemäß Definition 1.2.1. Ferner sei

$$0 < \delta < \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2}$$

beliebig, aber fest gewählt.

- (2) Für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  gilt  $F^\pm(k, \omega, 0, p) = 0$ .

- (3) Für alle  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$  und  $p \in P$  sind die Abschätzungen

$$\|F^\pm(k, \omega, x, p) - F^\pm(k, \omega, \bar{x}, p)\|_{k+1, \omega} \leq L\|x - \bar{x}\|_{k, \omega}$$

erfüllt, mit  $0 \leq L < \frac{\delta}{2K}$  und

$$\|x\|_{k, \omega} := \|x^+\|_{k, \omega} + \|x^-\|_{k, \omega},$$

für beliebige  $x = (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-} = \mathbb{R}^d$ .

Zu guter Letzt sei vorausgesetzt, daß für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  alle  $\omega, p$ -Lösungen von (1.26) auf ganz  $\mathbb{Z}$  existieren und dort eindeutig bestimmt sind, und daß die allgemeine Lösung

$$\lambda = (\lambda^+, \lambda^-) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-}$$

meßbar und bezüglich der letzten beiden Variablen stetig ist. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $s^+ : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß ein Punkt  $(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d$  genau dann in dem zufälligen (parameterabhängigen) Faserbündel

$$\mathcal{S}^+(\omega, p) := \{(k, x^+, s^+(k, \omega, x^+, p)) : k \in \mathbb{Z}, x^+ \in \mathbb{R}^{d^+}\}$$

enthalten ist, wenn die Lösung  $\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p)$  eine  $\gamma^-$ -quasibeschränkte Abbildung bezüglich  $\omega$  ist, für jedes beliebige  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]^8$ . Die Abbildung  $s^+$  ist meßbar und besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi_1^+, \xi_2^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  und  $p \in P$  gilt die Abschätzung

$$\|s^+(\kappa, \omega, \xi_1^+, p) - s^+(\kappa, \omega, \xi_2^+, p)\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\kappa, \omega}$$

sowie die Identität  $s^+(\kappa, \omega, 0, p) = 0$ , und die Abbildung  $s^+(\kappa, \omega, \cdot, \cdot)$  ist stetig.

<sup>8</sup>Dabei kommt natürlich die obige Summennorm auf  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-}$  zum Zuge!

- (ii) Der Graph  $S^+(\omega, p)$  ist ein zufälliges invariantes Faserbündel für (1.26) in folgendem Sinne: Die Inklusion  $(\kappa, \xi) \in S^+(\omega, p)$  impliziert  $(k, \lambda(k; \kappa, \omega, \xi, p)) \in S^+(\omega, p)$  für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (iii) Sind für ein  $\omega \in \Omega$  und ein  $p \in P$  die Abbildungen  $A^\pm$  und  $F^\pm$ , sowie die Normen  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  periodisch in  $k$  mit Periode  $\Theta \in \mathbb{N}$ , d.h. gelten für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  die Identitäten

$$\begin{aligned} A^\pm(k + \Theta, \omega) &= A^\pm(k, \omega) \\ F^\pm(k + \Theta, \omega, \xi, p) &= F^\pm(k, \omega, \xi, p) \\ \|\xi\|_{k+\Theta, \omega} &= \|\xi\|_{k, \omega} \end{aligned}$$

so gilt dies auch für  $s^+$ , d.h. man erhält

$$s^+(k + \Theta, \omega, \xi^+, p) = s^+(k, \omega, \xi^+, p),$$

für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$ .

- (b) Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $s^- : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$ , so daß ein Punkt  $(\kappa, \xi)$  genau dann in dem zufälligen (parameterabhängigen) Faserbündel

$$S^-(\omega, p) := \{(k, s^-(k, \omega, x^-, p), x^-) : k \in \mathbb{Z}, x^- \in \mathbb{R}^{d^-}\}$$

enthalten ist, wenn  $\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p)$  eine  $\gamma^+$ -quasibeschränkte Abbildung bezüglich  $\omega$  ist, für jedes beliebige  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$ . Die Abbildung  $s^-$  ist meßbar und besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi_1^-, \xi_2^- \in \mathbb{R}^{d^-}$  und  $p \in P$  gilt die Abschätzung

$$\|s^-(\kappa, \omega, \xi_1^-, p) - s^-(\kappa, \omega, \xi_2^-, p)\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi_1^- - \xi_2^-\|_{\kappa, \omega}$$

sowie die Identität  $s^-(\kappa, \omega, 0, p) = 0$ , und die Abbildung  $s^-(\kappa, \omega, \cdot, \cdot)$  ist stetig.

- (ii) Der Graph  $S^-(\omega, p)$  ist ein zufälliges invariantes Faserbündel für (1.26) in obigem Sinne.
- (iii) Wie oben übertragen sich Periodizitätseigenschaften von  $A^\pm$ ,  $F^\pm$  und  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  bezüglich  $k$  auf die Abbildung  $s^-$ .

**Beweis:** Da der Beweis von (b) völlig analog zum Beweis von (a) durchgeführt werden kann (man muß nur die Lemmata 1.2.2 und 1.2.6 durch die Lemmata 1.2.5 und 1.2.4 ersetzen), wird er im folgenden nicht angegeben. Um die Aussagen von (a) zu verifizieren, soll zunächst die folgende Behauptung gezeigt werden:

Zu jeder Wahl von  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$ ,  $p \in P$  und  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$  gibt es genau einen Punkt  $s_\gamma^+(\kappa, \omega, \xi^+, p) \in \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß

$$\lambda^-(\cdot; \kappa, \omega, \xi^+, s_\gamma^+(\kappa, \omega, \xi^+, p), p) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$$

$\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Die Abbildung  $s_\gamma^+$  ist meßbar und  $s_\gamma^+(\kappa, \omega, \xi^+, \cdot)$  ist stetig, für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$ .

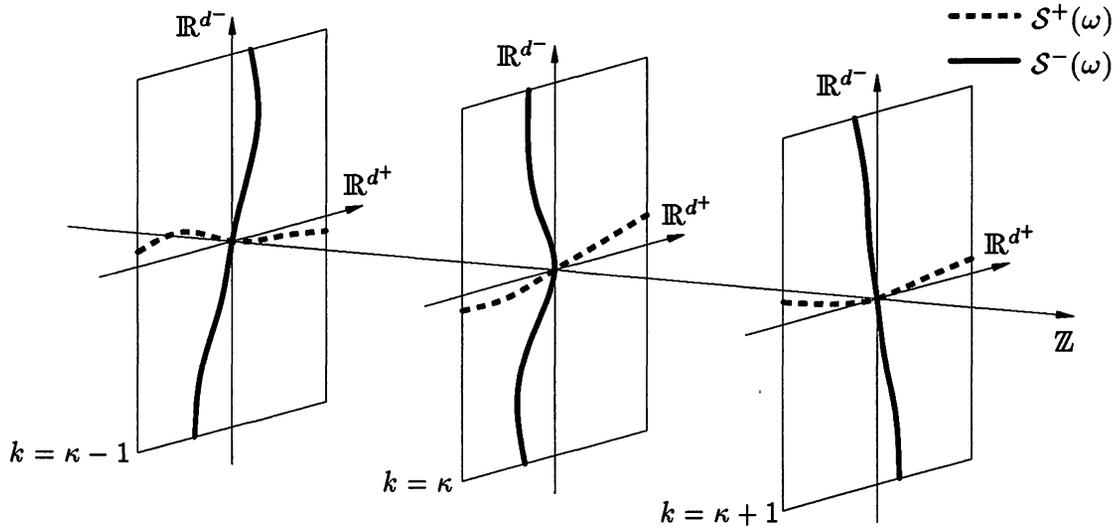


Abbildung 1.3: Zufällige invariante Faserbündel

Der Beweis dieser Behauptung verwendet die Lemmata A.1.2 und A.1.3 aus dem ersten Abschnitt des Anhangs. Seien zunächst  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$  beliebig, aber fest. Weiter sei  $I := (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z}$  und  $X_\omega$  sei der Banachraum aller Abbildungen  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  sind, versehen mit der Norm  $\|\cdot\|_{\kappa, \omega, \gamma}^-$ .

Seien nun  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  und  $p \in P$  beliebig, aber fest gewählt. Zur Konstruktion einer Kontraktion  $T_{\omega, \xi^+, p}$  auf dem Raum  $X_\omega$  sei ferner  $\nu_{\omega, \xi^+, p} \in X_\omega$  beliebig. Nun betrachtet man das folgende Anfangswertproblem:

$$x_{k+1}^+ = A^+(k, \omega)x_k^+ + F^+(k, \omega, x_k^+, \nu_{\omega, \xi^+, p}(k), p) \quad , \quad k \in I \quad , \quad x_\kappa^+ = \xi^+ . \quad (1.27)$$

Wie im Beweis von Lemma 1.2.6 läßt sich zeigen, daß (1.27) eine eindeutig bestimmte  $\omega, p$ -Lösung  $\mu_{\omega, \xi^+, p} : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  besitzt. Des weiteren liefert Lemma A.1.1 die Meßbarkeit der Abbildung  $\mu_{\cdot, \cdot, \cdot}(\cdot)$ , sofern nur  $\nu_{\cdot, \cdot, \cdot}(\cdot)$  meßbar ist, und man kann mit Hilfe des gleichmäßigen Kontraktionsprinzips zeigen, daß die Stetigkeit von  $\nu_{\omega, \xi^+, \cdot}(k)$  die Stetigkeit von  $\mu_{\omega, \xi^+, \cdot}(k)$  impliziert (man vergleiche dazu [41, p. 88]). Gemäß Lemma 1.2.6<sup>9</sup> ist die Abbildung  $\mu_{\omega, \xi^+, p}$  (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkt und es gilt

$$\|\mu_{\omega, \xi^+, p}\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- \leq K\gamma^{-\kappa} \|\xi^+\|_{\kappa, \omega} + \frac{KL}{\alpha_+ - \gamma - KL} \|\nu_{\omega, \xi^+, p}\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- .$$

Jetzt betrachtet man die zufällige Differenzengleichung

$$x_{k+1}^- = A^-(k, \omega)x_k^- + F^-(k, \omega, \mu_{\omega, \xi^+, p}(k), \nu_{\omega, \xi^+, p}(k), p) \quad , \quad k \in I . \quad (1.28)$$

Wegen der für alle  $k < \kappa$ ,  $k \in I$ , gültigen Abschätzung

$$\gamma^{-k} \|F^-(k, \omega, \mu_{\omega, \xi^+, p}(k), \nu_{\omega, \xi^+, p}(k), p)\|_{k+1, \omega} \leq$$

<sup>9</sup>Was die Anwendung dieses Lemmas auf das Anfangswertproblem (1.27) angeht, beachte man auch die im letzten Abschnitt gemachte Bemerkung 1.2.3.

$$\begin{aligned}
&\leq L\|\nu_{\omega,\xi^+,p}\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} + L\|\mu_{\omega,\xi^+,p}\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} \leq \\
&\leq KL\gamma^{-\kappa}\|\xi^+\|_{\kappa,\omega} + \left(L + \frac{KL^2}{\alpha_+ - \gamma - KL}\right)\|\nu_{\omega,\xi^+,p}\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} \quad (1.29)
\end{aligned}$$

garantiert Lemma 1.2.2<sup>10</sup> eine eindeutig bestimmte  $\omega, p$ -Lösung  $\nu_{\omega,\xi^+,p}^* : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  von (1.28), die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Damit erzeugt die Definition  $T_{\omega,\xi^+,p}\nu_{\omega,\xi^+,p} := \nu_{\omega,\xi^+,p}^*$  einen Operator  $T_{\omega,\xi^+,p} : X_\omega \rightarrow X_\omega$ . Darüber hinaus zeigen (1.29) und Lemma 1.2.2, daß die Familie  $T_{\omega,\xi^+,p}$ , mit  $(\omega, \xi^+, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \times P$ , der Bedingung (ii) von Lemma A.1.2 genügt, und für jedes  $\omega \in \Omega$  und  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  erfüllt die Familie  $T_{\omega,\xi^+,p}$ ,  $p \in P$ , die Bedingung (ii) von Lemma A.1.3.

Zur Anwendung dieser beiden Hilfssätze werden aber noch einige Abschätzungen benötigt. Seien dazu  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi_1^+, \xi_2^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$ ,  $\nu_1, \nu_2 \in X_\omega$  und  $p \in P$  beliebig, aber fest. Ferner bezeichne  $\mu_i$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$x_{k+1}^+ = A^+(k, \omega)x_k^+ + F^+(k, \omega, x_k^+, \nu_i(k), p) \quad , \quad k \in I \quad , \quad x_\kappa^+ = \xi_i^+ .$$

Dann ist die Abbildung  $\mu := \mu_1 - \mu_2$  eine  $\omega, p$ -Lösung von

$$x_{k+1}^+ = A^+(k, \omega)x_k^+ + F^+(k, \omega, x_k^+ + \mu_2(k), \nu_1(k), p) - F^+(k, \omega, \mu_2(k), \nu_2(k), p) \quad , \quad k \in I ,$$

und diese Differenzgleichung genügt wieder allen Voraussetzungen von Lemma 1.2.6. Damit erhält man

$$\|\mu\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} \leq K\gamma^{-\kappa}\|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} + \frac{KL}{\alpha_+ - \gamma - KL}\|\nu_1 - \nu_2\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} ,$$

sowie

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} \leq K\gamma^{-\kappa}\|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\kappa,\omega} + \frac{KL}{\alpha_+ - \gamma - KL}\|\nu_1 - \nu_2\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} . \quad (1.30)$$

Nun sei  $\nu_i^* := T_{\omega,\xi_i^+,p}\nu_i$ . Dann ist die Abbildung  $\nu^* := \nu_1^* - \nu_2^*$  eine  $\omega, p$ -Lösung der Differenzgleichung

$$x_{k+1}^- = A^-(k, \omega)x_k^- + F^-(k, \omega, \mu_1(k), \nu_1(k), p) - F^-(k, \omega, \mu_2(k), \nu_2(k), p) \quad , \quad k \in I ,$$

und für alle  $k < \kappa$ ,  $k \in I$ , läßt sich mittels (1.30) die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
&\gamma^{-k}\|F^-(k, \omega, \mu_1(k), \nu_1(k), p) - F^-(k, \omega, \mu_2(k), \nu_2(k), p)\|_{k+1,\omega} \leq \\
&\leq L\|\mu_1 - \mu_2\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} + L\|\nu_1 - \nu_2\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} \leq \\
&\leq KL\gamma^{-\kappa}\|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\kappa,\omega} + \frac{L(\alpha_+ - \gamma)}{\alpha_+ - \gamma - KL}\|\nu_1 - \nu_2\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma}
\end{aligned}$$

ableiten. Wegen der  $\gamma^-$ -Quasibeschränktheit (bezüglich  $\omega$ ) von  $\nu^*$  gemäß obiger Konstruktion, impliziert eine Anwendung von Lemma 1.2.2 sofort

$$\|\nu^*\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} \leq \frac{K^2L}{\gamma - \alpha_-}\gamma^{-\kappa}\|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\kappa,\omega} + \frac{KL(\alpha_+ - \gamma)}{(\alpha_+ - \gamma - KL)(\gamma - \alpha_-)}\|\nu_1 - \nu_2\|_{\bar{\kappa},\omega,\gamma} ,$$

<sup>10</sup>Für die Anwendung dieses Lemmas setzt man natürlich  $f(k, \omega, x) := 0$ .

woraus mit  $T_{\omega, \xi_i^+, p} \nu_i = \nu_i^*$  und  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$  schließlich

$$\|T_{\omega, \xi_1^+, p} \nu_1 - T_{\omega, \xi_2^+, p} \nu_2\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K^2 L}{\delta} \gamma^{-\kappa} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\kappa, \omega} + \frac{KL}{\delta - KL} \|\nu_1 - \nu_2\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- \quad (1.31)$$

folgt<sup>11</sup>. Für beliebige  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  und  $p \in P$  liefert diese Abschätzung ferner

$$\|T_{\omega, \xi^+, p} \nu_1 - T_{\omega, \xi^+, p} \nu_2\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- \leq \frac{KL}{\delta - KL} \|\nu_1 - \nu_2\|_{\kappa, \omega, \gamma}^-.$$

Nach Voraussetzung des Satzes ist  $KL < \delta - KL$ , d.h.  $T_{\omega, \xi^+, p}$  ist tatsächlich eine Kontraktion auf  $X_\omega$  — und besitzt somit genau einen Fixpunkt  $\nu_{\omega, \xi^+, p} \in X_\omega$ . Definiert man nun  $s_\gamma^+(\kappa, \omega, \xi^+, p) := \nu_{\omega, \xi^+, p}(\kappa)$ , dann läßt sich leicht verifizieren, daß  $s_\gamma^+(\kappa, \omega, \xi^+, p)$  der eindeutig bestimmte Punkt im  $\mathbb{R}^{d^-}$  ist, für den die Abbildung  $\lambda^-(\cdot; \kappa, \omega, \xi^+, s_\gamma^+(\kappa, \omega, \xi^+, p), p)$   $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Darüber hinaus liefert Lemma A.1.2 die Meßbarkeit von  $s_\gamma^+$  — und Lemma A.1.3 zeigt, daß  $s_\gamma^+(\kappa, \omega, \xi^+, \cdot)$  für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  stetig ist. Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Seien nun  $\gamma_1, \gamma_2 \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$  beliebig mit  $\gamma_1 > \gamma_2$ . Da die  $\gamma_1^-$ -Quasibeschränktheit einer Abbildung offensichtlich ihre  $\gamma_2^-$ -Quasibeschränktheit nach sich zieht, liefert die eben bewiesene Behauptung sofort  $s_{\gamma_1}^+ = s_{\gamma_2}^+$ , d.h.  $s_\gamma^+$  ist in Wirklichkeit unabhängig von der speziellen Wahl von  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$  — und somit kann der Index  $\gamma$  im folgenden weggelassen werden.

Als nächstes soll die dynamische Charakterisierung von  $\mathcal{S}^+(\omega, p)$  bewiesen werden, für jedes beliebige  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$ . Sei dazu zunächst  $\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p) = \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi^+, \xi^-, p)$  eine  $\gamma^-$ -quasibeschränkte Abbildung bezüglich  $\omega$ . Dann ist natürlich auch  $\lambda^-(\cdot; \kappa, \omega, \xi^+, \xi^-, p)$  (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkt — und die eben nachgewiesene Behauptung liefert  $\xi^- = s^+(\kappa, \omega, \xi^+, p)$ , d.h.  $(\kappa, \xi) = (\kappa, \xi^+, \xi^-) \in \mathcal{S}^+(\omega, p)$ .

Ist nun umgekehrt  $(\kappa, \xi) \in \mathcal{S}^+(\omega, p)$  beliebig, so folgt aus der oben bewiesenen Behauptung, daß  $\lambda^-(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p)$  (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkt ist. Wendet man jetzt Lemma 1.2.6 auf die Differenzgleichung

$$x_{k+1}^+ = A^+(k, \omega) x_k^+ + F^+(k, \omega, x_k^+, \lambda^-(k; \kappa, \omega, \xi, p), p)$$

an, so erhält man unter Beachtung von  $\alpha_+ - \gamma \geq \delta$  die Abschätzung

$$\|\lambda^+(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p)\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- \leq K \gamma^{-\kappa} \|\xi^+\|_{\kappa, \omega} + \frac{KL}{\delta - KL} \|\lambda^-(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p)\|_{\kappa, \omega, \gamma}^-, \quad (1.32)$$

d.h. auch die Abbildung  $\lambda^+(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p)$  ist  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  — und somit ist schließlich  $\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p)$  ebenfalls  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ .

Um den Beweis von Satz 1.3.1 abzuschließen, müssen nun noch (i), (ii) und (iii) nachgewiesen werden.

*Beweis von (i):* Zunächst ist die triviale Abbildung gemäß Voraussetzung für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  eine  $\omega, p$ -Lösung von (1.26), die natürlich  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist — d.h. die Identität  $s^+(\kappa, \omega, 0, p) = 0$  folgt unmittelbar aus der bereits bewiesenen Eindeutigkeitsaussage.

<sup>11</sup>Man überzeugt sich leicht, daß der Ausdruck  $(\alpha_+ - \gamma - KL)(\gamma - \alpha_-)$  für  $\gamma = \alpha_+ - \delta$  minimal wird.

Sei nun  $\kappa \in \mathbb{Z}$  beliebig, aber fest. Ferner bezeichne  $\nu_{\omega, \xi_1^+, p}$  beziehungsweise  $\nu_{\omega, \xi_2^+, p}$  den Fixpunkt von  $T_{\omega, \xi_1^+, p}$  beziehungsweise  $T_{\omega, \xi_2^+, p}$ . Dann impliziert die Abschätzung (1.31)

$$\|\nu_{\omega, \xi_1^+, p} - \nu_{\omega, \xi_2^+, p}\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K^2 L}{\delta} \gamma^{-\kappa} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\kappa, \omega} + \frac{KL}{\delta - KL} \|\nu_{\omega, \xi_1^+, p} - \nu_{\omega, \xi_2^+, p}\|_{\kappa, \omega, \gamma}^-$$

oder

$$\|\nu_{\omega, \xi_1^+, p} - \nu_{\omega, \xi_2^+, p}\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \gamma^{-\kappa} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\kappa, \omega}, \quad (1.33)$$

und zu guter Letzt

$$\begin{aligned} & \|s^+(\kappa, \omega, \xi_1^+, p) - s^+(\kappa, \omega, \xi_2^+, p)\|_{\kappa, \omega} = \|\nu_{\omega, \xi_1^+, p}(\kappa) - \nu_{\omega, \xi_2^+, p}(\kappa)\|_{\kappa, \omega} \leq \\ & \leq \gamma^\kappa \|\nu_{\omega, \xi_1^+, p} - \nu_{\omega, \xi_2^+, p}\|_{\kappa, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\kappa, \omega}. \end{aligned}$$

Zum noch fehlenden Nachweis der Stetigkeitsaussage seien  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  beliebig, aber fest. Dann liefert die letzte Ungleichung für alle  $\xi^+, \xi_0^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  und  $p, p_0 \in P$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|s^+(\kappa, \omega, \xi^+, p) - s^+(\kappa, \omega, \xi_0^+, p_0)\|_{\kappa, \omega} & \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi^+ - \xi_0^+\|_{\kappa, \omega} + \\ & + \|s^+(\kappa, \omega, \xi_0^+, p) - s^+(\kappa, \omega, \xi_0^+, p_0)\|_{\kappa, \omega}, \end{aligned}$$

von der — wegen der bereits gezeigten Stetigkeit von  $s^+(\kappa, \omega, \xi_0^+, \cdot)$  — sofort auf

$$s^+(\kappa, \omega, \xi^+, p) \rightarrow s^+(\kappa, \omega, \xi_0^+, p_0) \quad \text{für} \quad (\xi^+, p) \rightarrow (\xi_0^+, p_0)$$

geschlossen werden kann, da ja auf dem  $\mathbb{R}^{d^-}$  beziehungsweise auf dem  $\mathbb{R}^{d^+}$  alle Normen äquivalent sind.

*Beweis von (ii):* Seien  $(\kappa, \xi) \in \mathcal{S}^+(\omega, p)$  und  $k \in \mathbb{Z}$  beliebig. Dann ist die Abbildung  $\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p)$   $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ . Die mittels (1.5) leicht einsehbare Identität

$$\lambda(\cdot; k, \omega, \lambda(k; \kappa, \omega, \xi, p), p) = \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p)$$

zeigt nun aber, daß auch

$$\lambda(\cdot; k, \omega, \lambda(k; \kappa, \omega, \xi, p), p)$$

$\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist — und dies liefert schließlich  $(k, \lambda(k; \kappa, \omega, \xi, p)) \in \mathcal{S}^+(\omega, p)$ .

*Beweis von (iii):* Seien  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  beliebig, aber fest. Definiert man dann

$$\xi := (\xi^+, s^+(\kappa, \omega, \xi^+, p)) \in \mathbb{R}^d \quad \text{und} \quad \mu(\cdot) := \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi, p),$$

so ist die Abbildung  $\mu$  gemäß der bereits bewiesenen dynamischen Charakterisierung von  $\mathcal{S}^+(\omega, p)$  eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega, p$ -Lösung von (1.26). Verwendet man nun die vorausgesetzte Periodizität von  $A^\pm, F^\pm$  und  $\|\cdot\|_{k, \omega}$ , so erhält man leicht, daß die durch

$$\nu(k) := \mu(k - \Theta)$$

definierte Abbildung  $\nu$  ebenfalls eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega, p$ -Lösung von (1.26) ist — und die Definition von  $\mathcal{S}^+(\omega, p)$  impliziert unter nochmaliger Anwendung der dynamischen Charakterisierung:

$$\begin{aligned} s^+(\kappa + \Theta, \omega, \xi^+, p) &= s^+(\kappa + \Theta, \omega, \nu^+(\kappa + \Theta), p) = \nu^-(\kappa + \Theta) = \\ &= \mu^-(\kappa) = s^+(\kappa, \omega, \mu^+(\kappa), p) = \\ &= s^+(\kappa, \omega, \xi^+, p). \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. ◇

Der soeben bewiesene Satz 1.3.1 hat gezeigt, daß die zu Beginn dieses Abschnittes definierten zufälligen invarianten Unterraumbündel  $\mathcal{U}^+(\omega)$  und  $\mathcal{U}^-(\omega)$  eine (hinreichend kleine) nichtlineare Störung “überleben”, und zwar als zufällige invariante Faserbündel  $\mathcal{S}^+(\omega)$  beziehungsweise  $\mathcal{S}^-(\omega)$ . Ferner lassen sich diese beiden Faserbündel durch Quasibeschränktheitseigenschaften der in ihnen enthaltenen Lösungen dynamisch charakterisieren. Es wird sich an späterer Stelle als sehr nützlich erweisen, daß die dabei auftretende Wachstumsrate  $\gamma$  aus einem nicht einpunktigen Intervall gewählt werden kann.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll nun noch untersucht werden, wie sich die Lösungen auf dem  $\mathcal{S}^+(\omega)$ -Faserbündel (beziehungsweise dem  $\mathcal{S}^-(\omega)$ -Faserbündel) für  $k \rightarrow \infty$  (beziehungsweise für  $k \rightarrow -\infty$ ) verhalten.

**Korollar 1.3.2** *Gegeben sei die zufällige Differenzengleichung*

$$\boxed{x_{k+1} = \begin{pmatrix} A^+(k, \omega) & 0 \\ 0 & A^-(k, \omega) \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} F^+(k, \omega, x_k) \\ F^-(k, \omega, x_k) \end{pmatrix}} \quad (1.34)$$

*Angenommen, diese Gleichung genügt allen Voraussetzungen von Satz 1.3.1 (in einer parameterunabhängigen Version). Dann gelten für jede in  $\mathcal{S}^+(\omega)$  enthaltene  $\omega$ -Lösung  $\mu$  von (1.34) und jedes  $0 < \gamma \leq \alpha_+ - \delta$  die beiden Ungleichungen*

$$\begin{aligned} \|\mu(k)\|_{k, \omega} &\leq \frac{K(\delta - KL)}{\delta - 2KL} \gamma^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\|_{\kappa, \omega} \quad \text{für } k \leq \kappa, \\ \|\mu(k)\|_{k, \omega} &\geq \frac{\delta - 2KL}{K(\delta - KL)} \gamma^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\|_{\kappa, \omega} \quad \text{für } k \geq \kappa, \end{aligned}$$

*mit  $k, \kappa \in \mathbb{Z}$ . Entsprechend erhält man für jede in  $\mathcal{S}^-(\omega)$  verlaufende  $\omega$ -Lösung  $\nu$  von (1.34) und jedes  $\gamma \geq \alpha_- + \delta$  die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} \|\nu(k)\|_{k, \omega} &\leq \frac{K(\delta - KL)}{\delta - 2KL} \gamma^{k-\kappa} \|\nu(\kappa)\|_{\kappa, \omega} \quad \text{für } k \geq \kappa, \\ \|\nu(k)\|_{k, \omega} &\geq \frac{\delta - 2KL}{K(\delta - KL)} \gamma^{k-\kappa} \|\nu(\kappa)\|_{\kappa, \omega} \quad \text{für } k \leq \kappa. \end{aligned}$$

**Beweis:** Aus Symmetriegründen sollen nur die Aussagen bezüglich der Abbildung  $\mu$  bewiesen werden. Die Abschätzungen für  $\nu$  erhält man völlig analog.

Da  $\mu$  in  $\mathcal{S}^+(\omega)$  verläuft, gilt zunächst — unter Verwendung der Notation aus dem Beweis des Satzes 1.3.1 — die Identität

$$\mu^-(k) = \nu_{\omega, \mu^+(\kappa)}(k) \quad \text{für beliebige } k \leq \kappa,$$

wobei  $\mu(k) =: (\mu^+(k), \mu^-(k)) \in \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-} = \mathbb{R}^d$ . Wählt man nun in der Abschätzung (1.33) speziell  $\xi_1^+ = \mu^+(\kappa)$  und  $\xi_2^+ = 0$ , so folgt für beliebige  $k, \kappa \in \mathbb{Z}$  mit  $k \leq \kappa$  und jedes  $\gamma \leq \alpha_+ - \delta$  die Ungleichung

$$\|\mu^-(k)\|_{k,\omega} \leq \gamma^k \|\mu^-\|_{\kappa,\omega,\gamma}^- \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \gamma^{k-\kappa} \|\mu^+(\kappa)\|_{\kappa,\omega},$$

und unter Beachtung von (1.32) erhält man weiter

$$\begin{aligned} \|\mu^+(k)\|_{k,\omega} &\leq \gamma^k \left( K \gamma^{-\kappa} \|\mu^+(\kappa)\|_{\kappa,\omega} + \frac{KL}{\delta - KL} \|\mu^-\|_{\kappa,\omega,\gamma}^- \right) \leq \\ &\leq \left( K + \frac{K^3 L^2}{\delta(\delta - 2KL)} \right) \gamma^{k-\kappa} \|\mu^+(\kappa)\|_{\kappa,\omega}. \end{aligned}$$

Zusammen ergeben die letzten beiden Ungleichungen leicht die Abschätzung

$$\|\mu(k)\|_{k,\omega} \leq \frac{K(\delta - KL)}{\delta - 2KL} \gamma^{k-\kappa} \|\mu^+(\kappa)\|_{\kappa,\omega} \leq \frac{K(\delta - KL)}{\delta - 2KL} \gamma^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega}$$

für beliebige  $k, \kappa \in \mathbb{Z}$  mit  $k \leq \kappa$ , d.h. die erste Ungleichung für  $\mu$  ist bewiesen. Zum Beweis der zweiten Ungleichung seien  $k, \kappa \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq \kappa$  beliebig. Dann impliziert die bereits behandelte Abschätzung unter Verwendung von (1.5) zunächst

$$\begin{aligned} \|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} &= \|\lambda(\kappa; k, \omega, \lambda(k; \kappa, \omega, \mu(\kappa)))\|_{\kappa,\omega} \leq \\ &\leq \frac{K(\delta - KL)}{\delta - 2KL} \gamma^{\kappa-k} \|\lambda(k; \kappa, \omega, \mu(\kappa))\|_{k,\omega} = \\ &= \frac{K(\delta - KL)}{\delta - 2KL} \gamma^{\kappa-k} \|\mu(k)\|_{k,\omega}, \end{aligned}$$

und daraus folgt schließlich leicht die noch fehlende zweite Abschätzung für  $\mu$ . Damit ist alles bewiesen.  $\diamond$

Als erste, leichte Folgerung erhält man aus Korollar 1.3.2, daß die  $\mathcal{S}^+(\omega)$ - und  $\mathcal{S}^-(\omega)$ -Faserbündel nur die triviale Lösung gemeinsam haben: Ist nämlich  $\mu$  eine nichttriviale  $\omega$ -Lösung von (1.34), die im  $\mathcal{S}^+(\omega)$ -Faserbündel enthalten ist, so liefert Korollar 1.3.2 für  $\bar{\gamma} = \alpha_+ - \delta$  die Abschätzung

$$\|\mu(k)\|_{k,\omega} \geq \frac{\delta - 2KL}{K(\delta - KL)} \bar{\gamma}^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} \quad \text{für alle } k \geq \kappa.$$

Dann ist  $\mu$  für  $\gamma < \bar{\gamma}$  aber offensichtlich nicht  $\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  — und somit auch nicht in  $\mathcal{S}^-(\omega)$  enthalten.

## 1.4 Hierarchien und zentrale Faserbündel

Möchte man die Ergebnisse des letzten Abschnittes auf konkrete Gleichungen anwenden, so müssen natürlich zunächst einmal die Voraussetzungen an den Linearteil erfüllt sein. Es wurde bereits gegen Ende des zweiten Abschnittes erwähnt, daß diese Bedingungen im deterministischen, autonomen Fall eine unmittelbare Konsequenz gewisser Eigenwertbedingungen sind. Speziell in der Situation von Satz 1.3.1 etwa darf kein Eigenwert der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix}$$

in dem Kreisring

$$\{z \in \mathbb{C} : \alpha_- \leq |z| \leq \alpha_+\}$$

liegen (vergleiche Abbildung 1.4(a)), und die verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit Betrag größer als  $\alpha_+$  (beziehungsweise kleiner als  $\alpha_-$ ) müssen gerade den linearen Unterraum  $\mathbb{R}^{d^+} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d$  (beziehungsweise  $\{0\} \times \mathbb{R}^{d^-} \subset \mathbb{R}^d$ ) aufspannen. (Bekanntlich ist diese letzte Annahme bezüglich der verallgemeinerten Eigenräume keine wirkliche Einschränkung, da diese Situation stets durch eine geeignete Transformation herbeigeführt werden kann.)

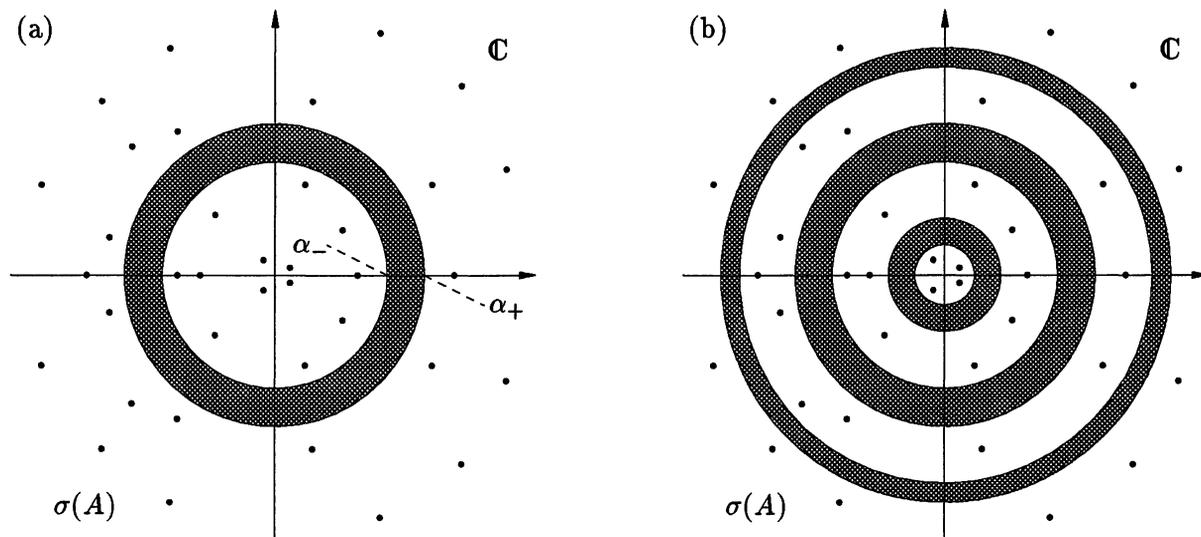


Abbildung 1.4: Zur Teilung des Spektrums  $\sigma(A)$  von  $A$

In vielen Fällen läßt sich jedoch über das Spektrum  $\sigma(A)$  von  $A$  noch viel mehr aussagen. Zum Beispiel wird es sicher häufig vorkommen, daß man die Eigenwerte von  $A$  — in Verallgemeinerung der soeben erörterten Situation — durch  $p-1$  konzentrische Kreisringe trennen kann (vergleiche Abbildung 1.4(b) für den Fall  $p=4$ ). Es bleibt dann nur noch zu hoffen, daß diese genauere Kenntnis des Spektrums auch weitergehende Aussagen über die nichtlinear gestörte Gleichung ermöglicht.

Derartige Fragestellungen sollen im folgenden untersucht werden. Den Anfang macht dabei der vorliegende Abschnitt, in dem die Aussagen bezüglich der Existenz zufälliger invarianter Faserbündel des letzten Abschnittes erweitert werden sollen.

Zunächst aber soll der Rahmen für diese weiteren Untersuchungen abgesteckt werden. Betrachtet wird wieder eine zufällige Differenzgleichung der Form

$$x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k) \quad (1.35)$$

auf dem  $\mathbb{R}^d$ . Da die Voraussetzungen, denen diese Gleichung genügen soll, in allen nun folgenden Ergebnissen dieselben sind, werden sie an dieser Stelle einmal zusammen aufgeführt. Den Anfang machen die Voraussetzungen an den linearen Anteil.

(V1) Es seien  $A_i : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^{d_i})$ ,  $i = 1, \dots, p$ , meßbare Abbildungen, so daß für beliebige

$k \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  gilt:

$$A(k, \omega) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1(k, \omega)} & & & 0 \\ & \boxed{A_2(k, \omega)} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \boxed{A_p(k, \omega)} \end{pmatrix},$$

d.h.  $A(k, \omega)$  besitzt Blockdiagonalform, mit genau  $p \geq 2$  Blöcken. Auf jedem Raum  $\mathbb{R}^{d_i}$  sei eine von  $k$  und  $\omega$  abhängige Norm gemäß Definition 1.2.1 gewählt, und für

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p} = \mathbb{R}^d$$

sei

$$\|x\|_{k, \omega} := \|x^1\|_{k, \omega} + \|x^2\|_{k, \omega} + \dots + \|x^p\|_{k, \omega}.$$

Ferner seien  $\alpha_{i,+}$ ,  $\alpha_{i,-}$  reelle Konstanten mit

$$\infty > \alpha_{1,-} > \alpha_{1,+} > \alpha_{2,-} > \dots > \alpha_{p-1,+} > \alpha_{p,-} > \alpha_{p,+} > 0,$$

und für die Übergangsabbildungen  $\Phi_i(m, n, \omega)$  der homogenen linearen Differenzgleichungen  $x_{k+1}^i = A_i(k, \omega)x_k^i$  gelte

$$\begin{aligned} \|\Phi_i(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq K \alpha_{i,+}^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n, \\ \|\Phi_i(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq K \alpha_{i,-}^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n \end{aligned}$$

mit  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sowie einer reellen Konstanten  $K \geq 1$ . Schließlich sei

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\alpha_{1,+} - \alpha_{2,-}}{2}, \dots, \frac{\alpha_{p-1,+} - \alpha_{p,-}}{2}, \alpha_{p,+} \right\}$$

beliebig, aber fest gewählt.

Diese Bedingungen spiegeln die eingangs erwähnte Tatsache wider, daß im deterministischen, autonomen Fall das Spektrum von  $A$  durch  $p-1$  konzentrische Kreisringe getrennt werden kann.

Als nächstes sollen die Bedingungen an die (im allgemeinen) nichtlineare Störung  $F$  angeben werden.

(V2) Die Abbildung  $F : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei meßbar mit  $F(k, \omega, 0) = 0$  für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$ . Darüber hinaus gelte

$$\|F_i(k, \omega, x) - F_i(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{k, \omega}$$

für beliebige  $i = 1, \dots, p$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$ , mit einer Konstanten  $L \geq 0$ . Dabei sei

$$F(k, \omega, x) =: (F_1(k, \omega, x), \dots, F_p(k, \omega, x)) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}.$$

Es versteht sich von selbst, daß die Lipschitzkonstante  $L$  hinreichend klein sein muß. Genauere Aussagen bezüglich der Wahl von  $L$  sind in den folgenden Ergebnissen jeweils explizit enthalten.

Neben (V1) und (V2) soll die allgemeine Lösung der betrachteten zufälligen Differenzgleichung auch die folgende Voraussetzung erfüllen:

(V3) Für beliebige  $\omega \in \Omega$  existieren alle  $\omega$ -Lösungen von (1.35) auf ganz  $\mathbb{Z}$ , sind dort eindeutig bestimmt, und die allgemeine Lösung

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p} = \mathbb{R}^d$$

ist meßbar und bezüglich der letzten Variablen stetig.

Während die Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) für alle Ergebnisse der Abschnitte 1.4, 1.5 und 1.6 ausreichen werden, wird in Abschnitt 1.7 zusätzlich die folgende Voraussetzung (V4) benötigt.

(V4) Für beliebige  $i = 1, \dots, p$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  seien die Abschätzungen

$$\|F_i(k, \omega, x)\|_{k+1, \omega} \leq M$$

erfüllt, mit einer Konstanten  $M \geq 0$ .

Zu guter Letzt soll noch eine neue Notation eingeführt werden.

**Bemerkung 1.4.1** Für beliebiges

$$x = (x^1, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p} = \mathbb{R}^d$$

und  $i, j \in \{1, \dots, p\}$  mit  $i \leq j$  definiert man

$$\begin{aligned} x^{\leq i} &:= (x^1, \dots, x^i) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i}, \\ x^{> i} &:= (x^{i+1}, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}, \\ x^{i \leq j} &:= (x^i, \dots, x^j) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j}, \end{aligned}$$

usw... Für jede beliebige Teilmenge  $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, p\}$  sei

$$\|(x^{i_1}, \dots, x^{i_m})\|_{k, \omega} := \|x^{i_1}\|_{k, \omega} + \dots + \|x^{i_m}\|_{k, \omega}.$$

Schließlich sei abkürzend

$$\begin{aligned} \lambda_{\leq i} &:= (\lambda_1, \dots, \lambda_i), \\ \lambda_{> i} &:= (\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_p), \end{aligned}$$

usw... Generell werden also Teilvektoren von Vektoren stets durch hochgestellte Zeichen (etwa  $\leq i$ ,  $> i$ , usw.) angegeben, bei Abbildungen werden dagegen stets durch tiefergestellte Zeichen entsprechende Kombinationen der Komponentenabbildungen abgekürzt. Dies soll im folgenden einige Formulierungen möglichst übersichtlich gestalten.  $\square$

Nach diesen Vorbemerkungen kann nun damit begonnen werden, weitergehende Aussagen bezüglich der Existenz zufälliger invarianter Faserbündel von (1.35) herzuleiten. Betrachtet man die zufällige lineare Differenzgleichung  $x_{k+1} = A(k, \omega)x_k$ , oder ausführlicher

$$\boxed{\begin{aligned} x_{k+1}^1 &= A_1(k, \omega)x_k^1 \\ x_{k+1}^2 &= A_2(k, \omega)x_k^2 \\ &\vdots \\ x_{k+1}^p &= A_p(k, \omega)x_k^p \end{aligned}} \quad (1.36)$$

so erkennt man sofort, daß die zufälligen Unterraumbündel

$$\mathcal{U}^{i,i}(\omega) := \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : x^j = 0 \text{ für } j \neq i\} \quad ; \quad i = 1, \dots, p,$$

invariant bezüglich (1.36) sind — und das gilt natürlich auch für alle zufälligen Unterraumbündel, die von den  $\mathcal{U}^{i,i}(\omega)$  erzeugt werden, insbesondere etwa für die zufälligen Hierarchien

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\leq i}(\omega) &:= \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : x^{>i} = 0\}, \\ \mathcal{U}^{>i}(\omega) &:= \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : x^{\leq i} = 0\}, \end{aligned}$$

für  $i = 1, \dots, p-1$ , sowie für die zufälligen zentralen Unterraumbündel

$$\mathcal{U}^{i,j}(\omega) := \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : x^{\leq i} = 0, x^{>j} = 0\},$$

für  $1 < i \leq j < p$ . Insgesamt erhält man also  $2^p - 2$  nichttriviale zufällige invariante Unterraumbündel für (1.36), darunter als Spezialfälle je  $p-1$  Hierarchiefaserbündel  $\mathcal{U}^{\leq i}(\omega)$  beziehungsweise  $\mathcal{U}^{>i}(\omega)$ , sowie  $\frac{p^2-3p+2}{2}$  zentrale Faserbündel  $\mathcal{U}^{i,j}(\omega)$ . Welche dieser zufälligen invarianten Unterraumbündel überleben aber eine kleine nichtlineare Störung als zufällige invariante Faserbündel?

Die Antwort auf diese Frage wird in mehreren Teilen gegeben werden. Zunächst sollen die invarianten Hierarchien untersucht werden. Es wird sich sogleich herausstellen, daß diese Unterraumbündel eine kleine nichtlineare Störung tatsächlich überstehen — und der Beweis dieser Aussage beruht einfach auf einer mehrfachen Anwendung von Satz 1.3.1.

**Lemma 1.4.2** *Gegeben sei eine zufällige Differenzgleichung der Form*

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k)} \quad (1.37)$$

die den zu Beginn dieses Abschnittes aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) genügt, mit  $0 \leq L < \frac{\delta}{2Kp}$ . Dann gibt es zwei Hierarchien

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\leq 1}(\omega) &\subset \mathcal{S}^{\leq 2}(\omega) \subset \dots \subset \mathcal{S}^{\leq p-1}(\omega), \\ \mathcal{S}^{> 1}(\omega) &\supset \mathcal{S}^{> 2}(\omega) \supset \dots \supset \mathcal{S}^{> p-1}(\omega) \end{aligned}$$

von zufälligen invarianten Faserbündeln für (1.37). Diese Faserbündel sind von der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\leq i}(\omega) &= \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : x^{>i} = s^{\leq i}(k, \omega, x^{\leq i})\}, \\ \mathcal{S}^{> i}(\omega) &= \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : x^{\leq i} = s^{> i}(k, \omega, x^{>i})\}, \end{aligned}$$

mit meßbaren Abbildungen

$$\begin{aligned} s^{\leq i} &: \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i} \rightarrow \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}, \\ s^{> i} &: \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i}. \end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt für alle  $i = 1, \dots, p-1$ :

(a) Die zufälligen invarianten Faserbündel  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  und  $\mathcal{S}^{> i}(\omega)$  lassen sich folgendermaßen dynamisch charakterisieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\leq i}(\omega) &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\} = \\ &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^- \text{- und } \gamma_1^+ \text{-quasibeschränkt bez. } \omega\}, \\ \mathcal{S}^{> i}(\omega) &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\} = \\ &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^+ \text{- und } \gamma_2^- \text{-quasibeschränkt bez. } \omega\}, \end{aligned}$$

für jede Wahl von  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ ,  $\gamma_1 \geq \alpha_{1,-} + \delta$  und  $0 < \gamma_2 \leq \alpha_{p,+} - \delta$ .

(b) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi, \bar{\xi} \in \mathbb{R}^d$  gilt

$$s^{\leq i}(\kappa, \omega, 0) = 0 \quad \text{und} \quad s^{> i}(\kappa, \omega, 0) = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} \|s^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i}) - s^{\leq i}(\kappa, \omega, \bar{\xi}^{\leq i})\|_{\kappa, \omega} &\leq \frac{K^2 L p (\delta - K L p)}{\delta (\delta - 2 K L p)} \|\xi^{\leq i} - \bar{\xi}^{\leq i}\|_{\kappa, \omega}, \\ \|s^{> i}(\kappa, \omega, \xi^{> i}) - s^{> i}(\kappa, \omega, \bar{\xi}^{> i})\|_{\kappa, \omega} &\leq \frac{K^2 L p (\delta - K L p)}{\delta (\delta - 2 K L p)} \|\xi^{> i} - \bar{\xi}^{> i}\|_{\kappa, \omega}. \end{aligned}$$

(c) Jede Periodizität von  $A$ ,  $F$  und  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  bezüglich  $k$  überträgt sich auf die Abbildungen  $s^{\leq i}$  und  $s^{> i}$ . (Vergleiche Satz 1.3.1(a), (iii).)

**Beweis:** Um die obigen Aussagen zu beweisen, muß nur Satz 1.3.1 in geeigneter Weise angewandt werden. Sei dazu  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  beliebig, aber fest. Zerlegt man dann jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  in der Form  $x = (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-}$  mit

$$\mathbb{R}^{d^+} := \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^{d^-} := \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p},$$

und setzt  $\|x^+\|_{k, \omega} := \|x^{\leq i}\|_{k, \omega}$ , beziehungsweise  $\|x^-\|_{k, \omega} := \|x^{> i}\|_{k, \omega}$  (man vergleiche dazu auch Bemerkung 1.4.1), dann erhält man für

$$A^+(k, \omega) := \text{diag}(A_1(k, \omega), \dots, A_i(k, \omega)) \quad \text{und} \quad A^-(k, \omega) := \text{diag}(A_{i+1}(k, \omega), \dots, A_p(k, \omega))$$

leicht

$$\begin{aligned} \Phi^+(m, n, \omega)x^+ &= (\Phi_1(m, n, \omega)x^1, \dots, \Phi_i(m, n, \omega)x^i), \\ \Phi^-(m, n, \omega)x^- &= (\Phi_{i+1}(m, n, \omega)x^{i+1}, \dots, \Phi_p(m, n, \omega)x^p), \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq K \alpha_{i,+}^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n, \\ \|\Phi^-(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq K \alpha_{i+1,-}^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n. \end{aligned}$$

Ferner gelten mit  $F^+ := (F_1, \dots, F_i)$  beziehungsweise  $F^- := (F_{i+1}, \dots, F_p)$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|F^+(k, \omega, x) - F^+(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} &\leq iL \|x - \bar{x}\|_{k, \omega} \leq pL \|x - \bar{x}\|_{k, \omega}, \\ \|F^-(k, \omega, x) - F^-(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} &\leq (p-i)L \|x - \bar{x}\|_{k, \omega} \leq pL \|x - \bar{x}\|_{k, \omega}. \end{aligned}$$

Nun läßt sich Satz 1.3.1 direkt anwenden und liefert alle Aussagen bezüglich  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  und  $\mathcal{S}^{> i}(\omega)$  — mit Ausnahme der alternativen dynamischen Charakterisierungen in (a). Diese folgen aber leicht aus Lemma 1.2.6 beziehungsweise Lemma 1.2.4, wenn man die Ungleichungen

$$\|F(k, \omega, x) - F(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} \leq pL \|x - \bar{x}\|_{k, \omega},$$

sowie  $\gamma_1 \geq \alpha_{1,-} + \delta > \alpha_{1,-} + KpL$  und  $0 < \gamma_2 \leq \alpha_{p,+} - \delta < \alpha_{p,+} - KpL$  beachtet. Damit ist das Lemma bereits bewiesen.  $\diamond$

**Bemerkung 1.4.3** Hängt die Nichtlinearität  $F$  in Gleichung (1.37) noch von einem Parameter  $p \in P$  ab, und zwar mit Voraussetzungen wie in Satz 1.3.1, so kann man leicht zeigen, daß auch die (nun parameterabhängigen) Abbildungen  $s^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i}, p)$  und  $s^{> i}(\kappa, \omega, \xi^{> i}, p)$  meßbar sind, sowie stetig bezüglich der letzten beiden Variablen. In dieser Form wird Lemma 1.4.2 im nächsten Abschnitt benötigt.  $\square$

Wie das obige Lemma zeigt, gibt es zu den zufälligen invarianten Unterraumbündeln  $\mathcal{U}^{\leq i}(\omega)$  und  $\mathcal{U}^{> i}(\omega)$  also in der Tat entsprechende nichtlineare Analoga. Der nächste Satz erweitert dieses Ergebnis, indem er auch zu den zentralen Unterraumbündeln  $\mathcal{U}^{i,j}(\omega)$  nichtlineare Analoga liefert.

**Satz 1.4.4** Gegeben sei wieder eine zufällige Differenzgleichung der Form

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k)} \quad (1.38)$$

die den zu Beginn dieses Abschnittes aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) genügt, mit  $0 \leq L < \frac{\delta}{2K^2p}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4})$ . Dann gibt es zu jeder Wahl von  $1 \leq i \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$  eine meßbare Abbildung

$$s^{i,j} : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_{i-1}} \times \mathbb{R}^{d_{j+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p},$$

so daß die Menge

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) := \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : (x^{< i}, x^{> j}) = s^{i,j}(k, \omega, x^{i \leq j})\}$$

ein zufälliges invariantes Faserbündel für (1.38) ist. Für  $1 \leq i < p$  gelten die dynamischen Charakterisierungen

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{1,i}(\omega) &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\} = \\ &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^- \text{- und } \gamma_1^+ \text{-quasibeschränkt bez. } \omega\}, \\ \mathcal{S}^{i+1,p}(\omega) &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\} = \\ &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^+ \text{- und } \gamma_2^- \text{-quasibeschränkt bez. } \omega\}, \end{aligned}$$

für beliebige  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ ,  $\gamma_1 \geq \alpha_{1,-} + \delta$  und  $0 < \gamma_2 \leq \alpha_{p,+} - \delta$ . Des weiteren erhält man für  $1 < i \leq j < p$  die dynamische Charakterisierung

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma_1^+ \text{- und } \gamma_2^- \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\},$$

für jede beliebige Wahl von  $\gamma_1 \in [\alpha_{i,-} + \delta, \alpha_{i-1,+} - \delta]$  und  $\gamma_2 \in [\alpha_{j+1,-} + \delta, \alpha_{j,+} - \delta]$ . Schließlich gilt die Identität  $s^{i,j}(\kappa, \omega, 0) = 0$ , die Abbildung  $s^{i,j}(\kappa, \omega, \cdot)$  ist global Lipschitz-stetig bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{\kappa, \omega}$  mit der Lipschitzkonstanten

$$\frac{2C(L)}{1 - C(L)} \quad \text{wobei} \quad C(L) = C(L, K, \delta, p) = \frac{K^2 L p (\delta - K L p)}{\delta (\delta - 2 K L p)},$$

für alle  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$ , und eventuelle Periodizitätseigenschaften von  $A$ ,  $F$  und  $\|\cdot\|_{\kappa, \omega}$  bezüglich  $k$  übertragen sich auf die Abbildungen  $s^{i,j}$ .

**Beweis:** Zunächst kann man leicht nachrechnen, daß die verschärfte Bedingung an  $L$  gerade so gewählt wurde, daß die Ungleichung

$$C(L) = \frac{K^2 L p (\delta - K L p)}{\delta (\delta - 2 K L p)} < 1 \quad (1.39)$$

erfüllt ist. Die Aussagen bezüglich der zufälligen invarianten Faserbündel  $\mathcal{S}^{1,i}(\omega)$  und  $\mathcal{S}^{i+1,p}(\omega)$ , für  $i = 1, \dots, p-1$ , folgen unmittelbar aus Lemma 1.4.2, denn es gilt offensichtlich

$$\mathcal{S}^{1,i}(\omega) = \mathcal{S}^{\leq i}(\omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{S}^{i+1,p}(\omega) = \mathcal{S}^{> i}(\omega),$$

sowie  $C(L) \leq \frac{2C(L)}{1-C(L)}$ .

Was die restlichen Faserbündel  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  angeht, so deutet die im Satz angegebene dynamische Charakterisierung bereits darauf hin, daß sie gerade die Durchschnitte je zweier Hierarchiefaserbündel sind. Die ausführliche Konstruktion von  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  verwendet Lemma A.1.1.

Seien dazu  $1 < i \leq j < p$  beliebig, aber fest gewählt. Um den Schreibaufwand in Grenzen zu halten, sei

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &:= \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_{i-1}}, \\ \mathcal{X}_2 &:= \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j}, \\ \mathcal{X}_3 &:= \mathbb{R}^{d_{j+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Gemäß Lemma 1.4.2 werden die beiden Hierarchiefaserbündel  $\mathcal{S}^{\leq j}(\omega)$  und  $\mathcal{S}^{> i-1}(\omega)$  von meßbaren Abbildungen  $s^{\leq j}$  und  $s^{> i-1}$  erzeugt, und unter Verwendung der soeben eingeführten Abkürzungen gelten für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi_1, \bar{\xi}_1 \in \mathcal{X}_1$ ,  $\xi_2, \bar{\xi}_2 \in \mathcal{X}_2$  und  $\xi_3, \bar{\xi}_3 \in \mathcal{X}_3$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|s^{\leq j}(\kappa, \omega, \xi_1, \xi_2) - s^{\leq j}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)\|_{\kappa, \omega} &\leq C(L) \|\xi_1 - \bar{\xi}_1\|_{\kappa, \omega} + C(L) \|\xi_2 - \bar{\xi}_2\|_{\kappa, \omega}, \\ \|s^{> i-1}(\kappa, \omega, \xi_2, \xi_3) - s^{> i-1}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)\|_{\kappa, \omega} &\leq C(L) \|\xi_2 - \bar{\xi}_2\|_{\kappa, \omega} + C(L) \|\xi_3 - \bar{\xi}_3\|_{\kappa, \omega}, \end{aligned}$$

wobei die Normen  $\|\cdot\|_{\kappa, \omega}$  auf den Räumen  $\mathcal{X}_1$ ,  $\mathcal{X}_2$  und  $\mathcal{X}_3$  natürlich wie in Bemerkung 1.4.1 definiert werden. Definiert man nun die Abbildungsfamilie

$$T_{\kappa, \omega, \xi_2} : \begin{cases} \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3 & \rightarrow & \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3 \\ (\xi_1, \xi_3) & \mapsto & (s^{> i-1}(\kappa, \omega, \xi_2, \xi_3), s^{\leq j}(\kappa, \omega, \xi_1, \xi_2)) \end{cases},$$

so ist die Abbildung  $T_{\cdot, \cdot, (\cdot, \cdot)}$  zunächst meßbar. Des weiteren gilt für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi_2 \in \mathcal{X}_2$ ,  $\xi_1, \bar{\xi}_1 \in \mathcal{X}_1$  und  $\xi_3, \bar{\xi}_3 \in \mathcal{X}_3$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|T_{\kappa, \omega, \xi_2}(\xi_1, \xi_3) - T_{\kappa, \omega, \xi_2}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_3)\|_{\kappa, \omega} &= \|s^{> i-1}(\kappa, \omega, \xi_2, \xi_3) - s^{> i-1}(\kappa, \omega, \xi_2, \bar{\xi}_3)\|_{\kappa, \omega} + \\ &\quad + \|s^{\leq j}(\kappa, \omega, \xi_1, \xi_2) - s^{\leq j}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_1, \xi_2)\|_{\kappa, \omega} \leq \\ &\leq C(L) \|\xi_1 - \bar{\xi}_1\|_{\kappa, \omega} + C(L) \|\xi_3 - \bar{\xi}_3\|_{\kappa, \omega} = \\ &= C(L) \|(\xi_1, \xi_3) - (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_3)\|_{\kappa, \omega}, \end{aligned}$$

d.h.  $T_{\kappa, \omega, \xi_2}$  ist wegen (1.39) eine Kontraktion auf  $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3$ , bezüglich der Norm  $\|(\xi_1, \xi_3)\|_{\kappa, \omega} = \|\xi_1\|_{\kappa, \omega} + \|\xi_3\|_{\kappa, \omega}$ . Bezeichnet nun  $s^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2)$  den eindeutig bestimmten Fixpunkt von  $T_{\kappa, \omega, \xi_2}$ , so

ist die Abbildung  $s^{i,j}$  gemäß Lemma A.1.1 meßbar. Da außerdem ein Punkt  $(\xi_1, \xi_3)$  offensichtlich genau dann Fixpunkt von  $T_{\kappa, \omega, \xi_2}$  ist, wenn die Beziehung

$$(\kappa, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathcal{S}^{\leq j}(\omega) \cap \mathcal{S}^{> i-1}(\omega)$$

gilt, ist die in der Formulierung des Satzes angegebene Menge  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  tatsächlich ein zufälliges invariantes Faserbündel, das die triviale Lösung enthält, sich in der gewünschten Weise dynamisch charakterisieren läßt, und eventuelle Periodizitätseigenschaften von  $A$ ,  $F$  und  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  bezüglich  $k$  übernimmt.

Zum vollständigen Beweis des Satzes fehlt nun nur noch der Nachweis der globalen Lipschitzbedingung. Seien dazu  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  beliebig, aber fest. Ferner sei  $s^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2) =: (s_1^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2), s_3^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2)) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3$ . Da der Punkt

$$(\kappa, s_1^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2), \xi_2, s_3^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2))$$

für jedes  $\xi_2 \in \mathcal{X}_2$  gemäß obiger Konstruktion sowohl in  $\mathcal{S}^{\leq j}(\omega)$ , als auch in  $\mathcal{S}^{> i-1}(\omega)$  liegt, erhält man mit Lemma 1.4.2(b) für beliebige  $\xi_2, \bar{\xi}_2 \in \mathcal{X}_2$  die beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned} & \|s_3^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2) - s_3^{i,j}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_2)\|_{\kappa, \omega} = \\ & = \|s^{\leq j}(\kappa, \omega, s_1^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2), \xi_2) - s^{\leq j}(\kappa, \omega, s_1^{i,j}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_2), \bar{\xi}_2)\|_{\kappa, \omega} \leq \\ & \leq C(L) \|s_1^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2) - s_1^{i,j}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_2)\|_{\kappa, \omega} + C(L) \|\xi_2 - \bar{\xi}_2\|_{\kappa, \omega}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \|s_1^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2) - s_1^{i,j}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_2)\|_{\kappa, \omega} = \\ & = \|s^{> i-1}(\kappa, \omega, \xi_2, s_3^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2)) - s^{> i-1}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_2, s_3^{i,j}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_2))\|_{\kappa, \omega} \leq \\ & \leq C(L) \|s_3^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2) - s_3^{i,j}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_2)\|_{\kappa, \omega} + C(L) \|\xi_2 - \bar{\xi}_2\|_{\kappa, \omega}, \end{aligned}$$

und die Addition dieser Ungleichungen liefert sofort

$$\|s^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2) - s^{i,j}(\kappa, \omega, \bar{\xi}_2)\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{2C(L)}{1 - C(L)} \|\xi_2 - \bar{\xi}_2\|_{\kappa, \omega}.$$

Damit ist alles gezeigt.  $\diamond$

**Bemerkung 1.4.5** Im Hinblick auf spätere Anwendungen soll in dieser Bemerkung eine abkürzende Notation eingeführt werden. Für beliebige  $1 \leq i \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j}$  sei

$$(\kappa, \pi^{i,j}(\kappa, \omega, \xi)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d$$

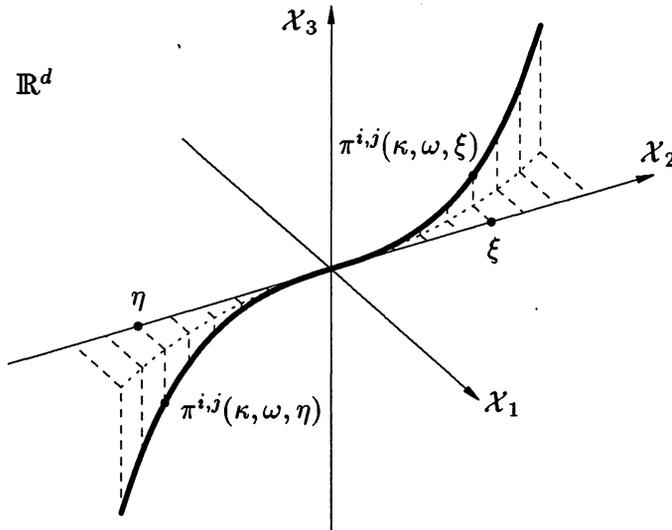
der durch  $\kappa$  und  $\xi$  eindeutig bestimmte Punkt in  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  (vergleiche Abbildung 1.5). Genauer gilt also unter Verwendung von (1.40):

$$\pi^{i,j}(\kappa, \omega, \xi) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3,$$

mit  $\xi_2 := \xi$  und  $(\xi_1, \xi_3) := s^{i,j}(\kappa, \omega, \xi_2)$ . Damit läßt sich dann das zufällige invariante Faserbündel  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  auch in der Form

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \{(\kappa, \pi^{i,j}(\kappa, \omega, \xi)) : \kappa \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j}\}$$

schreiben.  $\square$

Abbildung 1.5: Die Abbildung  $\pi^{i,j}$  in der Faser  $k = \kappa$ 

Mit dem soeben bewiesenen Satz 1.4.4 konnte ein Teil der eingangs gestellten Frage positiv beantwortet werden: Die insgesamt  $\frac{(p-1)(p+2)}{2}$  Hierarchie- beziehungsweise zentralen Unterraumbündel überleben eine kleine nichtlineare Störung tatsächlich als zufällige invariante Faserbündel. Was aber ist mit den übrigen  $2^p - 2 - \frac{(p-1)(p+2)}{2}$  nichttrivialen Unterraumbündeln? In Abschnitt 1.6 wird gezeigt werden, daß auch sie die Störung überstehen — allerdings in etwas anderer Form (vergleiche Bemerkung 1.6.4). Die einzelnen Fasern sind dann nämlich nur das homöomorphe Bild eines linearen Unterraumes des  $\mathbb{R}^d$ . Daß sie im allgemeinen in der Tat nicht mehr die Graphen von global Lipschitz-stetigen Abbildungen sind, soll jedoch in dieser Arbeit nicht gezeigt werden. Für den Fall einer deterministischen, autonomen Differentialgleichung findet man ein Gegenbeispiel in AULBACH [10]<sup>12</sup>.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll nun noch — in Anlehnung an Korollar 1.3.2 — das asymptotische Verhalten der in dem zufälligen invarianten Faserbündel  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  enthaltenen Lösungen genauer untersucht werden.

**Korollar 1.4.6** Gegeben sei wieder eine zufällige Differenzengleichung der Form

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k)} \quad (1.41)$$

die den zu Beginn dieses Abschnittes aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) genügt, mit  $0 \leq L < \frac{\delta}{2K^2p}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4})$ . Dann gilt für beliebige  $1 \leq i \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$  und beliebige  $\omega \in \Omega$ : Ist  $\mu$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.41), die in dem invarianten Faserbündel  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  enthalten ist, so gelten für jedes  $\gamma \geq \alpha_{i,-} + \delta$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|\mu(k)\|_{k,\omega} &\leq \frac{K(\delta - K L p)}{\delta - 2K L p} \gamma^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} \quad \text{für alle } k \geq \kappa, \\ \|\mu(k)\|_{k,\omega} &\geq \frac{\delta - 2K L p}{K(\delta - K L p)} \gamma^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} \quad \text{für alle } k \leq \kappa, \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Durch Übergang zur Zeit-1-Abbildung ist damit natürlich auch der Fall einer deterministischen, autonomen Differenzengleichung erfaßt.

und für jedes  $0 < \gamma \leq \alpha_{j,+} - \delta$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|\mu(k)\|_{k,\omega} &\leq \frac{K(\delta - K L p)}{\delta - 2K L p} \gamma^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} \quad \text{für alle } k \leq \kappa, \\ \|\mu(k)\|_{k,\omega} &\geq \frac{\delta - 2K L p}{K(\delta - K L p)} \gamma^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\|_{\kappa,\omega} \quad \text{für alle } k \geq \kappa. \end{aligned}$$

**Beweis:** Beachtet man die für beliebige  $1 < i \leq j < p$  gültige Identität

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \mathcal{S}^{>i-1}(\omega) \cap \mathcal{S}^{\leq j}(\omega),$$

so erkennt man unmittelbar, daß die behaupteten Ungleichungen nur für die Hierarchiefaserbündel  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  und  $\mathcal{S}^{>i}(\omega)$ ,  $i = 1, \dots, p-1$ , bewiesen werden müssen. Dies kann jedoch — unter Beachtung des Beweises von Lemma 1.4.2 — wie im Beweis von Korollar 1.3.2 getan werden.  $\diamond$

## 1.5 Asymptotische Phasen

In den vergangenen beiden Abschnitten stand die Konstruktion nichtlinearer Analoga gewisser zufälliger invarianter Mengen der ungestörten linearen Gleichung

$$x_{k+1} = A(k, \omega)x_k$$

im Mittelpunkt. Dabei konnten auch genaue Aussagen über das asymptotische Verhalten jener Lösungen, die in diesen zufälligen invarianten Faserbündeln verlaufen, hergeleitet werden. Was läßt sich aber über die restlichen Lösungen der nichtlinearen Gleichung

$$x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k) \quad (1.42)$$

aussagen? Diese Frage soll im folgenden angegangen werden.

Zunächst wird bewiesen, daß man zu einer beliebig vorgegebenen  $\omega$ -Lösung  $\mu$  von (1.42) zufällige invariante Faserbündel konstruieren kann, die gerade diese Lösung gemeinsam haben — in völliger Analogie zum Fall der trivialen Lösung  $\mu = 0$ , der Gegenstand der letzten beiden Abschnitte war. (Vergleiche Abbildung 1.6.)

**Lemma 1.5.1** Gegeben sei eine zufällige Differenzgleichung der Form

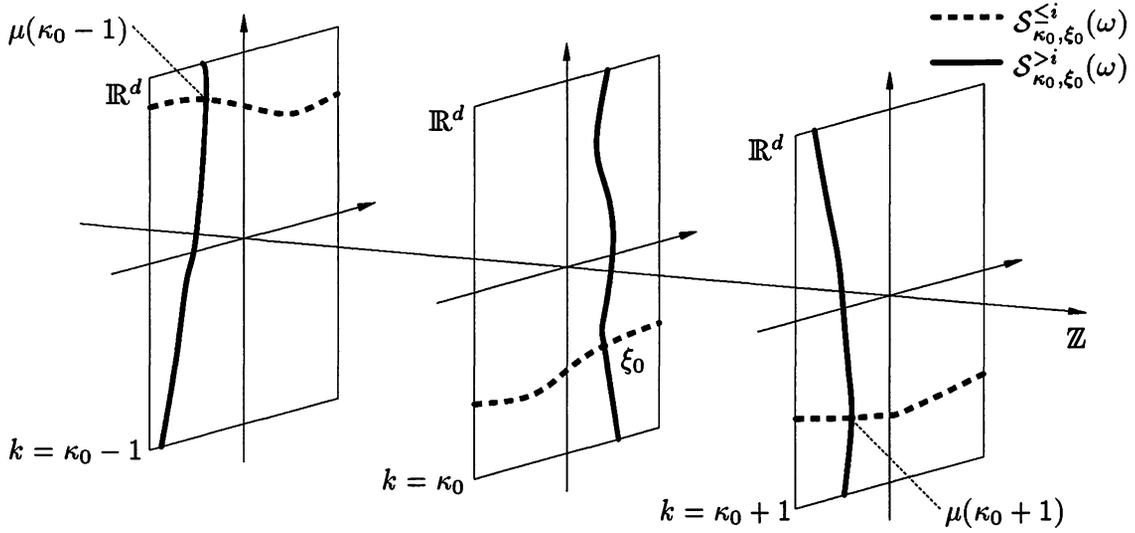
$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k)} \quad (1.43)$$

die den zu Beginn des letzten Abschnittes aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) genügt, mit  $0 \leq L < \frac{\delta}{2Kp}$ . Dann gibt es zu beliebigem  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  eine Familie von Abbildungen

$$\begin{aligned} s_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i} &: \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i} \rightarrow \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}, \\ s_{\kappa_0, \xi_0}^{> i} &: \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i}, \end{aligned}$$

mit  $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$  und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ , so daß die Abbildungen  $s_{\cdot, \cdot}^{\leq i}(\cdot, \cdot, \cdot)$  und  $s_{\cdot, \cdot}^{> i}(\cdot, \cdot, \cdot)$  meßbar und für beliebige  $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$  und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$  die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega) &:= \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : x^{>i} = s_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(k, \omega, x^{\leq i})\}, \\ \mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{> i}(\omega) &:= \{(k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : x^{\leq i} = s_{\kappa_0, \xi_0}^{> i}(k, \omega, x^{>i})\} \end{aligned}$$



Abbildungung 1.6: Zufällige invariante Faserbündel durch die Lösung  $\mu = \lambda(\cdot; \kappa_0, \omega, \xi_0)$

zufällige invariante Faserbündel für (1.43) sind, die sogenannten Hierarchiefaserbündel durch  $(\kappa_0, \xi_0)$  beziehungsweise durch die Lösung  $\lambda(\cdot; \kappa_0, \omega, \xi_0)$ . Diese Faserbündel lassen sich mittels

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega) &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \omega, \xi_0) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt bez. } \omega\}, \\ \mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{> i}(\omega) &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \omega, \xi_0) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt bez. } \omega\}, \end{aligned}$$

mit beliebigem  $\gamma \in [\alpha_{i+1, -} + \delta, \alpha_{i, +} - \delta]$ , dynamisch charakterisieren. Schließlich sind die Abbildungen  $s_{\cdot, \cdot}^{\leq i}(\cdot, \omega, \cdot)$  und  $s_{\cdot, \cdot}^{> i}(\cdot, \omega, \cdot)$  für alle  $\omega \in \Omega$  stetig, und für beliebige  $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi, \bar{\xi}, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$  gilt:

$$\begin{aligned} \|s_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i}) - s_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\kappa, \omega, \bar{\xi}^{\leq i})\|_{\kappa, \omega} &\leq \frac{K^2 L p (\delta - K L p)}{\delta (\delta - 2 K L p)} \|\xi^{\leq i} - \bar{\xi}^{\leq i}\|_{\kappa, \omega}, \\ \|s_{\kappa_0, \xi_0}^{> i}(\kappa, \omega, \xi^{> i}) - s_{\kappa_0, \xi_0}^{> i}(\kappa, \omega, \bar{\xi}^{> i})\|_{\kappa, \omega} &\leq \frac{K^2 L p (\delta - K L p)}{\delta (\delta - 2 K L p)} \|\xi^{> i} - \bar{\xi}^{> i}\|_{\kappa, \omega}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Sei  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  beliebig, aber fest gewählt. Aus Symmetriegründen sollen nur die Aussagen bezüglich  $\mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega)$  bewiesen werden. Dazu betrachtet man die zufällige Differenzengleichung

$$x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + \tilde{F}(k, \omega, x_k, \kappa_0, \xi_0), \quad (1.44)$$

mit

$$\tilde{F}(k, \omega, x, \kappa_0, \xi_0) := F(k, \omega, x + \lambda(k; \kappa_0, \omega, \xi_0)) - F(k, \omega, \lambda(k; \kappa_0, \omega, \xi_0)),$$

die von dem Parameter  $(\kappa_0, \xi_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d$  stetig abhängt. Es läßt sich leicht verifizieren, daß diese zufällige Differenzengleichung der gestörten Bewegung (vergleiche Satz 2.1.1 in [41]) alle Voraussetzungen von Lemma 1.4.2 erfüllt. Sei  $s^{\leq i}$  die von diesem Lemma garantierte, jetzt aber parameterabhängige, Abbildung. Definiert man dann

$$s_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i}) := s^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i} - \lambda_{\leq i}(\kappa; \kappa_0, \omega, \xi_0), \kappa_0, \xi_0) + \lambda_{> i}(\kappa; \kappa_0, \omega, \xi_0),$$

so ist  $s_{\cdot, \cdot}^{\leq i}(\cdot, \cdot, \cdot)$  offensichtlich meßbar,  $s_{\cdot, \cdot}^{\leq i}(\cdot, \omega, \cdot)$  ist für beliebige  $\omega \in \Omega$  stetig<sup>13</sup>, und  $s_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\kappa, \omega, \cdot)$  genügt der gewünschten globalen Lipschitzbedingung.

Zum Beweis der dynamischen Charakterisierung sei zunächst  $(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d$  so gewählt, daß die Differenz

$$\nu(\cdot) := \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \omega, \xi_0)$$

$\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, für ein beliebiges, aber festes  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ . Da  $\nu$  eine  $\omega, \kappa_0, \xi_0$ -Lösung von (1.44) ist, erhält man sofort

$$\nu_{>i}(\kappa) = s_{\kappa, \omega}^{\leq i}(\kappa, \omega, \nu_{\leq i}(\kappa), \kappa_0, \xi_0),$$

und weiter

$$\begin{aligned} \xi^{>i} &= \nu_{>i}(\kappa) + \lambda_{>i}(\kappa; \kappa_0, \omega, \xi_0) = \\ &= s_{\kappa, \omega}^{\leq i}(\kappa, \omega, \nu_{\leq i}(\kappa), \kappa_0, \xi_0) + \lambda_{>i}(\kappa; \kappa_0, \omega, \xi_0) = \\ &= s_{\kappa, \omega}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i} - \lambda_{\leq i}(\kappa; \kappa_0, \omega, \xi_0), \kappa_0, \xi_0) + \lambda_{>i}(\kappa; \kappa_0, \omega, \xi_0) = \\ &= s_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i}), \end{aligned}$$

d.h.  $(\kappa, \xi) \in \mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega)$ . Sei nun umgekehrt  $(\kappa, \xi) \in \mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega)$  beliebig. Dann ist die oben definierte Abbildung  $\nu$  wieder eine  $\omega, \kappa_0, \xi_0$ -Lösung von (1.44), und unter Verwendung von

$$\xi^{>i} = s_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i})$$

erhält man unmittelbar die Identität

$$\begin{aligned} \nu_{>i}(\kappa) &= \xi^{>i} - \lambda_{>i}(\kappa; \kappa_0, \omega, \xi_0) = \\ &= s_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i}) - \lambda_{>i}(\kappa; \kappa_0, \omega, \xi_0) = \\ &= s_{\kappa, \omega}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i} - \lambda_{\leq i}(\kappa; \kappa_0, \omega, \xi_0), \kappa_0, \xi_0) = \\ &= s_{\kappa, \omega}^{\leq i}(\kappa, \omega, \nu_{\leq i}(\kappa), \kappa_0, \xi_0), \end{aligned}$$

d.h.  $\nu(\cdot) = \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \omega, \xi_0)$  ist  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ .

Zum Beweis der noch fehlenden Invarianz von  $\mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega)$  seien  $(\kappa, \xi) \in \mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega)$  und  $k \in \mathbb{Z}$  beliebig. Dann ist wegen der eben bewiesenen dynamischen Charakterisierung die Differenz

$$\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \omega, \xi_0)$$

$\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , für ein beliebiges, aber festes  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ . Mit (1.5) folgt nun leicht die Identität

$$\lambda(\cdot; k, \omega, \lambda(k; \kappa, \omega, \xi)) = \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi),$$

d.h. auch die Differenz

$$\lambda(\cdot; k, \omega, \lambda(k; \kappa, \omega, \xi)) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \omega, \xi_0)$$

ist  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ . Eine nochmalige Anwendung der dynamischen Charakterisierung liefert jetzt sofort

$$(k, \lambda(k; \kappa, \omega, \xi)) \in \mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega).$$

Damit ist alles bewiesen. ◇

<sup>13</sup>Man beachte dazu Bemerkung 1.4.3 — zusammen mit der Tatsache, daß die Lipschitzbedingung für  $\tilde{F}$  gleichmäßig bezüglich  $(\kappa_0, \xi_0)$  gilt.

**Bemerkung 1.5.2** Wie der obige Beweis zeigt, ist es unter der verschärften Bedingung an  $L$ , die in Satz 1.4.4 enthalten ist, auch möglich, zufällige invariante zentrale Faserbündel durch eine beliebig vorgegebene Lösung zu konstruieren. Da diese Faserbündel im folgenden jedoch von keinem Nutzen sein werden, wurde in Lemma 1.5.1 nur das Ergebnis bezüglich der Hierarchie-faserbündel angegeben.  $\square$

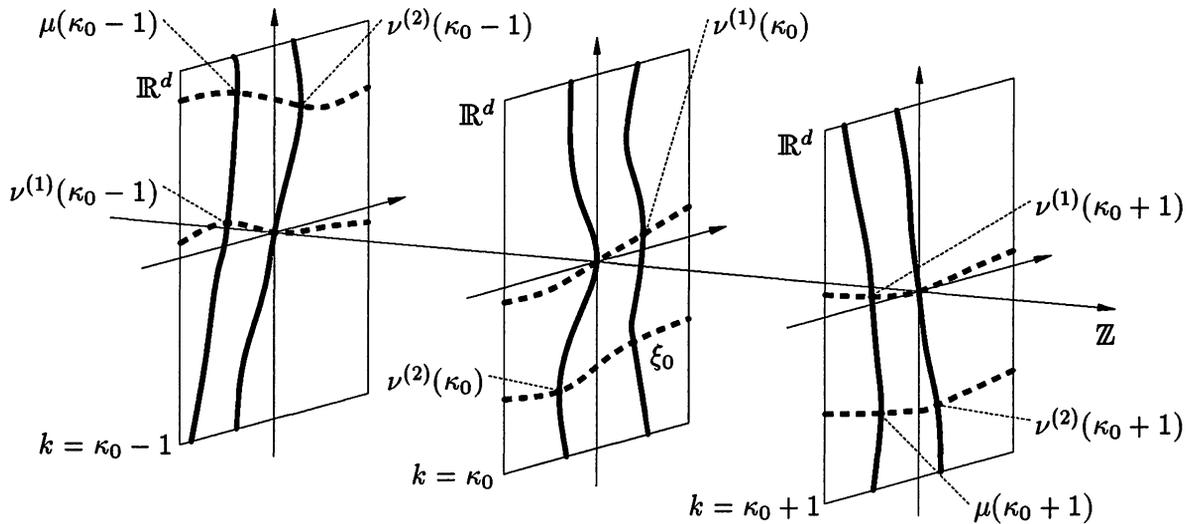


Abbildung 1.7: Die Phasenabbildungen

Wie kann man nun mittels Lemma 1.5.1 genauere Aussagen über das asymptotische Verhalten von beliebigen Lösungen der nichtlinear gestörten Gleichung erhalten? Betrachtet man dazu Abbildung 1.7, so springt einem die Antwort förmlich ins Auge. Die geometrische Veranschaulichung deutet nämlich an, daß man jeder  $\omega$ -Lösung  $\mu$  genau zwei  $\omega$ -Lösungen  $\nu^{(1)}$  und  $\nu^{(2)}$  eindeutig zuordnen kann, so daß  $\nu^{(1)}$  (beziehungsweise  $\nu^{(2)}$ ) in  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  (beziehungsweise in  $\mathcal{S}^{> i}(\omega)$ ) verläuft, und die Differenz

$$\mu - \nu^{(1)} \quad (\text{beziehungsweise } \mu - \nu^{(2)})$$

$\gamma^+$ -quasibeschränkt (beziehungsweise  $\gamma^-$ -quasibeschränkt) bezüglich  $\omega$  ist, für jede Wahl von  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ . Ist dabei speziell  $\gamma < 1$  wählbar, so gibt es also genau eine  $\omega$ -Lösung auf dem zufälligen invarianten Faserbündel  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$ , gegen die  $\mu$  für  $k \rightarrow \infty$  "exponentiell konvergiert"<sup>14</sup>, mit der exponentiellen Konvergenzrate  $\gamma$ .

Es ist die Aufgabe des nächsten Satzes, diese Aussagen exakt zu formulieren und zu beweisen. Dabei kann man die Beweisidee sofort der Abbildung 1.7 entnehmen: Man schneidet einfach das Faserbündel  $\mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega)$  mit dem Faserbündel  $\mathcal{S}^{> i}(\omega)$ , beziehungsweise  $\mathcal{S}_{\kappa_0, \xi_0}^{> i}(\omega)$  mit  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$ .

**Satz 1.5.3** Gegeben sei wieder eine zufällige Differenzgleichung der Form

$$x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k) \quad (1.45)$$

<sup>14</sup>Die "exponentielle Konvergenz" ist dabei natürlich bezüglich der zeitabhängigen Normen  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  zu verstehen, d.h. es wäre durchaus vorstellbar, daß der euklidische Abstand der betrachteten Lösungen für  $k \rightarrow \infty$  unbeschränkt ist! Es wird sich jedoch im dritten Kapitel zeigen, daß dieser Fall bei der Anwendung der Ergebnisse des vorliegenden Kapitels auf zufällige dynamische Systeme nicht eintritt. Man vergleiche dazu Lemma 3.1.8.

die den zu Beginn des letzten Abschnittes aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) genügt, diesmal allerdings mit der verschärften Bedingung  $0 \leq L < \frac{\delta}{2K^2p}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4})$ . Dann gilt für jedes beliebige  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ :

- (a) Zu jeder Wahl von  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gibt es genau einen Punkt  $P^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi) \in \mathbb{R}^d$ , so daß die Differenz

$$\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \kappa, \omega, P^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi))$$

$\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, für beliebige  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ , und die Inklusion

$$(\kappa, P^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi)) \in \mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$$

gilt. Die so konstruierte Abbildung  $P^{\leq i} : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist meßbar, stetig bezüglich der letzten Variablen und besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gilt die Abschätzung

$$\|P^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{1}{1 - C(L)} \|\xi\|_{\kappa, \omega},$$

mit  $C(L) = C(L, K, \delta, p) = \frac{K^2 L p (\delta - K L p)}{\delta (\delta - 2 K L p)} < 1$ . (Vergleiche Satz 1.4.4.)

- (ii) Ist  $\mu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.45), so ist  $P^{\leq i}(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  ebenfalls eine  $\omega$ -Lösung von (1.45), die aber in  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  verläuft.
- (iii) Sind die Abbildungen  $A$  und  $F$ , sowie die Normen  $\|\cdot\|_{\kappa, \omega}$  für ein  $\omega \in \Omega$  periodisch in  $k$  mit Periode  $\Theta \in \mathbb{N}$ , so gilt dies auch für die Abbildung  $P^{\leq i}$ .

- (b) Zu jeder Wahl von  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gibt es genau einen Punkt  $P^{> i}(\kappa, \omega, \xi) \in \mathbb{R}^d$ , so daß die Differenz

$$\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \kappa, \omega, P^{> i}(\kappa, \omega, \xi))$$

$\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, für beliebige  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ , und die Inklusion

$$(\kappa, P^{> i}(\kappa, \omega, \xi)) \in \mathcal{S}^{> i}(\omega)$$

gilt. Die so konstruierte Abbildung  $P^{> i} : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist meßbar, stetig bezüglich der letzten Variablen und besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gilt die Abschätzung

$$\|P^{> i}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{1}{1 - C(L)} \|\xi\|_{\kappa, \omega}.$$

- (ii) Ist  $\mu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.45), so ist  $P^{> i}(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  ebenfalls eine  $\omega$ -Lösung von (1.45), die aber in  $\mathcal{S}^{> i}(\omega)$  verläuft.
- (iii) Sind die Abbildungen  $A$  und  $F$ , sowie die Normen  $\|\cdot\|_{\kappa, \omega}$  für ein  $\omega \in \Omega$  periodisch in  $k$  mit Periode  $\Theta \in \mathbb{N}$ , so gilt dies auch für die Abbildung  $P^{> i}$ .

**Beweis:** Aus Symmetriegründen wird wieder nur (a) bewiesen. Dazu definiert man, unter Verwendung der Abkürzung  $\mathcal{X} := \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i}$ , zunächst eine Abbildungsfamilie

$$T_{\kappa, \omega, \xi} : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow & \mathcal{X} \\ \eta & \mapsto & s_{\kappa, \xi}^{>i}(\kappa, \omega, s_{\kappa, \xi}^{\leq i}(\kappa, \omega, \eta)) \end{cases} ,$$

mit  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Offensichtlich ist  $T_{\cdot, \cdot, \cdot}(\cdot)$  meßbar und  $T_{\kappa, \omega, \cdot}(\cdot)$  stetig, für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$ . Mit Hilfe von Lemma 1.4.2(b) und Lemma 1.5.1 kann nun leicht die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|T_{\kappa, \omega, \xi}(\eta_1) - T_{\kappa, \omega, \xi}(\eta_2)\|_{\kappa, \omega} &\leq C(L) \|s_{\kappa, \xi}^{\leq i}(\kappa, \omega, \eta_1) - s_{\kappa, \xi}^{\leq i}(\kappa, \omega, \eta_2)\|_{\kappa, \omega} \leq \\ &\leq C(L)^2 \|\eta_1 - \eta_2\|_{\kappa, \omega} \end{aligned}$$

hergeleitet werden, für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  und  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{X}$ . Wegen der Gültigkeit von  $C(L) < 1$  (bekanntlich ist das gerade die Konsequenz der verschärften Bedingung an  $L$ ) ist die Abbildung  $T_{\kappa, \omega, \xi}$  eine Kontraktion auf  $\mathcal{X}$  — und besitzt somit einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\tilde{P}(\kappa, \omega, \xi) \in \mathcal{X}$ . Gemäß Lemma A.1.1 ist die Abbildung  $\tilde{P}$  meßbar, und das gleichmäßige Kontraktionsprinzip liefert sofort die Stetigkeit von  $\tilde{P}(\kappa, \omega, \cdot)$ , für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$ . Des weiteren ist ein Punkt  $\eta \in \mathcal{X}$  genau dann Fixpunkt von  $T_{\kappa, \omega, \xi}$ , wenn gilt:

$$\begin{aligned} \eta &= s_{\kappa, \xi}^{>i}(\kappa, \omega, s_{\kappa, \xi}^{\leq i}(\kappa, \omega, \eta)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\kappa, \eta, s_{\kappa, \xi}^{\leq i}(\kappa, \omega, \eta)) &\in \mathcal{S}_{\kappa, \xi}^{>i}(\omega) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\kappa, \pi^{1,i}(\kappa, \omega, \eta)) &\in \mathcal{S}_{\kappa, \xi}^{>i}(\omega) , \end{aligned}$$

mit der Abbildung  $\pi^{1,i}$  aus Bemerkung 1.4.5. Definiert man also

$$P^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi) := \pi^{1,i}(\kappa, \omega, \tilde{P}(\kappa, \omega, \xi)) ,$$

so ist  $P^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi)$  tatsächlich der eindeutig bestimmte Punkt im  $\mathbb{R}^d$  mit den in Satz 1.5.3(a) angegebenen Eigenschaften, die Abbildung  $P^{\leq i}$  ist meßbar, und natürlich auch stetig bezüglich der letzten Variablen.

**Beweis von (i):** Seien  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  beliebig, aber fest. Dann folgt aus

$$\begin{aligned} \|T_{\kappa, \omega, \xi}(0)\|_{\kappa, \omega} &= \|s_{\kappa, \xi}^{>i}(\kappa, \omega, \underbrace{s_{\kappa, \xi}^{\leq i}(\kappa, \omega, 0)}_{=0})\|_{\kappa, \omega} \leq \\ &\leq \|s_{\kappa, \xi}^{>i}(\kappa, \omega, 0) - s_{\kappa, \xi}^{>i}(\kappa, \omega, \xi^{>i})\|_{\kappa, \omega} + \underbrace{\|s_{\kappa, \xi}^{>i}(\kappa, \omega, \xi^{>i})\|_{\kappa, \omega}}_{= \xi^{\leq i}} \leq \\ &\leq C(L) \|\xi^{>i}\|_{\kappa, \omega} + \|\xi^{\leq i}\|_{\kappa, \omega} \leq \|\xi^{>i}\|_{\kappa, \omega} + \|\xi^{\leq i}\|_{\kappa, \omega} = \\ &= \|\xi\|_{\kappa, \omega} \end{aligned}$$

zunächst

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} &= \|T_{\kappa, \omega, \xi}(\tilde{P}(\kappa, \omega, \xi))\|_{\kappa, \omega} \leq \\ &\leq \|T_{\kappa, \omega, \xi}(\tilde{P}(\kappa, \omega, \xi)) - T_{\kappa, \omega, \xi}(0)\|_{\kappa, \omega} + \|T_{\kappa, \omega, \xi}(0)\|_{\kappa, \omega} \leq \\ &\leq C(L)^2 \|\tilde{P}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} + \|\xi\|_{\kappa, \omega} , \end{aligned}$$

und daraus schließlich

$$\begin{aligned}
\|P^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} &= \|(\tilde{P}(\kappa, \omega, \xi), s^{\leq i}(\kappa, \omega, \tilde{P}(\kappa, \omega, \xi)))\|_{\kappa, \omega} = \\
&= \|\tilde{P}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} + \|s^{\leq i}(\kappa, \omega, \tilde{P}(\kappa, \omega, \xi))\|_{\kappa, \omega} \leq \\
&\leq (1 + C(L))\|\tilde{P}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{1 + C(L)}{1 - C(L)^2}\|\xi\|_{\kappa, \omega} = \\
&= \frac{1}{1 - C(L)}\|\xi\|_{\kappa, \omega}.
\end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen.

*Beweis von (ii):* Sei  $\mu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.45). Ferner sei  $\kappa \in \mathbb{Z}$  beliebig, aber fest,  $\xi := \mu(\kappa)$  und schließlich  $\nu := \lambda(\cdot; \kappa, \omega, P^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi))$ . Dann ist  $\nu$  natürlich eine  $\omega$ -Lösung von (1.45), die wegen  $(\kappa, P^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi)) \in \mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  ganz in  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  verläuft. Darüber hinaus ist die Differenz  $\mu - \nu$  auf Grund der bereits bewiesenen Aussagen  $\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , mit einem beliebigen, aber für den Augenblick festen,  $\gamma \in [\alpha_{i+1, -} + \delta, \alpha_{i, +} - \delta]$ .

Sei nun  $k \in \mathbb{Z}$  beliebig. Dann ist  $\xi^* := P^{\leq i}(k, \omega, \mu(k))$  der eindeutig bestimmte Punkt des  $\mathbb{R}^d$ , für den die Differenz

$$\lambda(\cdot; k, \omega, \mu(k)) - \lambda(\cdot; k, \omega, \xi^*)$$

$\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist und die Inklusion

$$(k, \xi^*) \in \mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$$

gilt. Wegen der  $\gamma^+$ -Quasibeschränktheit von

$$\mu(\cdot) - \nu(\cdot) = \lambda(\cdot; k, \omega, \mu(k)) - \lambda(\cdot; k, \omega, \nu(k)),$$

zusammen mit

$$(k, \nu(k)) \in \mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$$

( $\nu$  verläuft in  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$ !), gilt also

$$P^{\leq i}(k, \omega, \mu(k)) = \xi^* = \nu(k).$$

Da  $k \in \mathbb{Z}$  beliebig war, ist damit auch (ii) bewiesen.

*Beweis von (iii):* Seien  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  beliebig, aber fest. Weiter sei  $\mu := \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi)$  und  $\nu := P^{\leq i}(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$ . Wegen der vorausgesetzten Periodizität von  $A(\cdot, \omega)$ ,  $F(\cdot, \omega, x)$  und  $\|x\|_{\cdot, \omega}$  sind dann auch die Abbildungen

$$\mu^* := \mu(\cdot - \Theta) \quad \text{und} \quad \nu^* := \nu(\cdot - \Theta)$$

$\omega$ -Lösungen von (1.45), deren Differenz eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^+$ -quasibeschränkte Abbildung ist, mit  $\gamma \in [\alpha_{i+1, -} + \delta, \alpha_{i, +} - \delta]$ . Des weiteren liefert Lemma 1.4.2(c) — unter Verwendung der Tatsache, daß  $\nu$  in  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  verläuft — die für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gültige Identität

$$\begin{aligned}
\nu_{> i}^*(k) &= \nu_{> i}(k - \Theta) = \\
&= s^{\leq i}(k - \Theta, \omega, \nu_{\leq i}(k - \Theta)) = \\
&= s^{\leq i}(k, \omega, \nu_{\leq i}(k - \Theta)) = \\
&= s^{\leq i}(k, \omega, \nu_{\leq i}^*(k)),
\end{aligned}$$

d.h. auch  $\nu^*$  verläuft in  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$ . Nun folgt aber leicht

$$\begin{aligned} P^{\leq i}(\kappa + \Theta, \omega, \xi) &= P^{\leq i}(\kappa + \Theta, \omega, \mu^*(\kappa + \Theta)) = \\ &= \nu^*(\kappa + \Theta) = \nu(\kappa) = \\ &= P^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi). \end{aligned}$$

Damit ist Satz 1.5.3 bewiesen.  $\diamond$

Eine erste Folgerung aus Satz 1.5.3 würde sich an dieser Stelle sofort anbieten: Man könnte durch eine einfache Umformulierung des Satzes ein *Reduktionsprinzip für zufällige, nichtautonome Differenzengleichungen* angeben. Dieses Prinzip — das im Fall autonomer Differentialgleichungssysteme auf PLISS [35] und KELLEY [29], und im nichtautonomen Fall auf AULBACH [9] zurückgeht — erlaubt es, die Stabilität der trivialen Lösung von (1.45) in Zusammenhang zu bringen mit der Stabilität der trivialen Lösung einer niedriger-dimensionalen Gleichung. Es soll jedoch hier nicht eigens formuliert werden. (Man vergleiche dazu Abschnitt 1.6 in [41].)

## 1.6 Topologische Entkopplung

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie man einer beliebigen  $\omega$ -Lösung  $\mu$  der zufälligen Differenzengleichung

$$x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k) \quad (1.46)$$

mittels der Abbildung  $P^{\leq i}$  auf kanonische Art und Weise eine  $\omega$ -Lösung zuordnen kann, die in dem zufälligen invarianten Faserbündel  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  verläuft. Gemäß Satz 1.5.3(a),(ii) ist diese Lösung gegeben durch

$$P^{\leq i}(\cdot, \omega, \mu(\cdot)). \quad (1.47)$$

Nun sind aber die Punkte  $(\kappa, \xi) \in \mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  bereits durch die Angabe von  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\xi^{\leq i} \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i}$  eindeutig festgelegt. Insofern sind eigentlich nur die ersten  $i$  Komponenten  $P_{\leq i}^{\leq i}(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  (vergleiche Bemerkung 1.4.1) der Abbildung in (1.47) von Interesse — und die genügen wieder einer zufälligen Differenzengleichung. Die Tatsache, daß die Abbildung in (1.47) eine  $\omega$ -Lösung von (1.46) ist, die in  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  verläuft, liefert nämlich sofort, daß  $P_{\leq i}^{\leq i}(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung der  $(d_1 + \dots + d_i)$ -dimensionalen Gleichung

$$x_{k+1}^{\leq i} = A_{\leq i}(k, \omega)x_k^{\leq i} + F_{\leq i}(k, \omega, x_k^{\leq i}, s^{\leq i}(k, \omega, x_k^{\leq i}))$$

ist. Völlig analog erhält man, daß die letzten  $p - i$  Komponenten der Abbildung

$$P^{> i}(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$$

eine  $\omega$ -Lösung der  $(d_{i+1} + \dots + d_p)$ -dimensionalen Gleichung

$$x_{k+1}^{> i} = A_{> i}(k, \omega)x_k^{> i} + F_{> i}(k, \omega, s^{> i}(k, \omega, x_k^{> i}), x_k^{> i})$$

sind. Definiert man jetzt eine meßbare Abbildung  $E^i : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  durch

$$E^i(\kappa, \omega, \xi) := (P_{\leq i}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi), P_{> i}^{> i}(\kappa, \omega, \xi)),$$

so ist die Abbildung  $E^i(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung der  $d$ -dimensionalen Gleichung

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{<i} &= A_{<i}(k, \omega)x_k^{<i} + F_{<i}(k, \omega, x_k^{<i}, s^{<i}(k, \omega, x_k^{<i})) \\ x_{k+1}^{>i} &= A_{>i}(k, \omega)x_k^{>i} + F_{>i}(k, \omega, s^{>i}(k, \omega, x_k^{>i}), x_k^{>i}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

für jede beliebige  $\omega$ -Lösung  $\mu$  von (1.46). Wichtig ist dabei, daß die neue Gleichung (1.48) einfacher als die Ausgangsgleichung (1.46) ist — sie ist nämlich entkoppelt. Das nun folgende Lemma zeigt, daß man auch umgekehrt jede  $\omega$ -Lösung von (1.48) auf eine  $\omega$ -Lösung von (1.46) abbilden kann, und vieles mehr. Im Hinblick auf spätere Anwendungen wird zunächst nur der Spezialfall  $p = 2, i = 1$  behandelt.

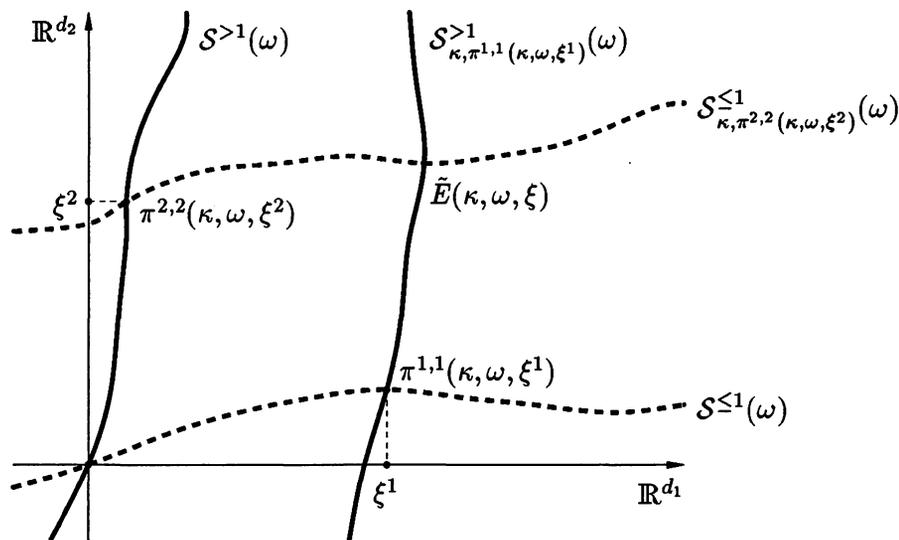


Abbildung 1.8: Zu Lemma 1.6.1(a)

**Lemma 1.6.1** Gegeben sei eine zufällige Differenzgleichung der Form

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k)} \quad (1.49)$$

die den zu Beginn von Abschnitt 1.4 aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) genügt, und zwar mit  $p = 2$  und der verschärften Bedingung  $0 \leq L < \frac{\delta}{4K^2}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4})$ . Neben (1.49) wird noch die zufällige Differenzgleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F^e(k, \omega, x_k)} \quad (1.50)$$

mit entkoppelter Nichtlinearität

$$F^e(k, \omega, x) := \begin{pmatrix} F_1(k, \omega, x^1, s^{\leq 1}(k, \omega, x^1)) \\ F_2(k, \omega, s^{> 1}(k, \omega, x^2), x^2) \end{pmatrix}$$

betrachtet<sup>15</sup>. Dann gibt es meßbare Abbildungen  $E, \tilde{E} : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , so daß folgendes gilt:

<sup>15</sup>Die Abbildungen  $s^{\leq 1}$  und  $s^{> 1}$  existieren gemäß Lemma 1.4.2.

- (a) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  ist  $(\kappa, \tilde{E}(\kappa, \omega, \xi))$  der eindeutig bestimmte Schnittpunkt der zufälligen invarianten Faserbündel  $\mathcal{S}_{\kappa, \pi^{2,2}(\kappa, \omega, \xi^2)}^{\leq 1}(\omega)$  und  $\mathcal{S}_{\kappa, \pi^{1,1}(\kappa, \omega, \xi^1)}^{> 1}(\omega)$  in der Faser  $k = \kappa$ . (Man vergleiche dazu auch Abbildung 1.8.)
- (b) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  sind die Abbildungen  $E(\kappa, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{E}(\kappa, \omega, \cdot)$  stetig und einander invers, mithin Homöomorphismen auf dem  $\mathbb{R}^d$ .
- (c) Ist  $\mu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.49), so ist  $E(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.50).
- (d) Ist  $\nu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.50), so ist  $\tilde{E}(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.49).
- (e) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  sind die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{1 - C(L)}{2} \|\xi\|_{\kappa, \omega} &\leq \|E(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{2}{1 - C(L)} \|\xi\|_{\kappa, \omega} \\ \frac{1 - C(L)}{2} \|\xi\|_{\kappa, \omega} &\leq \|\tilde{E}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{2}{1 - C(L)} \|\xi\|_{\kappa, \omega} \end{aligned}$$

erfüllt, mit  $C(L) = C(L, K, \delta, 2) = \frac{2K^2L(\delta - 2KL)}{\delta(\delta - 4KL)} < 1$ .

- (f) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A$  und  $F$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{\kappa, \omega}$  bezüglich  $k$  überträgt sich auf die Abbildungen  $E$  und  $\tilde{E}$ .

Die Gleichungen (1.49) und (1.50) sind also topologisch äquivalent vermöge der Abbildung  $E$ , im Sinne von Definition 1.1.1.

**Beweis:** Definiert man — unter Verwendung von Satz 1.5.3 — die Abbildung  $E$  durch

$$E(\kappa, \omega, \xi) := (P_1^{\leq 1}(\kappa, \omega, \xi), P_2^{> 1}(\kappa, \omega, \xi)), \quad (1.51)$$

so ist die Abbildung  $E(\kappa, \omega, \cdot)$  offensichtlich für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  stetig. Darüber hinaus ist die Aussage in (c), wie auch die Aussagen in (e)<sup>16</sup> und (f) bezüglich der Abbildung  $E$ , eine leichte Folgerung aus Satz 1.5.3, unter Beachtung der Bemerkungen vom Beginn dieses Abschnittes. Die restlichen Aussagen des Lemmas sollen nun der Reihe nach bewiesen werden.

*Beweis von (a):* Der Beweis wird analog zum Beweis von Satz 1.5.3(a) durchgeführt. Man definiert also zunächst eine Abbildungsfamilie

$$T_{\kappa, \omega, \xi} : \begin{cases} \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} & \rightarrow & \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \\ (\eta_1, \eta_2) & \mapsto & (s_{\kappa, \pi^{1,1}(\kappa, \omega, \xi^1)}^{> 1}(\kappa, \omega, \eta_2), s_{\kappa, \pi^{2,2}(\kappa, \omega, \xi^2)}^{\leq 1}(\kappa, \omega, \eta_1)) \end{cases},$$

mit  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Wieder ist  $T_{\cdot, \cdot, \cdot}$  offensichtlich meßbar, und für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $T_{\kappa, \omega, \cdot}(\cdot, \cdot)$  stetig. Wegen der für alle  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\eta_1, \bar{\eta}_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$  und  $\eta_2, \bar{\eta}_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$  gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} \|T_{\kappa, \omega, \xi}(\eta_1, \eta_2) - T_{\kappa, \omega, \xi}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)\|_{\kappa, \omega} &\leq C(L)\|\eta_1 - \bar{\eta}_1\|_{\kappa, \omega} + C(L)\|\eta_2 - \bar{\eta}_2\|_{\kappa, \omega} = \\ &= C(L)\|(\eta_1, \eta_2) - (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)\|_{\kappa, \omega}, \end{aligned}$$

<sup>16</sup>Hier allerdings nur die Abschätzung nach oben.

zusammen mit  $C(L) < 1$ , ist die Abbildung  $T_{\kappa,\omega,\xi}$  eine Kontraktion auf  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} = \mathbb{R}^d$  — und besitzt somit einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\tilde{E}(\kappa, \omega, \xi)$ . Nun implizieren Lemma A.1.1 und das gleichmäßige Kontraktionsprinzip sofort die Meßbarkeit von  $\tilde{E}$ , sowie die Stetigkeit von  $\tilde{E}(\kappa, \omega, \cdot)$  für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$ . Beachtet man schließlich, daß ein Punkt  $(\eta_1, \eta_2)$  genau dann Fixpunkt von  $T_{\kappa,\omega,\xi}$  ist, wenn die Beziehungen

$$\begin{aligned} \eta_1 &= s_{\kappa,\pi^{1,1}(\kappa,\omega,\xi^1)}^{>1}(\kappa, \omega, \eta_2) \quad \text{und} \quad \eta_2 = s_{\kappa,\pi^{2,2}(\kappa,\omega,\xi^2)}^{\leq 1}(\kappa, \omega, \eta_1) \\ \Leftrightarrow (\kappa, \eta_1, \eta_2) &\in \mathcal{S}_{\kappa,\pi^{1,1}(\kappa,\omega,\xi^1)}^{>1}(\omega) \quad \text{und} \quad (\kappa, \eta_1, \eta_2) \in \mathcal{S}_{\kappa,\pi^{2,2}(\kappa,\omega,\xi^2)}^{\leq 1}(\omega) \end{aligned}$$

gelten, so ist der Beweis von (a) abgeschlossen.

*Beweis von (b):* Die Stetigkeit von  $\tilde{E}(\kappa, \omega, \cdot)$  für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  wurde eben gezeigt. Die noch fehlenden Beziehungen

$$E(\kappa, \omega, \tilde{E}(\kappa, \omega, \xi)) = \xi \quad \text{und} \quad \tilde{E}(\kappa, \omega, E(\kappa, \omega, \xi)) = \xi$$

für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  können — unter Verwendung von (1.51) und Satz 1.5.3 — mit Hilfe der bereits bewiesenen Charakterisierung von  $\tilde{E}(\kappa, \omega, \xi)$  leicht verifiziert werden.

*Beweis von (d):* Die in (d) behauptete Aussage folgt sofort aus (c) und der soeben bewiesenen Tatsache, daß die Abbildungen  $E(\kappa, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{E}(\kappa, \omega, \cdot)$  einander invers sind.

*Beweis von (e):* Man überzeugt sich leicht, daß die beiden Abschätzungen nach unten eine unmittelbare Konsequenz aus (b) und den beiden Abschätzungen nach oben sind, d.h. es muß nur noch die Abschätzung für  $\tilde{E}$  nach oben nachgewiesen werden. Seien dazu  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  beliebig, aber fest. Beachtet man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \pi^{1,1}(\kappa, \omega, \xi^1) &= (\xi^1, s_{\kappa,\omega,\xi^1}^{\leq 1}), \\ \pi^{2,2}(\kappa, \omega, \xi^2) &= (s_{\kappa,\omega,\xi^2}^{>1}, \xi^2), \end{aligned}$$

dann liefert

$$\begin{aligned} \|T_{\kappa,\omega,\xi}(0,0)\|_{\kappa,\omega} &= \|s_{\kappa,\pi^{1,1}(\kappa,\omega,\xi^1)}^{>1}(\kappa, \omega, 0)\|_{\kappa,\omega} + \|s_{\kappa,\pi^{2,2}(\kappa,\omega,\xi^2)}^{\leq 1}(\kappa, \omega, 0)\|_{\kappa,\omega} \leq \\ &\leq \|s_{\kappa,\pi^{1,1}(\kappa,\omega,\xi^1)}^{>1}(\kappa, \omega, 0) - s_{\kappa,\pi^{1,1}(\kappa,\omega,\xi^1)}^{>1}(\kappa, \omega, s_{\kappa,\omega,\xi^1}^{\leq 1})\|_{\kappa,\omega} + \\ &\quad + \underbrace{\|s_{\kappa,\pi^{1,1}(\kappa,\omega,\xi^1)}^{>1}(\kappa, \omega, s_{\kappa,\omega,\xi^1}^{\leq 1})\|_{\kappa,\omega}}_{=\xi^1} + \\ &\quad + \|s_{\kappa,\pi^{2,2}(\kappa,\omega,\xi^2)}^{\leq 1}(\kappa, \omega, 0) - s_{\kappa,\pi^{2,2}(\kappa,\omega,\xi^2)}^{\leq 1}(\kappa, \omega, s_{\kappa,\omega,\xi^2}^{>1})\|_{\kappa,\omega} + \\ &\quad + \underbrace{\|s_{\kappa,\pi^{2,2}(\kappa,\omega,\xi^2)}^{\leq 1}(\kappa, \omega, s_{\kappa,\omega,\xi^2}^{>1})\|_{\kappa,\omega}}_{=\xi^2} \leq \\ &\leq C(L)\|s_{\kappa,\omega,\xi^1}^{\leq 1}\|_{\kappa,\omega} + \|\xi^1\|_{\kappa,\omega} + C(L)\|s_{\kappa,\omega,\xi^2}^{>1}\|_{\kappa,\omega} + \|\xi^2\|_{\kappa,\omega} \leq \\ &\leq (1 + C(L)^2)\|\xi^1\|_{\kappa,\omega} + (1 + C(L)^2)\|\xi^2\|_{\kappa,\omega} \leq 2\|\xi^1\|_{\kappa,\omega} + 2\|\xi^2\|_{\kappa,\omega} = \\ &= 2\|\xi\|_{\kappa,\omega} \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\tilde{E}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa,\omega} &= \|T_{\kappa,\omega,\xi}(\tilde{E}(\kappa, \omega, \xi))\|_{\kappa,\omega} \leq \\ &\leq \|T_{\kappa,\omega,\xi}(\tilde{E}(\kappa, \omega, \xi)) - T_{\kappa,\omega,\xi}(0,0)\|_{\kappa,\omega} + \|T_{\kappa,\omega,\xi}(0,0)\|_{\kappa,\omega} \leq \\ &\leq C(L)\|\tilde{E}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa,\omega} + 2\|\xi\|_{\kappa,\omega}, \end{aligned}$$

womit auch (e) bewiesen wäre.

*Beweis von (f):* Wie bereits erwähnt wurde, ist die erste Aussage eine unmittelbare Konsequenz aus der Definition von  $E$  und den entsprechenden Aussagen in Satz 1.5.3. Mit (b) folgt dann aber auch leicht die Behauptung für  $\tilde{E}$ .  $\diamond$

Das soeben bewiesene Lemma 1.6.1 ist das erste Ergebnis zur topologischen Äquivalenz zufälliger Differenzgleichungen im Rahmen dieser Arbeit. Es ist allerdings nur ein Hilfsresultat auf dem Weg zum Hauptergebnis dieses Abschnittes. Bevor jedoch dieses Hauptergebnis präsentiert werden kann, muß noch ein weiteres Lemma bewiesen werden.

**Lemma 1.6.2** *Gegeben sei eine zufällige Differenzgleichung der Form*

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k)} \quad (1.52)$$

die den zu Beginn von Abschnitt 1.4 aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) genügt. Dann gibt es eine positive Konstante

$$0 < L^* = L^*(K, \delta, p) \leq \frac{\delta}{2K^2p}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4}),$$

so daß für  $0 \leq L < L^*$  die entkoppelte zufällige Differenzgleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F^e(k, \omega, x_k)} \quad (1.53)$$

mit der Nichtlinearität

$$F^e(k, \omega, x) := \begin{pmatrix} F_1(k, \omega, \pi^{1,1}(k, \omega, x^1)) \\ F_2(k, \omega, \pi^{2,2}(k, \omega, x^2)) \\ \vdots \\ F_p(k, \omega, \pi^{p,p}(k, \omega, x^p)) \end{pmatrix}$$

allen Voraussetzungen von Satz 1.4.4 genügt, und daß die von diesem Satz garantierten zufälligen invarianten Faserbündel für (1.53) in Wirklichkeit zufällige invariante Unterraumbündel sind, d.h. die sie bestimmenden Abbildungen verschwinden identisch.

**Beweis:** Ist zunächst  $0 \leq L < \frac{\delta}{2K^2p}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4})$ , so erhält man unter Verwendung von Satz 1.4.4 und Bemerkung 1.4.5 für beliebige  $i = 1, \dots, p$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x^i, \bar{x}^i \in \mathbb{R}^{d_i}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|F_i(k, \omega, \pi^{i,i}(k, \omega, x^i)) - F_i(k, \omega, \pi^{i,i}(k, \omega, \bar{x}^i))\|_{k+1, \omega} \leq \\ & \leq L \|\pi^{i,i}(k, \omega, x^i) - \pi^{i,i}(k, \omega, \bar{x}^i)\|_{k, \omega} = \\ & = L \|s^{i,i}(k, \omega, x^i) - s^{i,i}(k, \omega, \bar{x}^i)\|_{k, \omega} + L \|x^i - \bar{x}^i\|_{k, \omega} \leq \\ & \leq L \left( \frac{2C(L)}{1 - C(L)} + 1 \right) \|x^i - \bar{x}^i\|_{k, \omega}. \end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{L \rightarrow 0} C(L) = 0$  gibt es dann eine Konstante

$$0 < L^* = L^*(K, \delta, p) \leq \frac{\delta}{2K^2p}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4}),$$

so daß für alle  $0 \leq L < L^*$  sowohl die Ungleichungen

$$\|F_i(k, \omega, \pi^{i,i}(k, \omega, x^i)) - F_i(k, \omega, \pi^{i,i}(k, \omega, \bar{x}^i))\|_{k+1, \omega} \leq 2L \|x^i - \bar{x}^i\|_{k, \omega} \leq 2L \|x - \bar{x}\|_{k, \omega}, \quad (1.54)$$

als auch

$$2L < \frac{\delta}{2K^2 p} (K + 2 - \sqrt{K^2 + 4}) < \frac{\delta}{K} \quad (1.55)$$

gelten. Für  $0 \leq L < L^*$  verifiziert man nun leicht, daß jede der Gleichungen

$$x_{k+1}^i = A_i(k, \omega) x_k^i + F_i(k, \omega, \pi^{i,i}(k, \omega, x_k^i)) \quad (1.56)$$

die Bedingungen der Lemmata 1.2.2, 1.2.4, 1.2.5 und 1.2.6 erfüllt. Damit erhält man unmittelbar die folgenden Aussagen:

- Gemäß Lemma 1.2.6 existieren alle  $\omega$ -Lösungen von (1.56) für jedes  $i = 1, \dots, p$  auf ganz  $\mathbb{Z}$  und sind dort eindeutig bestimmt. Ferner ist die zugehörige allgemeine Lösung meßbar (dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus Lemma A.1.1), sowie stetig bezüglich der letzten Variablen (dies folgt aus dem gleichmäßigen Kontraktionsprinzip). Unter Beachtung von (1.54) und (1.55) sieht man nun aber sofort, daß (1.53) allen Voraussetzungen des Satzes 1.4.4 genügt, d.h. es existieren zufällige invariante Faserbündel  $\hat{\mathcal{S}}^{i,j}(\omega)$  für (1.53), die von meßbaren Abbildungen  $\hat{s}^{i,j}$  erzeugt werden.
- Gemäß Lemma 1.2.2 ist die triviale Lösung von (1.56) die einzige  $\omega$ -Lösung, die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt ist bezüglich  $\omega$ , für jedes  $\gamma \geq \alpha_{i,-} + \delta$ .
- Gemäß Lemma 1.2.4 sind alle  $\omega$ -Lösungen von (1.56)  $\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , für jedes  $\gamma \geq \alpha_{i,-} + \delta$ .
- Gemäß Lemma 1.2.5 ist die triviale Lösung von (1.56) die einzige  $\omega$ -Lösung, die  $\gamma^+$ -quasibeschränkt ist bezüglich  $\omega$ , für jedes  $0 < \gamma \leq \alpha_{i,+} - \delta$ .
- Gemäß Lemma 1.2.6 sind alle  $\omega$ -Lösungen von (1.56)  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , für jedes  $0 < \gamma \leq \alpha_{i,+} - \delta$ .

Mit diesen Aussagen folgen schließlich für beliebige  $1 \leq i < p$  die Identitäten

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}^{1,i}(\omega) &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \xi^{>i} = \hat{s}^{1,i}(\kappa, \omega, \xi^{\leq i}) = 0\}, \\ \hat{\mathcal{S}}^{i+1,p}(\omega) &= \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : \xi^{\leq i} = \hat{s}^{i+1,p}(\kappa, \omega, \xi^{>i}) = 0\}, \end{aligned}$$

und für  $1 < i \leq j < p$ :

$$\hat{\mathcal{S}}^{i,j}(\omega) = \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d : (\xi^{<i}, \xi^{>j}) = \hat{s}^{i,j}(\kappa, \omega, \xi^{i \leq j}) = (0, 0)\}.$$

Damit ist alles gezeigt.  $\diamond$

Nachdem nun auch das zweite Lemma bewiesen ist, kann im folgenden das Hauptergebnis dieses Abschnittes präsentiert werden, das eine Verallgemeinerung von Lemma 1.6.1 darstellt. Es soll gezeigt werden, daß die eingangs erwähnte Gleichung (1.46) einer entkoppelten Differenzgleichung topologisch äquivalent ist, die aus  $p$  Teilgleichungen besteht, und zwar für beliebiges  $p$ . Mehr kann man natürlich gar nicht erwarten, denn die zugehörige homogene lineare zufällige Differenzgleichung besitzt ja ebenfalls Blockdiagonalgestalt mit genau  $p$  Blöcken.

**Satz 1.6.3** Gegeben sei wieder eine zufällige Differenzengleichung der Form

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k)} \quad (1.57)$$

die den zu Beginn von Abschnitt 1.4 aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) genügt. Dann gibt es eine positive Konstante

$$0 < L^* = L^*(K, \delta, p) \leq \frac{\delta}{2K^{2p}}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4}),$$

so daß für  $0 \leq L < L^*$  die entkoppelte zufällige Differenzengleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F^e(k, \omega, x_k)} \quad (1.58)$$

mit der Nichtlinearität

$$F^e(k, \omega, x) := \begin{pmatrix} F_1(k, \omega, \pi^{1,1}(k, \omega, x^1)) \\ F_2(k, \omega, \pi^{2,2}(k, \omega, x^2)) \\ \vdots \\ F_p(k, \omega, \pi^{p,p}(k, \omega, x^p)) \end{pmatrix}$$

allen Voraussetzungen des letzten Lemmas 1.6.2 genügt, und daß meßbare Abbildungen  $E, \tilde{E} : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften existieren:

- (a) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  sind die Abbildungen  $E(\kappa, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{E}(\kappa, \omega, \cdot)$  stetig und einander invers, mithin Homöomorphismen auf dem  $\mathbb{R}^d$ .
- (b) Ist  $\mu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.57), so ist  $E(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.58).
- (c) Ist  $\nu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.58), so ist  $\tilde{E}(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.57).
- (d) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \|\xi\|_{\kappa, \omega} &\leq \|E(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} \leq B \|\xi\|_{\kappa, \omega} \\ \frac{1}{B} \|\xi\|_{\kappa, \omega} &\leq \|\tilde{E}(\kappa, \omega, \xi)\|_{\kappa, \omega} \leq B \|\xi\|_{\kappa, \omega}, \end{aligned}$$

mit einer Konstanten  $B = B(L, K, \delta, p) \geq 1$ . Insbesondere übertragen also die Abbildungen  $E$  und  $\tilde{E}$  jede Quasibeschränktheitseigenschaft einer betrachteten Lösung auf die Bildlösung, d.h. die zufälligen invarianten Faserbündel von (1.57) gemäß Satz 1.4.4 werden auf die entsprechenden zufälligen invarianten Unterraumbündel von (1.58) abgebildet, und umgekehrt.

- (e) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A$  und  $F$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  bezüglich  $k$  überträgt sich auf die Abbildungen  $E$  und  $\tilde{E}$ .

Mit anderen Worten: Die Gleichungen (1.57) und (1.58) sind topologisch äquivalent vermöge der Abbildung  $E$ , im Sinne von Definition 1.1.1.

**Beweis:** Die Behauptungen werden durch Induktion über  $p$  bewiesen. Für den Induktionsanfang  $p = 2$  müssen nur Lemma 1.6.1 und Lemma 1.6.2 zitiert werden.

Sei nun also  $p \geq 3$ . Dann existiert wegen Lemma 1.6.1 eine positive Konstante  $L_1^* > 0$ , so daß für alle  $0 \leq L < L_1^*$  die Ausgangsgleichung (1.57) der teilweise entkoppelten Gleichung

$$\begin{aligned} x_{k+1}^1 &= A_1(k, \omega)x_k^1 + F_1(k, \omega, x_k^1, s^{\leq 1}(k, \omega, x_k^1)) \\ x_{k+1}^2 &= A_2(k, \omega)x_k^2 + F_2(k, \omega, s^{> 1}(k, \omega, x_k^2, \dots, x_k^p), x_k^2, \dots, x_k^p) \\ &\vdots \\ x_{k+1}^p &= A_p(k, \omega)x_k^p + F_p(k, \omega, s^{> 1}(k, \omega, x_k^2, \dots, x_k^p), x_k^2, \dots, x_k^p) \end{aligned} \quad (1.59)$$

topologisch äquivalent ist, vermöge der Abbildung  $E^{(1)}$  (und mit "inverser" Abbildung  $\tilde{E}^{(1)}$ ). Ferner existieren wegen Lemma 1.1.2 alle  $\omega$ -Lösungen von (1.59) auf ganz  $\mathbb{Z}$ , sind dort eindeutig bestimmt, und die zugehörige allgemeine Lösung im Sinne von (1.4) ist meßbar, sowie stetig bezüglich der letzten Variablen  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Da (1.59) entkoppelt ist, gelten analoge Aussagen auch für die Teilgleichung

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 &= A_2(k, \omega)x_k^2 + F_2(k, \omega, s^{> 1}(k, \omega, x_k^2, \dots, x_k^p), x_k^2, \dots, x_k^p) \\ &\vdots \\ x_{k+1}^p &= A_p(k, \omega)x_k^p + F_p(k, \omega, s^{> 1}(k, \omega, x_k^2, \dots, x_k^p), x_k^2, \dots, x_k^p). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Wie im Beweis von Lemma 1.6.2 kann man nun zeigen, daß die Nichtlinearitäten in (1.60) einer globalen Lipschitzbedingung genügen — mit einer für  $L \rightarrow 0$  ebenfalls gegen 0 konvergierenden Lipschitzkonstanten. Somit existiert eine positive Konstante  $0 < L^* \leq L_1^*$ , so daß für alle  $0 \leq L < L^*$  die Induktionsannahme auf (1.60) angewandt werden kann. Demnach ist (1.60) der vollständig entkoppelten Gleichung

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 &= A_2(k, \omega)x_k^2 + F_2(k, \omega, s^{> 1}(k, \omega, \hat{\pi}^{2,2}(k, \omega, x_k^2)), \hat{\pi}^{2,2}(k, \omega, x_k^2)) \\ &\vdots \\ x_{k+1}^p &= A_p(k, \omega)x_k^p + F_p(k, \omega, s^{> 1}(k, \omega, \hat{\pi}^{p,p}(k, \omega, x_k^p)), \hat{\pi}^{p,p}(k, \omega, x_k^p)) \end{aligned}$$

topologisch äquivalent, vermöge einer Abbildung  $E^{(2)}$  (mit "inverser" Abbildung  $\tilde{E}^{(2)}$ ). Dabei werden die von Satz 1.4.4 garantierten zufälligen invarianten Faserbündel für die Gleichung (1.60) mit  $\hat{S}^{i,j}(\omega)$  und die zugehörigen Projektionsabbildungen gemäß Bemerkung 1.4.5 mit  $\hat{\pi}^{i,j}(\omega)$  bezeichnet.

Definiert man nun — für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  — die Abbildungen  $E$  und  $\tilde{E}$  durch

$$\begin{aligned} E(\kappa, \omega, \xi) &:= (E_1^{(1)}(\kappa, \omega, \xi), E^{(2)}(\kappa, \omega, E_{>1}^{(1)}(\kappa, \omega, \xi))), \\ \tilde{E}(\kappa, \omega, \xi) &:= (\tilde{E}^{(1)}(\kappa, \omega, \xi^1), \tilde{E}^{(2)}(\kappa, \omega, \xi^{>1})), \end{aligned}$$

so ist die Gleichung (1.57) für beliebiges  $0 \leq L < L^*$  der entkoppelten Gleichung

$$\begin{aligned} x_{k+1}^1 &= A_1(k, \omega)x_k^1 + F_1(k, \omega, x_k^1, s^{\leq 1}(k, \omega, x_k^1)) \\ x_{k+1}^2 &= A_2(k, \omega)x_k^2 + F_2(k, \omega, s^{> 1}(k, \omega, \hat{\pi}^{2,2}(k, \omega, x_k^2)), \hat{\pi}^{2,2}(k, \omega, x_k^2)) \\ &\vdots \\ x_{k+1}^p &= A_p(k, \omega)x_k^p + F_p(k, \omega, s^{> 1}(k, \omega, \hat{\pi}^{p,p}(k, \omega, x_k^p)), \hat{\pi}^{p,p}(k, \omega, x_k^p)) \end{aligned} \quad (1.61)$$

topologisch äquivalent, vermöge  $E$  (mit “inverser” Abbildung  $\tilde{E}$ ). Darüber hinaus verifiziert man leicht die Aussagen in (a), (b), (c), (d) und (e), allerdings bezüglich der Gleichung (1.61) an Stelle von (1.58).

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Gleichungen (1.58) und (1.61) übereinstimmen. Zunächst einmal gilt wegen Satz 1.4.4 für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi^1 \in \mathbb{R}^{d_1}$  die Identität

$$(\xi^1, s^{\leq 1}(\kappa, \omega, \xi^1)) = \pi^{1,1}(\kappa, \omega, \xi^1).$$

Seien nun  $i \in \{2, \dots, p\}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi^i \in \mathbb{R}^{d_i}$  beliebig, aber fest. Ferner sei  $\mu$  die (eindeutig bestimmte)  $\omega$ -Lösung von (1.60), die der Anfangsbedingung

$$x_{\kappa}^{>1} = \hat{\pi}^{i,i}(\kappa, \omega, \xi^i)$$

genügt. Dann ist  $\mu$  auf Grund von Satz 1.4.4 und Bemerkung 1.4.5 zunächst einmal  $\gamma_1^+$ - und  $\gamma_2^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , für beliebige  $\gamma_1 \in [\alpha_{i,-} + \delta, \alpha_{i-1,+} - \delta]$  und  $\gamma_2 \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ . Des weiteren ist die Abbildung

$$\nu := (s^{>1}(\cdot, \omega, \mu(\cdot)), \mu(\cdot))$$

eine  $\omega$ -Lösung von (1.57)<sup>17</sup>. Beachtet man jetzt die für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gültige Ungleichung

$$\|\nu(k)\|_{k,\omega} = \|s^{>1}(k, \omega, \mu(k))\|_{k,\omega} + \|\mu(k)\|_{k,\omega} \leq (C(L) + 1)\|\mu(k)\|_{k,\omega},$$

so erkennt man sofort, daß auch  $\nu$  (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma_1^+$ - und  $\gamma_2^-$ -quasibeschränkt ist, mit  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  wie oben. Eine erneute Anwendung von Satz 1.4.4 und Bemerkung 1.4.5 — diesmal jedoch auf die Ausgangsgleichung (1.57) — liefert die Beziehung

$$(\kappa, \nu(\kappa)) \in \mathcal{S}^{i,i}(\omega) \quad \text{oder} \quad \nu(\kappa) = \pi^{i,i}(\kappa, \omega, \nu_i(\kappa)),$$

und mit  $\nu_i(\kappa) = \mu_i(\kappa) = \xi^i$  folgt schließlich

$$\begin{aligned} \pi^{i,i}(\kappa, \omega, \xi^i) &= \nu(\kappa) = \\ &= (s^{>1}(\kappa, \omega, \mu(\kappa)), \mu(\kappa)) = \\ &= (s^{>1}(\kappa, \omega, \hat{\pi}^{i,i}(\kappa, \omega, \xi^i)), \hat{\pi}^{i,i}(\kappa, \omega, \xi^i)), \end{aligned}$$

d.h. die Gleichungen (1.58) und (1.61) sind tatsächlich identisch.  $\diamond$

**Bemerkung 1.6.4** Betrachtet man noch einmal die entkoppelte Gleichung (1.58), so erkennt man leicht, daß diese Gleichung nicht nur die von Satz 1.4.4 garantierten  $\frac{(p-1)(p+2)}{2}$  zufälligen invarianten Faserbündel (beziehungsweise in diesem Fall: Unterraumbündel) besitzt, sondern vielmehr das Maximum von  $2^p - 2$  nichttrivialen zufälligen invarianten Unterraumbündeln — in völliger Analogie zum homogenen linearen Fall, der zu Beginn des Abschnittes 1.4 behandelt wurde. Bildet man nun diese Unterraumbündel mittels  $\tilde{E}$  ab, so erhält man auch für die Ausgangsgleichung (1.57)  $2^p - 2$  nichttriviale zufällige invariante Mengen. Es sei jedoch an dieser Stelle nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß im allgemeinen nur die Fasern der von Satz 1.4.4 garantierten Faserbündel Graphen von global Lipschitz-stetigen Abbildungen sind.  $\square$

<sup>17</sup>Dies folgt leicht aus der globalen Existenz und Eindeutigkeit der  $\omega$ -Lösungen von (1.57) und (1.60) unter Verwendung der Invarianz von  $\mathcal{S}^{>1}(\omega)$ .

## 1.7 Topologische Linearisierung

Im anstehenden letzten Abschnitt des ersten Kapitels sollen die Ergebnisse von Abschnitt 1.6 noch verfeinert werden. Die nichtlinear gestörte zufällige Differenzgleichung

$$x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k) \quad (1.62)$$

ist nämlich nicht nur einer entkoppelten, aber immer noch nichtlinearen Gleichung topologisch äquivalent, sondern vielmehr einer entkoppelten und fast vollständig linearen Gleichung. In vielen Fällen läßt sich sogar die topologische Äquivalenz zur ungestörten homogenen linearen Gleichung

$$x_{k+1} = A(k, \omega)x_k$$

erreichen.

Bevor jedoch diese "Hartman-Grobman Sätze" angegeben werden können, müssen noch drei einfache Lemmata bewiesen werden, die im Fall deterministischer Differentialgleichungen auf PALMER [33] zurückgehen.

**Lemma 1.7.1** *Gegeben seien die beiden zufälligen Differenzgleichungen*

$$\boxed{x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + f_1(k, \omega, x_k)} \quad (1.63)$$

und

$$\boxed{x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + f_2(k, \omega, x_k)} \quad (1.64)$$

mit meßbaren Abbildungen  $A^- : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^{d^-})$  und  $f_1, f_2 : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ . Es sei  $\Phi^-(m, n, \omega)$  die Übergangsabbildung der homogenen linearen Differenzgleichung  $x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k$ . Darüber hinaus gelte für beliebige  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^-}$ :

$$\|\Phi^-(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} \leq K \alpha_-^{m-n} \quad \text{für } m \geq n,$$

$$\|f_1(k, \omega, x)\|_{k+1, \omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f_1(k, \omega, x) - f_1(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{k, \omega},$$

$$\|f_2(k, \omega, x)\|_{k+1, \omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f_2(k, \omega, x) - f_2(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{k, \omega},$$

mit reellen Konstanten  $0 < \alpha_- < 1$ ,  $K \geq 1$ ,  $M \geq 0$  und  $0 \leq L < \frac{1-\alpha_-}{K}$ . Schließlich sei noch vorausgesetzt, daß alle  $\omega$ -Lösungen von (1.63) beziehungsweise (1.64) auf ganz  $\mathbb{Z}$  existieren, dort eindeutig bestimmt sind, und daß die zugehörigen allgemeinen Lösungen  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  meßbar sind, sowie stetig bezüglich der letzten Variablen.

Dann gibt es zu jeder Wahl von  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$  einen eindeutig bestimmten Punkt  $H^-(\kappa, \omega, \xi) \in \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß die Differenz

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \kappa, \omega, H^-(\kappa, \omega, \xi)) - \lambda^{(1)}(\cdot; \kappa, \omega, \xi)$$

1-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Die so erzeugte Abbildung  $H^- : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  besitzt folgende Eigenschaften:

(a)  $H^-$  ist meßbar und für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $H^-(\kappa, \omega, \cdot)$  stetig.

(b) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$  ist die Abschätzung

$$\|H^-(\kappa, \omega, \xi) - \xi\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{2KM}{1 - \alpha_- - KL}$$

erfüllt.

(c) Ist  $\nu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.63), so ist die Abbildung  $H^-(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.64).

(d) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A^-$ ,  $f_1$  und  $f_2$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{\kappa, \omega}$  bezüglich  $k$  überträgt sich auf die Abbildung  $H^-$ .

**Beweis:** Betrachtet man die von dem Parameter  $(\kappa_0, \xi_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{d^-}$  abhängige zufällige Differenzgleichung

$$x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + f_2(k, \omega, x_k + \lambda^{(1)}(k; \kappa_0, \omega, \xi_0)) - f_1(k, \omega, \lambda^{(1)}(k; \kappa_0, \omega, \xi_0)), \quad (1.65)$$

so läßt sich leicht verifizieren, daß alle  $\omega, \kappa_0, \xi_0$ -Lösungen auf ganz  $\mathbb{Z}$  existieren, dort eindeutig bestimmt sind, und daß die zugehörige allgemeine Lösung

$$\lambda^{(3)} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$$

meßbar und bezüglich der letzten drei Variablen stetig ist. Darüber hinaus erfüllt (1.65) alle Voraussetzungen von Lemma 1.2.2 mit  $\gamma := 1$ , unter Beachtung von Bemerkung 1.2.3. Demnach gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung  $\mu : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß für beliebige  $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{d^-}$  die Abbildung

$$\lambda^{(3)}(\cdot; \kappa, \omega, \mu(\kappa, \omega, \kappa_0, \xi_0), \kappa_0, \xi_0)$$

1-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Ferner ist  $\mu$  meßbar, die Abbildung  $\mu(\kappa, \omega, \kappa_0, \cdot)$  ist stetig, und es gilt die Abschätzung

$$\|\mu(\kappa, \omega, \kappa_0, \xi_0)\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{2KM}{1 - \alpha_- - KL},$$

für beliebige  $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{d^-}$ .

Nun ist aber eine Abbildung  $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  genau dann eine  $\omega, \kappa_0, \xi_0$ -Lösung von (1.65), wenn die Abbildung

$$\nu(\cdot) + \lambda^{(1)}(\cdot; \kappa_0, \omega, \xi_0)$$

eine  $\omega$ -Lösung von (1.64) ist. Setzt man also

$$H^-(\kappa, \omega, \xi) := \xi + \mu(\kappa, \omega, \kappa, \xi),$$

dann liefert das die eindeutig bestimmte Abbildung  $H^-$ , so daß

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \kappa, \omega, H^-(\kappa, \omega, \xi)) - \lambda^{(1)}(\cdot; \kappa, \omega, \xi)$$

eine (bezüglich  $\omega$ ) 1-quasibeschränkte Abbildung ist, für jedes  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$ . Die restlichen Aussagen von Lemma 1.7.1 werden folgendermaßen bewiesen:

(a) Die bereits erwähnte Meßbarkeit von  $\mu$  impliziert sofort die Meßbarkeit von  $H^-$  — und die Stetigkeit von  $H^-(\kappa_0, \omega, \cdot)$  ist eine Konsequenz der Stetigkeit von  $\mu(\kappa_0, \omega, \kappa_0, \cdot)$ .

(b) Die geforderte Ungleichung folgt sofort aus der obigen Abschätzung für  $\mu(\kappa, \omega, \kappa_0, \xi_0)$ .

(c) Zum Beweis der Aussage (c) sei  $\nu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.63), sowie  $\xi_0 := \nu(\kappa_0)$ ,  $\nu^*(k) := \lambda^{(2)}(k; \kappa_0, \omega, H^-(\kappa_0, \omega, \xi_0))$ . Dann ist  $\nu^*$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.64), und  $\nu^* - \nu$  ist 1-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ .

Sei nun  $\kappa \in \mathbb{Z}$  beliebig und  $\xi^* := H^-(\kappa, \omega, \nu(\kappa))$ . Es wurde bereits gezeigt, daß  $\xi^*$  der eindeutig bestimmte Punkt des  $\mathbb{R}^{d^+}$  ist, für den die Differenz

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \kappa, \omega, \xi^*) - \lambda^{(1)}(\cdot; \kappa, \omega, \nu(\kappa))$$

1-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Dann impliziert aber die Identität

$$\lambda^{(1)}(k; \kappa, \omega, \nu(\kappa)) = \nu(k)$$

unmittelbar die 1-Quasibeschränktheit (bezüglich  $\omega$ ) der Abbildung  $\nu^*(\cdot) - \lambda^{(1)}(\cdot; \kappa, \omega, \nu(\kappa))$ , d.h.  $\nu^*(\cdot) = \lambda^{(2)}(\cdot; \kappa, \omega, \xi^*)$  und

$$H^-(\kappa, \omega, \nu(\kappa)) = \xi^* = \nu^*(\kappa).$$

Da  $\kappa \in \mathbb{Z}$  beliebig war, ist somit  $H^-(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.64), und zwar  $\nu^*$ .

(d) Die Aussage zur Periodizität von  $H^-$  läßt sich wie in Satz 1.5.3(a), (iii) zeigen, indem man die bereits bewiesene dynamische Charakterisierung des Punktes  $H^-(\kappa, \omega, \xi)$  verwendet.  $\diamond$

Das nächste Lemma behandelt die "duale" Situation.

**Lemma 1.7.2** Gegeben seien die beiden zufälligen Differenzgleichungen

$$\boxed{x_{k+1} = A^+(k, \omega)x_k + f_1(k, \omega, x_k)} \quad (1.66)$$

und

$$\boxed{x_{k+1} = A^+(k, \omega)x_k + f_2(k, \omega, x_k)} \quad (1.67)$$

mit meßbaren Abbildungen  $A^+ : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^{d^+})$  und  $f_1, f_2 : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$ . Es sei  $\Phi^+(m, n, \omega)$  die Übergangsabbildung der homogenen linearen Differenzgleichung  $x_{k+1} = A^+(k, \omega)x_k$ . Darüber hinaus gelte für beliebige  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^+}$ :

$$\|\Phi^+(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} \leq K \alpha_+^{m-n} \quad \text{für } m \leq n,$$

$$\|f_1(k, \omega, x)\|_{k+1, \omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f_1(k, \omega, x) - f_1(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{k, \omega},$$

$$\|f_2(k, \omega, x)\|_{k+1, \omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f_2(k, \omega, x) - f_2(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{k, \omega},$$

mit reellen Konstanten  $\alpha_+ > 1$ ,  $K \geq 1$ ,  $M \geq 0$  und  $0 \leq L < \frac{\alpha_+ - 1}{K}$ . Dann existieren alle  $\omega$ -Lösungen von (1.66) beziehungsweise (1.67) auf ganz  $\mathbb{Z}$ , sind dort eindeutig bestimmt, und die zugehörigen allgemeinen Lösungen  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  sind meßbar, sowie stetig bezüglich der letzten Variablen.

Ferner gibt es zu jeder Wahl von  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^+}$  einen eindeutig bestimmten Punkt  $H^+(\kappa, \omega, \xi) \in \mathbb{R}^{d^+}$ , so daß die Differenz

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \kappa, \omega, H^+(\kappa, \omega, \xi)) - \lambda^{(1)}(\cdot; \kappa, \omega, \xi)$$

1-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Die so erzeugte Abbildung  $H^+ : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  besitzt folgende Eigenschaften:

- (a)  $H^+$  ist meßbar und für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $H^+(\kappa, \omega, \cdot)$  stetig.  
 (b) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^+}$  ist die Abschätzung

$$\|H^+(\kappa, \omega, \xi) - \xi\|_{\kappa, \omega} \leq \frac{2KM}{\alpha_+ - 1 - KL}$$

erfüllt.

- (c) Ist  $\nu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (1.66), so ist die Abbildung  $H^+(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.67).  
 (d) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A^+$ ,  $f_1$  und  $f_2$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  bezüglich  $k$  überträgt sich auf die Abbildung  $H^+$ .

**Beweis:** Der Beweis kann völlig analog zum Beweis von Lemma 1.7.1 durchgeführt werden. Die Existenz der allgemeinen Lösungen von (1.66) und (1.67) im Sinne von (1.4) erhält man wie im Beweis von Lemma 1.2.6, die Aussagen zur Meßbarkeit (beziehungsweise zur Stetigkeit bezüglich der letzten Variablen) folgen direkt aus Lemma A.1.1 (beziehungsweise aus dem gleichmäßigen Kontraktionsprinzip).  $\diamond$

Das nun folgende dritte Lemma gibt Bedingungen an, unter denen eine nichtlineare zufällige Differenzengleichung einer linearen Gleichung topologisch äquivalent ist.

**Lemma 1.7.3** Für jede beliebige Wahl der Konstanten  $0 < \alpha_- < 1 < \alpha_+$ ,  $K \geq 1$  und  $M \geq 0$  gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Gegeben sei die zufällige Differenzengleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k + f^-(k, \omega, x_k)} \quad (1.68)$$

und die zugehörige homogene lineare zufällige Differenzengleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A^-(k, \omega)x_k} \quad (1.69)$$

mit meßbaren Abbildungen  $A^- : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^{d^-})$  und  $f^- : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ .  $\Phi^-(m, n, \omega)$  sei die Übergangsabbildung von (1.69). Des weiteren wird angenommen, daß alle  $\omega$ -Lösungen von (1.68) auf ganz  $\mathbb{Z}$  existieren, dort eindeutig bestimmt sind, und daß die allgemeine Lösung meßbar, sowie stetig bezüglich der letzten Variablen ist. Zu guter Letzt gelte für beliebige  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^-}$ :

$$\|\Phi^-(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} \leq K\alpha_-^{m-n} \quad \text{für } m \geq n,$$

$$\|f^-(k, \omega, x)\|_{k+1, \omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f^-(k, \omega, x) - f^-(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} \leq L\|x - \bar{x}\|_{k, \omega},$$

wobei  $0 \leq L < \frac{1-\alpha_-}{K}$ . Dann gibt es meßbare Abbildungen  $H^-$ ,  $\tilde{H}^- : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß  $H^-(\kappa, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{H}^-(\kappa, \omega, \cdot)$  für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  stetig sind, mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Ist  $\mu$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.68), so ist  $H^-(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.69).

- (ii) Ist  $\nu$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.69), so ist  $\tilde{H}^-(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.68).
- (iii) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  sind die Abbildungen  $H^-(\kappa, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{H}^-(\kappa, \omega, \cdot)$  einander invers, mithin Homöomorphismen auf dem  $\mathbb{R}^{d^-}$ .
- (iv) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A^-$  und  $f^-$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  bezüglich  $k$  überträgt sich auf die Abbildungen  $H^-$  und  $\tilde{H}^-$ .

Die zufälligen Differenzgleichungen (1.68) und (1.69) sind also topologisch äquivalent.

(b) Gegeben sei die zufällige Differenzgleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A^+(k, \omega)x_k + f^+(k, \omega, x_k)} \quad (1.70)$$

und die zugehörige homogene lineare zufällige Differenzgleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A^+(k, \omega)x_k} \quad (1.71)$$

mit meßbaren Abbildungen  $A^+ : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^{d^+})$  und  $f^+ : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$ .  $\Phi^+(m, n, \omega)$  sei die Übergangsabbildung von (1.71), und für beliebige  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^+}$  gelte:

$$\|\Phi^+(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} \leq K\alpha_+^{m-n} \quad \text{für } m \leq n,$$

$$\|f^+(k, \omega, x)\|_{k+1, \omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f^+(k, \omega, x) - f^+(k, \omega, \bar{x})\|_{k+1, \omega} \leq L\|x - \bar{x}\|_{k, \omega},$$

wobei  $0 \leq L < \frac{\alpha_+ - 1}{K}$ . Dann gibt es meßbare Abbildungen  $H^+, \tilde{H}^+ : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$ , so daß  $H^+(\kappa, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{H}^+(\kappa, \omega, \cdot)$  für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  stetig sind, mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Ist  $\mu$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.70), so ist  $H^+(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.71).
- (ii) Ist  $\nu$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.71), so ist  $\tilde{H}^+(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (1.70).
- (iii) Für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  sind die Abbildungen  $H^+(\kappa, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{H}^+(\kappa, \omega, \cdot)$  einander invers, mithin Homöomorphismen auf dem  $\mathbb{R}^{d^+}$ .
- (iv) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A^+$  und  $f^+$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  bezüglich  $k$  überträgt sich auf die Abbildungen  $H^+$  und  $\tilde{H}^+$ .

Die zufälligen Differenzgleichungen (1.70) und (1.71) sind also topologisch äquivalent.

**Beweis:** Aus Symmetriegründen wird nur (a) bewiesen — (b) ergibt sich völlig analog unter Verwendung von Lemma 1.7.2 an Stelle von Lemma 1.7.1.

Mit  $f_1(k, \omega, x) := f^-(k, \omega, x)$  und  $f_2(k, \omega, x) := 0$  liefert Lemma 1.7.1 eine meßbare Abbildung  $H^- : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , die bezüglich der letzten Variablen stetig ist, und die die in (i) und (iv) geforderten Eigenschaften besitzt.

Mit  $f_1(k, \omega, x) := 0$  und  $f_2(k, \omega, x) := f^-(k, \omega, x)$  dagegen liefert Lemma 1.7.1 eine meßbare Abbildung  $\tilde{H}^- : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , die ebenfalls bezüglich der letzten Variablen stetig ist, und die die in (ii) und (iv) geforderten Eigenschaften besitzt.

Es bleibt also nur noch (iii) zu zeigen. Dazu wird Lemma 1.7.1 ein drittes Mal angewandt, diesmal mit  $f_1(k, \omega, x) := f^-(k, \omega, x)$  und  $f_2(k, \omega, x) := f^-(k, \omega, x)$ . Bezeichnet dann  $\lambda(k; \kappa, \omega, \xi)$

die allgemeine Lösung von (1.68), so gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung  $H^* : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$  die Differenz

$$\lambda(\cdot; \kappa, \omega, H^*(\kappa, \omega, \xi)) - \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi)$$

1-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, und zwar  $H^*(\kappa, \omega, \xi) \equiv \xi$  auf  $\mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-}$ . Andererseits zeigen die obigen Definitionen von  $H^-$  und  $\tilde{H}^-$ , daß für jedes  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$  die Differenzen

$$\Phi^-(\cdot, \kappa, \omega)H^-(\kappa, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi)$$

und

$$\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \tilde{H}^-(\kappa, \omega, H^-(\kappa, \omega, \xi))) - \Phi^-(\cdot, \kappa, \omega)H^-(\kappa, \omega, \xi)$$

1-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  sind. Dann ist aber auch die Differenz

$$\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \tilde{H}^-(\kappa, \omega, H^-(\kappa, \omega, \xi))) - \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi)$$

1-quasibeschränkt für alle  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$  — und die Eindeutigkeitsaussage von Lemma 1.7.1 impliziert

$$\tilde{H}^-(\kappa, \omega, H^-(\kappa, \omega, \xi)) \equiv H^*(\kappa, \omega, \xi) \equiv \xi \quad \text{auf} \quad \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-}.$$

Analog läßt sich die Gültigkeit von  $H^-(\kappa, \omega, \tilde{H}^-(\kappa, \omega, \xi)) \equiv \xi$  auf  $\mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-}$  nachprüfen. Damit ist der Beweis von Lemma 1.7.3 abgeschlossen.  $\diamond$

**Bemerkung 1.7.4** Genügen die Abbildungen  $f^\pm$  in Lemma 1.7.3 den Identitäten

$$f^\pm(k, \omega, 0) = 0$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$ , dann liefert der obige Beweis sofort

$$H^\pm(\kappa, \omega, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{H}^\pm(\kappa, \omega, 0) = 0 \quad \text{für alle} \quad \kappa \in \mathbb{Z}, \omega \in \Omega.$$

In diesem Fall ist nämlich die triviale  $\omega$ -Lösung der gestörten zufälligen Differenzgleichung (1.68) beziehungsweise (1.70) die eindeutig bestimmte  $\omega$ -Lösung, die 1-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist.  $\square$

Nach diesen Vorbereitungen können nun die beiden zentralen Ergebnisse dieses Abschnittes bewiesen werden. Der folgende erste Satz ist eine zufällige nichtautonome Version des *klassischen Satzes von Hartman-Grobman*.

**Satz 1.7.5** Gegeben sei eine zufällige Differenzgleichung der Form

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k)} \quad (1.72)$$

die den zu Beginn von Abschnitt 1.4 aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2), (V3) und (V4) genügt. Ferner gelte

$$1 \notin (\alpha_{i,+} - \delta, \alpha_{i,-} + \delta),$$

für alle  $i = 1, \dots, p$ .

Dann gibt es eine positive Konstante  $L^* > 0$ , so daß (1.72) für  $0 \leq L < L^*$  den Voraussetzungen von Satz 1.4.4 genügt und der homogenen linearen zufälligen Differenzgleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k} \quad (1.73)$$

topologisch äquivalent ist, vermöge einer Abbildung  $H$  (gemäß Definition 1.1.1), die der Identität  $H(\kappa, \omega, 0) = 0$  für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  genügt und eine eventuelle Periodizität von  $A$ ,  $F$  und den Normen  $\|\cdot\|_{k, \omega}$  bezüglich  $k$  übernimmt. Darüber hinaus bildet die Abbildung  $H$  jede in einem zufälligen invarianten Faserbündel  $S^{i,j}(\omega)$  verlaufende  $\omega$ -Lösung auf eine  $\omega$ -Lösung von (1.73) ab, die in dem entsprechenden zufälligen invarianten Unterraumbündel verläuft, und umgekehrt.

**Beweis:** Zunächst existiert gemäß Satz 1.6.3 eine Konstante  $L_1^* > 0$ , so daß (1.72) für  $0 \leq L < L_1^*$  der entkoppelten Gleichung (1.58) topologisch äquivalent ist, vermöge einer Abbildung  $E$ . Des weiteren liefert der Beweis von Lemma 1.6.2 eine Konstante  $0 < L^* \leq L_1^*$ , so daß für alle  $0 \leq L < L^*$  die Ungleichungen

$$\|F_i(k, \omega, \pi^{i,i}(k, \omega, x^i)) - F_i(k, \omega, \pi^{i,i}(k, \omega, \bar{x}^i))\|_{k+1, \omega} \leq 2L \|x^i - \bar{x}^i\|_{k, \omega}$$

erfüllt sind, für beliebige  $i = 1, \dots, p$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x^i, \bar{x}^i \in \mathbb{R}^{d_i}$ , sowie

$$2L < \frac{\delta}{K}.$$

Dann genügt aber jede der Gleichungen

$$x_{k+1}^i = A_i(k, \omega)x_k^i + F_i(k, \omega, \pi^{i,i}(k, \omega, x_k^i)) \quad (1.74)$$

den Voraussetzungen von Lemma 1.7.3(a) oder (b), je nachdem ob  $1 \geq \alpha_{i,-} + \delta$  oder  $1 \leq \alpha_{i,+} - \delta$  gilt — und damit ist (1.74) der homogenen linearen Gleichung

$$x_{k+1}^i = A_i(k, \omega)x_k^i$$

topologisch äquivalent, vermöge einer Abbildung  $H^{(i)}$ , die wegen Bemerkung 1.7.4 die Identität  $H^{(i)}(\kappa, \omega, 0) \equiv 0$  auf  $\mathbb{Z} \times \Omega$  erfüllt. Definiert man abschließend für  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$H(\kappa, \omega, \xi) := (H^{(1)}(\kappa, \omega, E_1(\kappa, \omega, \xi)), \dots, H^{(p)}(\kappa, \omega, E_p(\kappa, \omega, \xi))),$$

und beachtet, daß  $\omega$ -Lösungen, die in einem zufälligen invarianten Unterraumbündel von (1.58) verlaufen, mittels  $H$  wieder in dieses Unterraumbündel abgebildet werden, so ist Satz 1.7.5 bewiesen.  $\diamond$

**Bemerkung 1.7.6** Man sieht sofort ein, daß im sogenannten *hyperbolischen Fall*, d.h. falls

$$1 \notin [\alpha_{i,+}, \alpha_{i,-}] \quad \text{für alle } i = 1, \dots, p$$

gilt, die Konstante  $\delta$  in (V1) stets so gewählt werden kann, daß Satz 1.7.5 anwendbar ist.  $\square$

Was ist aber im nicht-hyperbolischen Fall? Natürlich erhält man dann nur eine teilweise linearisierte Gleichung. Das entsprechende Ergebnis ist im nun folgenden *verallgemeinerten Satz von Hartman-Grobman* enthalten.

**Satz 1.7.7** Gegeben sei wieder eine zufällige Differenzgleichung der Form

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k)} \quad (1.75)$$

die den zu Beginn von Abschnitt 1.4 aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2), (V3) und (V4) genügt. Ferner gelte

$$1 \in [\alpha_{i,+}, \alpha_{i,-}],$$

für ein  $i \in \{1, \dots, p\}$ .

Dann gibt es eine positive Konstante  $L^* > 0$ , so daß (1.75) für  $0 \leq L < L^*$  den Voraussetzungen von Satz 1.4.4 genügt und der entkoppelten, teilweise linearen zufälligen Differenzgleichung

$$\boxed{\begin{aligned} x_{k+1}^1 &= A_1(k, \omega)x_k^1 \\ &\vdots \\ x_{k+1}^{i-1} &= A_{i-1}(k, \omega)x_k^{i-1} \\ x_{k+1}^i &= A_i(k, \omega)x_k^i + F_i(k, \omega, \pi^{i,i}(k, \omega, x_k^i)) \\ x_{k+1}^{i+1} &= A_{i+1}(k, \omega)x_k^{i+1} \\ &\vdots \\ x_{k+1}^p &= A_p(k, \omega)x_k^p \end{aligned}} \quad (1.76)$$

topologisch äquivalent ist, vermöge einer Abbildung  $H$  (gemäß Definition 1.1.1), die der Identität  $H(\kappa, \omega, 0) = 0$  für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$  genügt und eine eventuelle Periodizität von  $A$ ,  $F$  und den Normen  $\|\cdot\|_{k,\omega}$  bezüglich  $k$  übernimmt. Darüber hinaus bildet die Abbildung  $H$  jede in einem zufälligen invarianten Faserbündel  $S^{i,j}(\omega)$  verlaufende  $\omega$ -Lösung auf eine  $\omega$ -Lösung von (1.76) ab, die in dem entsprechenden zufälligen invarianten Unterraumbündel verläuft, und umgekehrt.

**Beweis:** Der Beweis kann völlig analog zum Beweis von Satz 1.7.5 durchgeführt werden — mit dem Unterschied, daß die  $i$ -te Teilgleichung nun nicht mehr linearisiert werden kann.  $\diamond$

Mit Satz 1.7.7 ist das Ende des ersten Kapitels dieser Arbeit erreicht. Wie die vergangenen Abschnitte gezeigt haben, kann das Verhalten gewisser nichtlinearer zufälliger Differenzgleichungen tatsächlich unter Verwendung einer zugeordneten linearen Gleichung studiert werden. Immer noch offen sind jedoch die bereits früher aufgeworfenen Fragen zur konkreten Anwendbarkeit dieser Ergebnisse. Wie sollen etwa die Normen  $\|\cdot\|_{k,\omega}$  gewählt werden, damit die Bedingungen an die Übergangsabbildungen  $\Phi_i$  der linearen Gleichung erfüllt sind? Sind die globalen Lipschitzbedingungen an den nichtlinearen Anteil nicht viel zu einschränkend? Die Beantwortung dieser Fragen ist dem dritten Kapitel vorbehalten. Zuvor sollen jedoch im nächsten Kapitel die zufälligen Differentialgleichungen behandelt werden.

## Kapitel 2

# Zufällige Differentialgleichungen

### 2.1 Grundlegende Begriffe und Definitionen

Im vorliegenden zweiten Kapitel dieser Arbeit sollen die bislang entwickelten Methoden auf den Fall zufälliger Differentialgleichungen übertragen werden — und dieser erste Abschnitt dient der Wiederholung grundlegender Definitionen und Ergebnisse, sowie der Festlegung der im folgenden verwendeten Notation.

Sei dazu  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges nichtleeres Intervall,  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein beliebiger Meßraum und  $P$  ein metrischer Raum. Weiter sei  $f : I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Abbildung, so daß  $f(\cdot, \omega, \cdot, p)$  für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  meßbar ist. Dann heißt eine Gleichung der Form

$$\dot{x} = f(t, \omega, x, p) \quad (2.1)$$

(*nichtautonome*) *parameterabhängige Differentialgleichung (mit Parametern  $\omega$  und  $p$ )*. Für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  heißt eine absolutstetige Abbildung  $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die auf einem nichtleeren Intervall  $J \subset I$  definiert ist,  *$\omega, p$ -Lösung von (2.1)*, falls die Abbildung  $f(\cdot, \omega, \lambda(\cdot), p)$  auf  $J$  lokal integrierbar und die Identität

$$\lambda(t) - \lambda(s) = \int_s^t f(\tau, \omega, \lambda(\tau), p) d\tau$$

für alle  $t, s \in J$  erfüllt ist, oder — äquivalent dazu<sup>1</sup> — die Gleichheit

$$\dot{\lambda}(t) = f(t, \omega, \lambda(t), p)$$

für Lebesgue-fast alle  $t \in J$  gilt. Genügt die Abbildung  $\lambda$  darüber hinaus der Identität  $\lambda(\tau_0) = \xi_0$ , für vorgegebene  $\tau_0 \in J$  und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ , so erfüllt  $\lambda$  die *Anfangsbedingung*

$$x(\tau_0) = \xi_0, \quad (2.2)$$

d.h.  $\lambda$  *löst das Anfangswertproblem (2.1), (2.2)*. Ist schließlich die Abbildung  $f$  sogar meßbar, so heißt (2.1) *zufällige Differentialgleichung mit Parameter  $p$* .

Was die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer (zufälligen) Differentialgleichung der Form (2.1) angeht, so sind wie im Fall der gewöhnlichen Differentialgleichungen — wie er etwa in

---

<sup>1</sup>Die Äquivalenz folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für absolutstetige Funktionen, wie er etwa in dem Buch von WALTER [40, Satz 9.23] enthalten ist.

AMANN [1], HALE [19] oder HARTMAN [22] behandelt wird — zusätzliche Voraussetzungen an  $f$  vonnöten, und zwar im wesentlichen eine lokale Lipschitz-Stetigkeit bezüglich  $x$ . Entsprechende Existenz- und Eindeigkeitssätze findet man in BUNKE [13] und HASMINSKII [23], ein für den Rahmen dieser Arbeit völlig ausreichender Satz ist im Abschnitt A.2 des Anhangs angegeben.

Sei nun angenommen, daß die zufällige Differentialgleichung (2.1) den Voraussetzungen des Satzes A.2.1 genügt. Bezeichnet dann  $\lambda(\cdot; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)$  die auf Grund dieses Satzes eindeutig bestimmte und auf ganz  $I$  existierende  $\omega_0, p_0$ -Lösung des Anfangswertproblems (2.1), (2.2), so ist die Abbildung

$$\lambda : I \times I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$$

meßbar, für beliebiges  $\omega_0 \in \Omega$  ist  $\lambda(\cdot; \cdot, \omega_0, \cdot, \cdot)$  stetig, und man nennt  $\lambda$  die *allgemeine Lösung von (2.1)*. Des weiteren überzeugt man sich leicht, daß die Identität

$$\lambda(t_2; \tau, \omega, \xi, p) = \lambda(t_2; t_1, \omega, \lambda(t_1; \tau, \omega, \xi, p), p) \quad (2.3)$$

für jede Wahl von  $\tau, t_1, t_2 \in I, \omega \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d$  und  $p \in P$  erfüllt ist.

Völlig analog zum diskreten Fall kann man auch auf der Klasse der zufälligen Differentialgleichungen einen Äquivalenzbegriff einführen. Diese nichtautonome Version der topologischen Äquivalenz autonomer gewöhnlicher Differentialgleichungen (man vergleiche etwa AMANN [1, p. 178]) ist Gegenstand der folgenden Definition.

**Definition 2.1.1** Gegeben seien zwei zufällige Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f_1(t, \omega, x) \quad (2.4)$$

und

$$\dot{x} = f_2(t, \omega, x) \quad (2.5)$$

mit einem nichtleeren Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und meßbaren Abbildungen  $f_1, f_2 : I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Dann heißen die Gleichungen (2.4) und (2.5) topologisch äquivalent vermöge  $H$ , wenn es eine Abbildung  $H : I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (a) Für beliebige  $\tau \in I$  und  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $H(\tau, \omega, \cdot)$  ein Homöomorphismus auf  $\mathbb{R}^d$  mit Umkehrabbildung  $H^{-1}(\tau, \omega, \cdot)$ , die Abbildungen  $H, H^{-1} : I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sind meßbar, und für beliebige  $\omega \in \Omega$  sind die beiden Abbildungen  $H(\cdot, \omega, \cdot)$  und  $H^{-1}(\cdot, \omega, \cdot)$  stetig.
- (b) Für jede beliebige  $\omega$ -Lösung  $\mu$  von (2.4) ist die Abbildung  $H(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung der Gleichung (2.5).
- (c) Für jede beliebige  $\omega$ -Lösung  $\nu$  von (2.5) ist die Abbildung  $H^{-1}(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.4).

Es leuchtet unmittelbar ein, daß in der obigen Definition die Bedingung (c) automatisch erfüllt ist, wenn (a) und (b) gelten, und die Gleichungen (2.4) und (2.5) den Voraussetzungen des Satzes A.2.1 genügen.

Von besonderem Interesse ist natürlich auch bei den zufälligen Differentialgleichungen der lineare Spezialfall. Seien dazu meßbare Abbildungen  $A : I \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^d)$  und  $b : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$

gegeben, so daß die Abbildungen  $A(\cdot, \omega)$  und  $b(\cdot, \omega)$  für beliebige  $\omega \in \Omega$  lokal integrierbar sind. Dann heißt die zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + b(t, \omega) \quad (2.6)$$

(inhomogene, nichtautonome) lineare zufällige Differentialgleichung<sup>2</sup>, und die zugehörige homogene lineare zufällige Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\dot{x} = A(t, \omega)x \quad (2.7)$$

Man überzeugt sich leicht, daß unter den oben gemachten Annahmen die Gleichungen (2.6) und (2.7) den Voraussetzungen des Satzes A.2.1 genügen, d.h. alle  $\omega$ -Lösungen dieser beiden Gleichungen existieren auf ganz  $I$  und sind dort eindeutig bestimmt. Entsprechendes gilt auch für die  $\omega$ -Lösung  $\Phi(\cdot, \tau_0, \omega) : I \rightarrow L(\mathbb{R}^d)$  des Anfangswertproblems

$$\dot{X} = A(t, \omega)X, \quad X(\tau_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^d}$$

im Raum  $L(\mathbb{R}^d)$ , und die so definierte Abbildung  $\Phi : I \times I \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^d)$  wird wie üblich *Übergangsabbildung von (2.7)* genannt. Mit ihrer Hilfe lassen sich die allgemeinen Lösungen von (2.6) beziehungsweise (2.7) leicht angeben. Während die allgemeine Lösung von (2.7) durch

$$\lambda(t; \tau_0, \omega, \xi_0) = \Phi(t, \tau_0, \omega)\xi_0 \quad (2.8)$$

gegeben ist, gilt für die allgemeine Lösung von (2.6) die sogenannte *Formel der Variation der Konstanten*

$$\lambda(t; \tau_0, \omega, \xi_0) = \Phi(t, \tau_0, \omega)\xi_0 + \int_{\tau_0}^t \Phi(t, s, \omega)b(s, \omega)ds, \quad (2.9)$$

deren Gültigkeit unter Verwendung des Satzes von Fubini (vergleiche BAUER [11, Korollar 23.7]) leicht verifiziert werden kann. Diese Formel wird — zusammen mit der nun folgenden Version des bekannten Gronwall-Lemmas — im weiteren Verlauf dieses Kapitels von fundamentaler Bedeutung sein.

**Lemma 2.1.2 (Gronwall-Lemma)** Gegeben seien ein nichtleeres Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , ein  $\tau_0 \in I$ , sowie lokal integrierbare, meßbare Abbildungen  $u, a, b : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Ist dann für alle  $t \in I$  die Abschätzung

$$u(t) \leq a(t) + \left| \int_{\tau_0}^t b(s)u(s)ds \right|$$

erfüllt, so erhält man für alle  $t \in I$  die Abschätzung

$$u(t) \leq a(t) + \left| \int_{\tau_0}^t a(s)b(s)e^{\left| \int_s^t b(\sigma)d\sigma \right|} ds \right|.$$

**Beweis:** Der Beweis dieses Lemmas kann völlig analog zu dem in AMANN [1, pp. 89f] angegebenen Beweis geführt werden, wenn man den in WALTER [40, Satz 9.23] enthaltenen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für absolutstetige Funktionen beachtet.  $\diamond$

<sup>2</sup>Setzt man nur die lokale Integrierbarkeit der Abbildungen  $A(\cdot, \omega)$  beziehungsweise  $b(\cdot, \omega)$  für beliebige  $\omega \in \Omega$  voraus, so spricht man wie im eingangs behandelten allgemeinen Fall von einer *parameterabhängigen linearen Differentialgleichung mit Parameter  $\omega$* . Diese Situation wird nur in den Hilfssätzen des nächsten Abschnittes vorkommen.

## 2.2 Quasibeschränkte Lösungen

Wie bereits erwähnt wurde, orientiert sich der Aufbau dieses zweiten Kapitels sehr stark an dem des letzten Kapitels. So ist es sicher nicht verwunderlich, daß auch bei den zufälligen Differentialgleichungen der Begriff der *Quasibeschränktheit* eine zentrale Rolle in der zu entwickelnden Theorie spielen wird. Bei der Übertragung des entsprechenden Begriffes aus Definition 1.2.1 auf den kontinuierlichen Fall sind jedoch zwei Dinge zu beachten:

- Die in Definition 1.2.1 auftauchenden Normen  $\|x\|_{k,\omega}$  mußten zwar meßbar von den Argumenten  $(k, \omega, x) \in \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d$  abhängen, weitere Bedingungen wurden jedoch nicht gestellt. Dagegen kann im kontinuierlichen Fall auf zusätzliche Bedingungen nicht verzichtet werden, da sonst zum Beispiel die eindeutige globale Lösbarkeit der zu untersuchenden zufälligen Differentialgleichung nicht aus den (unter Verwendung der Normen  $\|x\|_{t,\omega}$  formulierten!) Voraussetzungen folgen würde.
- Zum anderen wäre es ziemlich unnatürlich, den Begriff der  $\gamma$ -Quasibeschränktheit auf das Wachstum der Funktion  $\gamma^t$  zu beziehen. Wie im (in der Arbeit [41] behandelten) deterministischen Fall wird deshalb die Funktion  $e^{\gamma t}$  die Rolle von  $\gamma^t$  übernehmen.

Nach diesen Bemerkungen ist die folgende Definition sicher nicht mehr überraschend.

**Definition 2.2.1** Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein beliebiger Meßraum und  $\|\cdot\|_{t,\omega}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ , eine Familie von Normen auf dem  $\mathbb{R}^d$ , so daß die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ (t, \omega, x) & \mapsto & \|x\|_{t,\omega} \end{cases}$$

meßbar ist und die Abschätzung

$$\frac{1}{\ell(t,\omega)} \|x\| \leq \|x\|_{t,\omega} \leq \ell(t,\omega) \|x\| \quad (2.10)$$

für beliebige  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt, mit einer meßbaren Abbildung  $\ell : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ , wobei die Abbildung  $\ell(\cdot, \omega)$  lokal beschränkt sei, für beliebige  $\omega \in \Omega$ . Weiter sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall,  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine beliebige Abbildung und  $\gamma \in \mathbb{R}$  eine reelle Konstante.

- (a)  $\mu$  heißt  $\gamma^+$ -quasibeschränkt (bezüglich  $\omega \in \Omega$ ), falls  $I$  nach rechts unbeschränkt ist<sup>3</sup> und die folgende Abschätzung für ein  $\tau \in I$  gilt<sup>4</sup>:

$$\sup\{e^{-\gamma t} \|\mu(t)\|_{t,\omega} : t \geq \tau\} < \infty.$$

In diesem Fall definiert man  $\|\mu\|_{\tau,\omega,\gamma}^+ := \sup\{e^{-\gamma t} \|\mu(t)\|_{t,\omega} : t \geq \tau\}$ .

- (b)  $\mu$  heißt  $\gamma^-$ -quasibeschränkt (bezüglich  $\omega \in \Omega$ ), falls  $I$  nach links unbeschränkt ist und die Abschätzung

$$\sup\{e^{-\gamma t} \|\mu(t)\|_{t,\omega} : t \leq \tau\} < \infty$$

für ein  $\tau \in I$  erfüllt ist. In diesem Fall setzt man  $\|\mu\|_{\tau,\omega,\gamma}^- := \sup\{e^{-\gamma t} \|\mu(t)\|_{t,\omega} : t \leq \tau\}$ .

<sup>3</sup>Ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  heißt *nach rechts unbeschränkt*, wenn es von der Form  $(\tau, \infty)$  beziehungsweise  $[\tau, \infty)$  ist, für ein  $\tau \in \mathbb{R}$ , oder wenn  $I = \mathbb{R}$  gilt. Analog werden *nach links unbeschränkte* Intervalle definiert.

<sup>4</sup>Man überzeugt sich leicht, daß für stetiges  $\mu$  diese Abschätzung dann sogar für beliebiges  $\tau \in I$  erfüllt ist. (Dabei geht natürlich die lokale Beschränktheit der Abbildung  $\ell(\cdot, \omega)$  ein!)

(c) Schließlich heißt  $\mu$   $\gamma$ -quasibeschränkt (bezüglich  $\omega \in \Omega$ ), falls  $I = \mathbb{R}$  ist und  $\mu$  der Ungleichung

$$\sup\{e^{-\gamma t} \|\mu(t)\|_{t,\omega} : t \in \mathbb{R}\} < \infty$$

genügt. Man definiert dann  $\|\mu\|_{\omega,\gamma} := \sup\{e^{-\gamma t} \|\mu(t)\|_{t,\omega} : t \in \mathbb{R}\}$ .

Im kontinuierlichen Fall ist demnach eine gegebene Abbildung  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  genau dann  $\gamma$ -quasibeschränkt (bezüglich  $\omega$ ) für ein  $\gamma \in \mathbb{R}$ , wenn eine reelle Konstante  $C \geq 0$  mit

$$\|\mu(t)\|_{t,\omega} \leq C e^{\gamma t} \quad \text{für beliebige } t \in \mathbb{R}$$

existiert — und die Zahl  $\|\mu\|_{\omega,\gamma}$  ist gerade die kleinste derartige Konstante.

In Anlehnung an den Abschnitt 1.2 ist der Rest des vorliegenden Abschnittes der Untersuchung nichtlinearer Differentialgleichungen gewidmet, und zwar im Hinblick auf Quasibeschränktheitseigenschaften der entsprechenden Lösungen. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß alle im folgenden auftretenden Differentialgleichungen den Voraussetzungen des Satzes A.2.1 genügen, d.h. alle Lösungen dieser Gleichungen existieren auf dem ganzen zugrunde liegenden reellen Intervall, sind dort eindeutig bestimmt und die zugehörige allgemeine Lösung  $\lambda$  besitzt die im letzten Abschnitt aufgeführten Eigenschaften.

Den Anfang macht das kontinuierliche Analogon zu Lemma 1.2.2, das Bedingungen angibt, unter denen eine nichtlineare Differentialgleichung eine eindeutig bestimmte  $\gamma^-$ -quasibeschränkte Lösung besitzt, für ein  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

**Lemma 2.2.2** Gegeben sei die nichtautonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x + f(t, \omega, x, p) + f_0(t, \omega, p) \quad (2.11)$$

die von zwei Parametern  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  abhängt, wobei  $P$  ein beliebiger metrischer Raum ist. Das Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sei nach links unbeschränkt und die Abbildungen  $A^- : I \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^{d^-})$ ,  $f : I \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  und  $f_0 : I \times \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  seien beliebige Abbildungen, so daß  $A^-(\cdot, \omega)$  und  $f_0(\cdot, \omega, p)$  lokal integrierbar sind und die Abbildung  $f(\cdot, \omega, \cdot, p)$  meßbar ist, für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$ . Weiter sei  $\Phi^-(t, s, \omega)$  die parameterabhängige Übergangsabbildung der homogenen linearen Differentialgleichung  $\dot{x} = A^-(t, \omega)x$ .

Angenommen, für (feste) Parameterwerte  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  sind die folgenden drei Bedingungen für beliebige  $t, s \in I$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^-}$  erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\Phi^-(t, s, \omega)\|_{s,t,\omega} &\leq K e^{\alpha_-(t-s)} \quad \text{für } t \geq s, \\ f(t, \omega, 0, p) &= 0, \\ \|f(t, \omega, x, p) - f(t, \omega, \bar{x}, p)\|_{t,\omega} &\leq L \|x - \bar{x}\|_{t,\omega}, \end{aligned}$$

mit Konstanten  $\alpha_- \in \mathbb{R}$ ,  $K \geq 1$  und  $L \geq 0$ , sowie

$$\|\Phi^-(t, s, \omega)\|_{s,t,\omega} := \sup\{\|\Phi^-(t, s, \omega)z\|_{t,\omega} : z \in \mathbb{R}^{d^-}, \|z\|_{s,\omega} \leq 1\}.$$

Dann erhält man für beliebige  $\gamma > \alpha_- + KL$  und  $\tau \in I$  die folgende Aussage: Ist  $f_0(\cdot, \omega, p)$  eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte Abbildung, so existiert eine eindeutig bestimmte  $\omega, p$ -Lösung  $\mu(\cdot, \omega, p) : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  von (2.11), die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, und man erhält die Abschätzung:

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\tau,\omega,\gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha_- - KL} \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau,\omega,\gamma}^- \quad (2.12)$$

Ist darüber hinaus — im Fall  $I = \mathbb{R}$  — die Abbildung  $f_0(\cdot, \omega, p)$  sogar  $\gamma$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , so ist  $\mu(\cdot, \omega, p)$  ebenfalls  $\gamma$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\omega, \gamma} \leq \frac{K}{\gamma - \alpha_- - KL} \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\omega, \gamma}. \quad (2.13)$$

Sei nun zuletzt noch vorausgesetzt, daß (2.11) eine zufällige Differentialgleichung ist, d.h. daß die Abbildungen  $A^-$ ,  $f$  und  $f_0$  meßbar sind. Ferner sollen die obigen Bedingungen für alle  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  gelten. Dann folgt:

- (a) Die oben definierte Abbildung  $\mu : I \times \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  ist meßbar.
- (b) Sind die Abbildungen  $f(t, \omega, \cdot, \cdot)$  und  $f_0(t, \omega, \cdot)$  für beliebige  $t \in I$  und  $\omega \in \Omega$  stetig und ist die Menge  $\{\|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^- : p \in P\}$  beschränkt, für beliebige  $\omega \in \Omega$ , so ist auch die Abbildung  $\mu(\cdot, \omega, \cdot) : I \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  für alle  $\omega \in \Omega$  stetig.

**Beweis:** Der Beweis dieses Lemmas orientiert sich sehr stark an dem in Lemma 1.2.2 behandelten diskreten Fall. Zunächst sei angemerkt, daß die Abschätzung (2.13) eine unmittelbare Konsequenz aus (2.12) ist, wenn man

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\omega, \gamma} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^-$$

beachtet. Der Beweis der restlichen Aussagen wird in vier Teile zerlegt.

(I) Zunächst betrachtet man den Spezialfall  $I = (-\infty, \tau]$ ,  $f_0(t, \omega, p) \equiv 0$  auf  $I \times \Omega \times P$  und  $L = 0$ , d.h.  $f(t, \omega, x, p) \equiv 0$  auf  $I \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times P$ . Ist dazu  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  eine beliebige (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega$ -Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x \quad (2.14)$$

und ist  $\tau_0 \in I$  beliebig, so liefert die Darstellung (2.8) der allgemeinen Lösung von (2.14) für beliebige  $t \leq \tau_0$  die Beziehung

$$\mu(\tau_0) = \Phi^-(\tau_0, t, \omega)\mu(t),$$

und diese impliziert unter Verwendung der Voraussetzungen des Lemmas die Abschätzung

$$\|\mu(\tau_0)\|_{\tau_0, \omega} \leq \|\Phi^-(\tau_0, t, \omega)\|_{t, \tau_0, \omega} \|\mu(t)\|_{t, \omega} \leq K e^{\alpha_- \tau_0} \|\mu\|_{\tau_0, \omega, \gamma}^- \cdot e^{(\gamma - \alpha_-)t},$$

für beliebige  $t \leq \tau_0$ . Wegen der vorausgesetzten Ungleichung  $\gamma > \alpha_- + KL = \alpha_-$  konvergiert die rechte Seite der obigen Ungleichung für  $t \rightarrow -\infty$  gegen 0, d.h. es gilt  $\mu(\tau_0) = 0$  für alle  $\tau_0 \in I$  — und somit ist die triviale Lösung die einzige (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega$ -Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung (2.14).

(II) Sei nun  $I = (-\infty, \tau]$ , sei  $f_0$  beliebig und  $L = 0$ , d.h.  $f(t, \omega, x, p) \equiv 0$  auf  $I \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times P$ . Da es wegen (I) höchstens eine  $\omega, p$ -Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x + f_0(t, \omega, p) \quad (2.15)$$

geben kann, die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, müssen nur noch die Existenzfrage und die Abschätzung (2.12) behandelt werden. Was die Existenz angeht, so definiert man einfach

$$\mu(t, \omega, p) := \int_{-\infty}^t \Phi^-(t, s, \omega) f_0(s, \omega, p) ds$$

für beliebige  $t \in I$ . Dieses uneigentliche Integral existiert wegen  $\gamma > \alpha_- + KL = \alpha_-$  und der für beliebige  $s \leq t \leq \tau$  gültigen Abschätzung

$$\|\Phi^-(t, s, \omega) f_0(s, \omega, p)\|_{t, \omega} \leq K e^{\alpha_- t} \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \cdot e^{(\gamma - \alpha_-)s},$$

wenn man beachtet, daß die Normen  $\|\cdot\|_{t, \omega}$  und  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  äquivalent sind. Ferner liefert der Konvergenzsatz von Lebesgue leicht die Stetigkeit von  $\mu(\cdot, \omega, p)$ <sup>5</sup>.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß  $\mu(\cdot, \omega, p)$  eine  $\omega, p$ -Lösung von (2.15) auf  $I$  ist. Seien dazu  $t, t_0 \in I$  mit  $t_0 < t$  beliebig. Dann gilt offensichtlich die Identität

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (A^-(s, \omega) \mu(s, \omega, p) + f_0(s, \omega, p)) ds &= \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^s A^-(s, \omega) \Phi^-(s, \sigma, \omega) f_0(\sigma, \omega, p) d\sigma ds + \\ &+ \int_{t_0}^t f_0(s, \omega, p) ds. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Unter Verwendung des Satzes von Fubini (vergleiche BAUER [11, Korollar 23.7])<sup>6</sup> erhält man für das erste Integral auf der rechten Seite dieser Identität zunächst

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t \int_{-\infty}^s A^-(s, \omega) \Phi^-(s, \sigma, \omega) f_0(\sigma, \omega, p) d\sigma ds = \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} \int_{t_0}^t A^-(s, \omega) \Phi^-(s, \sigma, \omega) f_0(\sigma, \omega, p) ds d\sigma + \int_{t_0}^t \int_{\sigma}^t A^-(s, \omega) \Phi^-(s, \sigma, \omega) f_0(\sigma, \omega, p) ds d\sigma = \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} (\Phi^-(t, \sigma, \omega) f_0(\sigma, \omega, p) - \Phi^-(t_0, \sigma, \omega) f_0(\sigma, \omega, p)) d\sigma + \\ &\quad + \int_{t_0}^t (\Phi^-(t, \sigma, \omega) f_0(\sigma, \omega, p) - \Phi^-(\sigma, \sigma, \omega) f_0(\sigma, \omega, p)) d\sigma = \\ &= \mu(t, \omega, p) - \mu(t_0, \omega, p) - \int_{t_0}^t f_0(\sigma, \omega, p) d\sigma, \end{aligned}$$

und mit (2.16) folgt daraus schließlich die Beziehung

$$\mu(t, \omega, p) - \mu(t_0, \omega, p) = \int_{t_0}^t (A^-(s, \omega) \mu(s, \omega, p) + f_0(s, \omega, p)) ds,$$

<sup>5</sup> Ist  $t_0 \in I$  beliebig, aber fest, so konvergiert der Integrand in der Darstellung

$$\mu(t, \omega, p) = \int_{-\infty}^{\tau} \chi_{(-\infty, t]}(s) \Phi^-(t, s, \omega) f_0(s, \omega, p) ds$$

für  $t \rightarrow t_0$  Lebesgue-fast überall (nämlich zumindest für alle  $s \neq t_0$ ) gegen  $\chi_{(-\infty, t_0]}(s) \Phi^-(t_0, s, \omega) f_0(s, \omega, p)$ . Des weiteren gilt für beliebige  $t, s \in I$  — unter Verwendung von (2.10) — die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\chi_{(-\infty, t]}(s) \Phi^-(t, s, \omega) f_0(s, \omega, p)\| &\leq \ell(t, \omega) \|\chi_{(-\infty, t]}(s) \Phi^-(t, s, \omega) f_0(s, \omega, p)\|_{t, \omega} \leq \\ &\leq \ell(t, \omega) \cdot K e^{\alpha_- t} \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \cdot e^{(\gamma - \alpha_-)s}, \end{aligned}$$

d.h. wegen der lokalen Beschränktheit von  $\ell(\cdot, \omega)$  aus Definition 2.2.1 läßt sich der Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden — und damit konvergiert  $\mu(t, \omega, p)$  für  $t \rightarrow t_0$  tatsächlich gegen  $\mu(t_0, \omega, p)$ .

<sup>6</sup>Der Integrand ist wegen der vorausgesetzten lokalen Beschränktheit der Abbildung  $\ell(\cdot, \omega)$  aus Definition 2.2.1 und der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|A^-(s, \omega) \Phi^-(s, \sigma, \omega) f_0(\sigma, \omega, p)\| &\leq \ell(s, \omega) \|A^-(s, \omega)\|_{s, s, \omega} \|\Phi^-(s, \sigma, \omega)\|_{\sigma, s, \omega} \|f_0(\sigma, \omega, p)\|_{\sigma, \omega} \leq \\ &\leq \ell(s, \omega)^3 \|A^-(s, \omega)\| \cdot K e^{\alpha_- s} \cdot e^{(\gamma - \alpha_-)\sigma} \cdot \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \end{aligned}$$

auf der Menge  $\{(s, \sigma) : t_0 \leq s \leq t, \sigma \leq s\}$  integrierbar.

d.h.  $\mu(\cdot, \omega, p)$  löst in der Tat die Differentialgleichung (2.15).

Nun läßt sich der Beweis von (II) rasch zu Ende führen. Zunächst folgt die geforderte Abschätzung (2.12) unmittelbar aus der für alle  $t \leq \tau$  gültigen Beziehung

$$\begin{aligned} \|\mu(t, \omega, p)\|_{t, \omega} &\leq \int_{-\infty}^t \|\Phi^-(t, s, \omega)\|_{s, t, \omega} \|f_0(s, \omega, p)\|_{s, \omega} ds \leq \\ &\leq K e^{\alpha-t} \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \cdot \int_{-\infty}^t e^{(\gamma-\alpha)s} ds = \frac{K}{\gamma-\alpha} \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \cdot e^{\gamma t}, \end{aligned}$$

wobei die benötigte Dreiecksungleichung für  $\mathbb{R}^{d^-}$ -wertige Integrale in WALTER [40, p. 331] gefunden werden kann. Zu guter Letzt liefert die Definition von  $\mu(\cdot, \omega, p)$  unter Verwendung des Satzes 23.6 aus BAUER [11] leicht die Meßbarkeit der Abbildung  $\mu$ , sofern (2.15) eine zufällige Differentialgleichung ist und die Voraussetzungen des Lemmas für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  gelten. Die in (b) behauptete Stetigkeit bezüglich  $(t, p)$  ist wieder eine Konsequenz des Konvergenzsatzes von Lebesgue<sup>7</sup>.

(III) Auch in diesem dritten Teil des Beweises sei das zugrunde liegende Intervall von der Form  $I = (-\infty, \tau]$ . Darüber hinaus seien nun sowohl  $L \geq 0$  als auch  $f_0$  beliebig. Der Beweis der Aussagen des Lemmas für diese Situation verwendet zwei Fixpunktsätze aus dem Anhang. Sei dazu  $X_\omega$  der Banachraum aller stetigen Abbildungen  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  sind, versehen mit der Norm  $\|\cdot\|_{\tau, \omega, \gamma}^-$  aus Definition 2.2.1<sup>8</sup>. Dann genügen die Auswertungsabbildungen

$$\begin{cases} X_\omega &\rightarrow \mathbb{R}^{d^-} \\ \nu &\mapsto \nu(t) \end{cases}$$

zunächst wegen der für beliebige  $t \in I$  gültigen Abschätzung

$$\|\nu(t)\| \leq \ell(t, \omega) e^{\gamma t} \|\nu\|_{\tau, \omega, \gamma}^- ,$$

unter Beachtung der lokalen Beschränktheit von  $\ell(\cdot, \omega)$  gemäß Definition 2.2.1, der in Lemma A.1.3 geforderten Bedingung. Seien nun  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  wie in der Formulierung des Lemmas gewählt. Ferner sei  $\nu_{\omega, p} \in X_\omega$  beliebig. Dann erfüllt die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x + f(t, \omega, \nu_{\omega, p}(t), p) + f_0(t, \omega, p) \quad (2.17)$$

<sup>7</sup>Man vergleiche dazu die Ausführungen in Fußnote 5, unter Beachtung der vorausgesetzten Beschränktheit der Menge  $\{\|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^- : p \in P\}$ .

<sup>8</sup>Es ist leicht einzusehen, daß  $\|\cdot\|_{\tau, \omega, \gamma}^-$  tatsächlich eine Norm auf  $X_\omega$  ist. Was die Vollständigkeit von  $X_\omega$  angeht, sei  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Cauchy-Folge in  $X_\omega$ . Wegen der für beliebige  $t \in I$  und  $n, m \in \mathbb{N}$  gültigen Abschätzung

$$\|\nu_m(t) - \nu_n(t)\|_{t, \omega} \leq e^{\gamma t} \|\nu_m - \nu_n\|_{\tau, \omega, \gamma}^-$$

ist dann die Folge  $(\nu_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  für jedes  $t \in I$  konvergent, und man überzeugt sich sofort, daß durch

$$\nu(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(t)$$

eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte Abbildung definiert wird. Die noch fehlende Stetigkeit von  $\nu$  ist eine unmittelbare Konsequenz der für alle  $t \in I$  und  $n, m \in \mathbb{N}$  geltenden Abschätzung

$$\|\nu_m(t) - \nu_n(t)\| \leq \ell(t, \omega) e^{\gamma t} \|\nu_m - \nu_n\|_{\tau, \omega, \gamma}^- ,$$

die wegen der in Definition 2.2.1 vorausgesetzten lokalen Beschränktheit von  $\ell(\cdot, \omega)$  die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf beschränkten Teilmengen von  $I$  liefert.

wegen der für alle  $t \leq \tau$  gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t} \|f(t, \omega, \nu_{\omega, p}(t), p) + f_0(t, \omega, p)\|_{t, \omega} &\leq L e^{-\gamma t} \|\nu_{\omega, p}(t)\|_{t, \omega} + e^{-\gamma t} \|f_0(t, \omega, p)\|_{t, \omega} \leq \\ &\leq L \|\nu_{\omega, p}\|_{\tau, \omega, \gamma}^- + \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \end{aligned} \quad (2.18)$$

alle Voraussetzungen von (II), d.h. (2.17) besitzt eine eindeutig bestimmte (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte Lösung  $\nu_{\omega, p}^* : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ . Definiert man nun  $T_{\omega, p} \nu_{\omega, p} := \nu_{\omega, p}^*$ , so wird dadurch ein Operator  $T_{\omega, p} : X_\omega \rightarrow X_\omega$  erzeugt — und unter Verwendung von (II) und (2.18) erhält man die Abschätzung

$$\|T_{\omega, p} \nu_{\omega, p}\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha_-} (L \|\nu_{\omega, p}\|_{\tau, \omega, \gamma}^- + \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^-). \quad (2.19)$$

Des weiteren zeigt der bereits bewiesene Teil (II) leicht, daß die Operatorenfamilie  $T_{\omega, p}$ ,  $(\omega, p) \in \Omega \times P$ , der Bedingung (ii) von Lemma A.1.2 genügt, und für jedes  $\omega \in \Omega$  erfüllt die Familie  $T_{\omega, p}$ ,  $p \in P$ , die Bedingung (ii) von Lemma A.1.3.

Auch im vorliegenden kontinuierlichen Fall ist der Operator  $T_{\omega, p}$  eine Kontraktion auf  $X_\omega$ . Zum Nachweis dieser Behauptung seien  $\nu_1, \nu_2 \in X_\omega$  beliebig. Dann ist die Abbildung  $T_{\omega, p} \nu_1 - T_{\omega, p} \nu_2$  eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega, p$ -Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x + f(t, \omega, \nu_1(t), p) - f(t, \omega, \nu_2(t), p),$$

und eine Anwendung von (II) auf diese Differentialgleichung liefert die Abschätzung

$$\|T_{\omega, p} \nu_1 - T_{\omega, p} \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha_-} \|\nu_1 - \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^-.$$

Wegen  $\gamma > \alpha_- + KL$  ist der Operator  $T_{\omega, p}$  also in der Tat eine Kontraktion auf  $X_\omega$  — und somit besitzt er einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\mu(\cdot, \omega, p) \in X_\omega$ . Da — wie im diskreten Fall — eine Abbildung  $\nu \in X_\omega$  genau dann Fixpunkt von  $T_{\omega, p}$  ist, wenn  $\nu$  eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega, p$ -Lösung von (2.11) ist, folgt die erste Behauptung des Lemmas. Die gewünschte Ungleichung (2.12) folgt leicht aus der Abschätzung

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha_-} \|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^- + \frac{K}{\gamma - \alpha_-} \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau, \omega, \gamma}^-,$$

die eine unmittelbare Konsequenz aus  $T_{\omega, p} \mu(\cdot, \omega, p) = \mu(\cdot, \omega, p)$  und (2.19) ist. Zu guter Letzt folgen die Behauptungen in (a) und (b) sofort aus Lemma A.1.2 beziehungsweise Lemma A.1.3.

(IV) Sei nun abschließend  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges nach links unbeschränktes Intervall, sowie ferner  $\tau \in I$  beliebig, aber fest. Bezeichnet dann  $\tilde{\mu}(\cdot, \omega, p) : (-\infty, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  die von (III) garantierte Abbildung, falls nur die Einschränkung von (2.11) auf  $(-\infty, \tau]$  betrachtet wird, so überzeugt man sich leicht, daß durch

$$\mu(t, \omega, p) := \lambda(t; \tau, \omega, \tilde{\mu}(\tau, \omega, p), p)$$

eine Abbildung  $\mu(\cdot, \omega, p) : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  definiert wird, die allen Aussagen des obigen Lemmas genügt. Damit ist Lemma 2.2.2 vollständig bewiesen.  $\diamond$

Als nächstes soll das kontinuierliche Analogon zu Lemma 1.2.4 angegeben werden, das untersucht, unter welchen Bedingungen alle  $\omega$ -Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung  $\gamma^+$ -quasibeschränkt (bezüglich  $\omega$ ) sind, für ein  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

**Lemma 2.2.3** Gegeben sei die nichtautonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x + f(t, \omega, x) + f_0(t, \omega) \quad (2.20)$$

die von einem Parameter  $\omega \in \Omega$  abhängt. Das Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sei nach rechts unbeschränkt,  $A^- : I \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^{d^-})$ ,  $f : I \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  und  $f_0 : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  seien beliebige Abbildungen, so daß die Abbildungen  $A^-(\cdot, \omega)$  und  $f_0(\cdot, \omega)$  lokal integrierbar sind und die Abbildung  $f(\cdot, \omega, \cdot)$  meßbar ist, für beliebige  $\omega \in \Omega$ . Weiter sei  $\Phi^-(t, s, \omega)$  die parameterabhängige Übergangsabbildung der homogenen linearen Differentialgleichung  $\dot{x} = A^-(t, \omega)x$ .

Angenommen, für einen (festen) Parameterwert  $\omega \in \Omega$  sind die folgenden drei Bedingungen für beliebige  $t, s \in I$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^-}$  erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\Phi^-(t, s, \omega)\|_{s, t, \omega} &\leq K e^{\alpha_-(t-s)} \quad \text{für } t \geq s, \\ f(t, \omega, 0) &= 0, \\ \|f(t, \omega, x) - f(t, \omega, \bar{x})\|_{t, \omega} &\leq L \|x - \bar{x}\|_{t, \omega}, \end{aligned}$$

mit Konstanten  $\alpha_- \in \mathbb{R}$ ,  $K \geq 1$  und  $L \geq 0$ . Dann erhält man für beliebige  $\gamma > \alpha_- + KL$  und  $\tau \in I$ : Ist die Abbildung  $f_0(\cdot, \omega)$   $\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , so ist jede beliebige  $\omega$ -Lösung  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  von (2.20) ebenfalls  $\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  und es gilt die Abschätzung:

$$\|\mu\|_{\tau, \omega, \gamma}^+ \leq K e^{-\gamma\tau} \|\mu(\tau)\|_{\tau, \omega} + \frac{K}{\gamma - \alpha_- - KL} \|f_0(\cdot, \omega)\|_{\tau, \omega, \gamma}^+.$$

Ist darüber hinaus  $I = \mathbb{R}$  und sind  $\mu, \mu^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  zwei  $\omega$ -Lösungen von (2.20), so erhält man für beliebige  $t, \tau \in \mathbb{R}$  mit  $t \leq \tau$  die Ungleichung:

$$\|\mu(t) - \mu^*(t)\|_{t, \omega} \geq \frac{1}{K} e^{\gamma(t-\tau)} \|\mu(\tau) - \mu^*(\tau)\|_{\tau, \omega}.$$

**Beweis:** Auch dieser Beweis orientiert sich an seinem diskreten Vorbild. Sei also  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (2.20) und  $\tau \in I$  beliebig, aber fest. Wegen der Formel der Variation der Konstanten (2.9) erhält man zunächst für alle  $t \geq \tau$  die Beziehung

$$\mu(t) = \Phi^-(t, \tau, \omega)\mu(\tau) + \int_{\tau}^t \Phi^-(t, s, \omega)(f(s, \omega, \mu(s)) + f_0(s, \omega))ds,$$

und daraus die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\mu(t)\|_{t, \omega} &\leq K e^{\alpha_-(t-\tau)} \|\mu(\tau)\|_{\tau, \omega} + K e^{\alpha_-t} \int_{\tau}^t e^{-\alpha_-s} (L \|\mu(s)\|_{s, \omega} + \|f_0(s, \omega)\|_{s, \omega}) ds \leq \\ &\leq K e^{\alpha_-t} \left( e^{-\alpha_- \tau} \|\mu(\tau)\|_{\tau, \omega} + L \int_{\tau}^t e^{-\alpha_-s} \|\mu(s)\|_{s, \omega} ds + \right. \\ &\quad \left. + \|f_0(\cdot, \omega)\|_{\tau, \omega, \gamma}^+ \int_{\tau}^t e^{(\gamma - \alpha_-)s} ds \right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\Lambda(t) := e^{-\alpha_-t} \|\mu(t)\|_{t, \omega}$$

und

$$\Gamma(t) := Ke^{-\alpha-\tau} \|\mu(\tau)\|_{\tau,\omega} + K \|f_0(\cdot, \omega)\|_{\tau,\omega,\gamma}^+ \int_{\tau}^t e^{(\gamma-\alpha)s} ds$$

läßt sich die letzte Ungleichung in die Form

$$\Lambda(t) \leq \Gamma(t) + KL \int_{\tau}^t \Lambda(s) ds \quad \text{für alle } t \geq \tau$$

bringen — und eine Anwendung des Gronwall-Lemmas 2.1.2 liefert nach einigen Umformungen (wie im Beweis von Lemma 1.2.3 in [41])

$$\Lambda(t) \leq e^{(\gamma-\alpha)t} \left( Ke^{-\gamma\tau} \|\mu(\tau)\|_{\tau,\omega} + \frac{K}{\gamma-\alpha- - KL} \|f_0(\cdot, \omega)\|_{\tau,\omega,\gamma}^+ \right),$$

sowie schließlich

$$e^{-\gamma t} \|\mu(t)\|_{t,\omega} = \Lambda(t) e^{(\alpha-\gamma)t} \leq Ke^{-\gamma\tau} \|\mu(\tau)\|_{\tau,\omega} + \frac{K}{\gamma-\alpha- - KL} \|f_0(\cdot, \omega)\|_{\tau,\omega,\gamma}^+$$

für beliebige  $t \geq \tau$ . Daraus folgt sofort die gewünschte Abschätzung für  $\|\mu\|_{\tau,\omega,\gamma}^+$ .

Ist nun abschließend  $I = \mathbb{R}$  und sind  $\mu, \mu^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  zwei  $\omega$ -Lösungen von (2.20), so ist die durch

$$\nu(t) := \mu(t) - \mu^*(t)$$

definierte Abbildung  $\nu$  offensichtlich eine  $\omega$ -Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x + f(t, \omega, x + \mu^*(t)) - f(t, \omega, \mu^*(t)),$$

und der bereits bewiesene Teil des Lemmas liefert wie im Beweis von Lemma 1.2.4 für die allgemeine Lösung  $\lambda$  dieser Gleichung die Abschätzung

$$\|\lambda(\tau; t, \omega, x)\|_{\tau,\omega} \leq Ke^{\gamma(\tau-t)} \|x\|_{t,\omega},$$

für beliebige  $t, \tau \in \mathbb{R}$  mit  $t \leq \tau$  und  $x \in \mathbb{R}^{d^-}$ . Unter Verwendung von (2.3) folgt daraus schließlich die gewünschte Ungleichung

$$\|\nu(\tau)\|_{\tau,\omega} = \|\lambda(\tau; t, \omega, \nu(t))\|_{\tau,\omega} \leq Ke^{\gamma(\tau-t)} \|\nu(t)\|_{t,\omega}.$$

Damit ist alles bewiesen. ◇

Wie im Abschnitt 1.2 des letzten Kapitels sollen abschließend noch die dualen Versionen der beiden obigen Lemmata 2.2.2 und 2.2.3 angegeben werden. Zunächst wird das kontinuierliche Gegenstück zu Lemma 1.2.5 formuliert.

**Lemma 2.2.4** *Gegeben sei die nichtautonome Differentialgleichung*

$$\boxed{\dot{x} = A^+(t, \omega)x + f(t, \omega, x, p) + f_0(t, \omega, p)} \quad (2.21)$$

die von zwei Parametern  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  abhängt, wobei  $P$  ein beliebiger metrischer Raum ist. Das Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sei nach rechts unbeschränkt und die Abbildungen  $A^+ : I \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^{d^+})$ ,  $f : I \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  und  $f_0 : I \times \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  seien beliebige Abbildungen, so

daß  $A^+(\cdot, \omega)$  und  $f_0(\cdot, \omega, p)$  lokal integrierbar sind und die Abbildung  $f(\cdot, \omega, \cdot, p)$  meßbar ist, für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$ . Weiter sei  $\Phi^+(t, s, \omega)$  die parameterabhängige Übergangsabbildung der homogenen linearen Differentialgleichung  $\dot{x} = A^+(t, \omega)x$ .

Angenommen, für (feste) Parameterwerte  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  sind die folgenden drei Bedingungen für beliebige  $t, s \in I$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^+}$  erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(t, s, \omega)\|_{s,t,\omega} &\leq K e^{\alpha_+(t-s)} \quad \text{für } t \leq s, \\ f(t, \omega, 0, p) &= 0, \\ \|f(t, \omega, x, p) - f(t, \omega, \bar{x}, p)\|_{t,\omega} &\leq L \|x - \bar{x}\|_{t,\omega}, \end{aligned}$$

mit Konstanten  $\alpha_+ \in \mathbb{R}$ ,  $K \geq 1$  und  $L \geq 0$ . Dann erhält man für beliebige  $\gamma < \alpha_+ - KL$  und  $\tau \in I$  die folgende Aussage: Ist  $f_0(\cdot, \omega, p)$  eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^+$ -quasibeschränkte Abbildung, so existiert eine eindeutig bestimmte  $\omega, p$ -Lösung  $\mu(\cdot, \omega, p) : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  von (2.21), die  $\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, und man erhält die Abschätzung:

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\tau,\omega,\gamma}^+ \leq \frac{K}{\alpha_+ - \gamma - KL} \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau,\omega,\gamma}^+.$$

Ist darüber hinaus — im Fall  $I = \mathbb{R}$  — die Abbildung  $f_0(\cdot, \omega, p)$  sogar  $\gamma$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , so ist  $\mu(\cdot, \omega, p)$  ebenfalls  $\gamma$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, \omega, p)\|_{\omega,\gamma} \leq \frac{K}{\alpha_+ - \gamma - KL} \|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\omega,\gamma}.$$

Sei nun zuletzt noch vorausgesetzt, daß (2.21) eine zufällige Differentialgleichung ist, d.h. daß die Abbildungen  $A^+$ ,  $f$  und  $f_0$  meßbar sind. Ferner sollen die obigen Bedingungen für alle  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  gelten. Dann folgt:

- (a) Die oben definierte Abbildung  $\mu : I \times \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  ist meßbar.
- (b) Sind die Abbildungen  $f(t, \omega, \cdot, \cdot)$  und  $f_0(t, \omega, \cdot)$  für beliebige  $t \in I$  und  $\omega \in \Omega$  stetig und ist die Menge  $\{\|f_0(\cdot, \omega, p)\|_{\tau,\omega,\gamma}^+ : p \in P\}$  beschränkt, für beliebige  $\omega \in \Omega$ , so ist auch die Abbildung  $\mu(\cdot, \omega, \cdot) : I \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  für alle  $\omega \in \Omega$  stetig.

**Beweis:** Der Beweis kann völlig analog zum Beweis des Lemmas 2.2.2 geführt werden. Im Beweisschritt (II) muß nun jedoch die Abbildung  $\mu$  als

$$\mu(t, \omega, p) := - \int_t^\infty \Phi^+(t, s, \omega) f_0(s, \omega, p) ds$$

definiert werden. ◇

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch das kontinuierliche Analogon zu Lemma 1.2.6 aus Abschnitt 1.2 angegeben werden.

**Lemma 2.2.5** Gegeben sei die nichtautonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^+(t, \omega)x + f(t, \omega, x) + f_0(t, \omega) \quad (2.22)$$

die von einem Parameter  $\omega \in \Omega$  abhängt. Das Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sei nach links unbeschränkt,  $A^+ : I \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^{d^+})$ ,  $f : I \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  und  $f_0 : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  seien beliebige Abbildungen, so daß die Abbildungen  $A^+(\cdot, \omega)$  und  $f_0(\cdot, \omega)$  lokal integrierbar sind und die Abbildung  $f(\cdot, \omega, \cdot)$  meßbar ist, für beliebige  $\omega \in \Omega$ . Weiter sei  $\Phi^+(t, s, \omega)$  die parameterabhängige Übergangsabbildung der homogenen linearen Differentialgleichung  $\dot{x} = A^+(t, \omega)x$ .

Angenommen, für einen (festen) Parameterwert  $\omega \in \Omega$  sind die folgenden drei Bedingungen für beliebige  $t, s \in I$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^+}$  erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(t, s, \omega)\|_{s, t, \omega} &\leq K e^{\alpha_+(t-s)} \quad \text{für } t \leq s, \\ f(t, \omega, 0) &= 0, \\ \|f(t, \omega, x) - f(t, \omega, \bar{x})\|_{t, \omega} &\leq L \|x - \bar{x}\|_{t, \omega}, \end{aligned}$$

mit Konstanten  $\alpha_+ \in \mathbb{R}$ ,  $K \geq 1$  und  $L \geq 0$ . Dann erhält man für beliebige  $\gamma < \alpha_+ - KL$  und  $\tau \in I$ : Ist die Abbildung  $f_0(\cdot, \omega)$   $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , so ist jede beliebige  $\omega$ -Lösung  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  von (2.22) ebenfalls  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  und es gilt die Abschätzung:

$$\|\mu\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq K e^{-\gamma\tau} \|\mu(\tau)\|_{\tau, \omega} + \frac{K}{\alpha_+ - \gamma - KL} \|f_0(\cdot, \omega)\|_{\tau, \omega, \gamma}^-.$$

Ist darüber hinaus  $I = \mathbb{R}$  und sind  $\mu, \mu^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  zwei  $\omega$ -Lösungen von (2.22), so erhält man für beliebige  $t, \tau \in \mathbb{R}$  mit  $t \geq \tau$  die Ungleichung:

$$\|\mu(t) - \mu^*(t)\|_{t, \omega} \geq \frac{1}{K} e^{\gamma(t-\tau)} \|\mu(\tau) - \mu^*(\tau)\|_{\tau, \omega}.$$

**Beweis:** Der Beweis kann vom Beweis des Lemmas 2.2.3 fast wortwörtlich abgeschrieben werden.  $\diamond$

## 2.3 Zufällige invariante Mannigfaltigkeiten

Nachdem jetzt die kontinuierlichen Analoga der Lemmata 1.2.2, 1.2.4, 1.2.5 und 1.2.6 vorliegen, kann in diesem Abschnitt damit begonnen werden, auch für nichtautonome zufällige Differentialgleichungen ein möglichst vollständiges geometrisches Bild vom Verhalten der Lösungen zu entwickeln.

Der erste — und, wie sich bereits im letzten Kapitel gezeigt hat, vielleicht wichtigste — Schritt in diese Richtung ist der folgende allgemeine Existenzsatz für zufällige invariante Faserbündel, die im vorliegenden kontinuierlichen Fall in Wirklichkeit sogar zufällige invariante Mannigfaltigkeiten in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  sind.

**Satz 2.3.1** Gegeben sei die parameterabhängige zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A^+(t, \omega) & 0 \\ 0 & A^-(t, \omega) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} F^+(t, \omega, x, p) \\ F^-(t, \omega, x, p) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

mit einem beliebigen metrischen Raum  $P$ , sowie meßbaren Abbildungen  $A^\pm : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^{d^\pm})$  und  $F^\pm : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^\pm}$ , wobei  $\mathbb{R}^d := \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-}$ . Die Abbildungen  $A^\pm(\cdot, \omega)$  seien lokal integrierbar, die Abbildungen  $F^\pm(t, \omega, \cdot, \cdot)$  seien stetig, für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$ , und darüber hinaus gelte:

- (1) Die Übergangsabbildungen  $\Phi^\pm(t, s, \omega)$  der homogenen linearen Differentialgleichungen  $\dot{x}^\pm = A^\pm(t, \omega)x^\pm$  genügen den Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(t, s, \omega)\|_{s,t,\omega} &\leq Ke^{\alpha_+(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s, \\ \|\Phi^-(t, s, \omega)\|_{s,t,\omega} &\leq Ke^{\alpha_-(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s \end{aligned}$$

mit  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ , sowie reellen Konstanten  $\alpha_+ > \alpha_-$  und  $K \geq 1$ . Dabei bezeichnet  $\|\cdot\|_{t,\omega}$  je eine Norm auf  $\mathbb{R}^{d^+}$  beziehungsweise  $\mathbb{R}^{d^-}$  gemäß Definition 2.2.1. Ferner sei

$$0 < \delta < \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2}$$

beliebig, aber fest gewählt.

- (2) Für beliebige  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  gilt  $F^\pm(t, \omega, 0, p) = 0$ .

- (3) Für alle  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$  und  $p \in P$  sind die Abschätzungen

$$\|F^\pm(t, \omega, x, p) - F^\pm(t, \omega, \bar{x}, p)\|_{t,\omega} \leq L\|x - \bar{x}\|_{t,\omega}$$

erfüllt, mit  $0 \leq L < \frac{\delta}{2K}$  und

$$\|x\|_{t,\omega} := \|x^+\|_{t,\omega} + \|x^-\|_{t,\omega},$$

für beliebige  $x = (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-} = \mathbb{R}^d$ .

Zu guter Letzt sei

$$\lambda = (\lambda^+, \lambda^-) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+} \times \mathbb{R}^{d^-}$$

die allgemeine Lösung von (2.23) gemäß Satz A.2.1. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $s^+ : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß ein Punkt  $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  genau dann in der zufälligen (parameterabhängigen) Menge

$$S^+(\omega, p) := \{(t, x^+, s^+(t, \omega, x^+, p)) : t \in \mathbb{R}, x^+ \in \mathbb{R}^{d^+}\}$$

enthalten ist, wenn die Lösung  $\lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi, p)$  eine  $\gamma^-$ -quasibeschränkte Abbildung bezüglich  $\omega$  ist, für jedes beliebige  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$ . Die Abbildung  $s^+$  besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i) Die Abbildung  $s^+$  ist meßbar, es gilt die Abschätzung

$$\|s^+(\tau, \omega, \xi_1^+, p) - s^+(\tau, \omega, \xi_2^+, p)\|_{\tau,\omega} \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\tau,\omega}$$

sowie die Identität  $s^+(\tau, \omega, 0, p) = 0$  und die Abbildung  $s^+(\cdot, \omega, \cdot, \cdot)$  ist stetig, für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi_1^+, \xi_2^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  und  $p \in P$ .

- (ii) Der Graph  $S^+(\omega, p)$  ist eine zufällige invariante Mannigfaltigkeit für (2.23) in folgendem Sinne: Die Inklusion  $(\tau, \xi) \in S^+(\omega, p)$  impliziert  $(t, \lambda(t; \tau, \omega, \xi, p)) \in S^+(\omega, p)$  für beliebige  $t \in \mathbb{R}$ .

(iii) Sind für ein  $\omega \in \Omega$  und ein  $p \in P$  die Abbildungen  $A^\pm$  und  $F^\pm$ , sowie die Normen  $\|\cdot\|_{t,\omega}$  periodisch in  $t$  mit Periode  $\Theta \in \mathbb{R}^+$ , d.h. gelten für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  die Identitäten

$$\begin{aligned} A^\pm(t + \Theta, \omega) &= A^\pm(t, \omega) \\ F^\pm(t + \Theta, \omega, \xi, p) &= F^\pm(t, \omega, \xi, p) \\ \|\xi\|_{t+\Theta, \omega} &= \|\xi\|_{t, \omega} \end{aligned}$$

so gilt dies auch für  $s^+$ , d.h. man erhält

$$s^+(t + \Theta, \omega, \xi^+, p) = s^+(t, \omega, \xi^+, p),$$

für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  und  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$ .

(b) Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $s^- : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times P \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$ , so daß ein Punkt  $(\tau, \xi)$  genau dann in der zufälligen (parameterabhängigen) Menge

$$\mathcal{S}^-(\omega, p) := \{(t, s^-(t, \omega, x^-, p), x^-) : t \in \mathbb{R}, x^- \in \mathbb{R}^{d^-}\}$$

enthalten ist, wenn  $\lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi, p)$  eine  $\gamma^+$ -quasibeschränkte Abbildung bezüglich  $\omega$  ist, für jedes beliebige  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$ . Die Abbildung  $s^-$  besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Abbildung  $s^-$  ist meßbar, es gilt die Abschätzung

$$\|s^-(\tau, \omega, \xi_1^-, p) - s^-(\tau, \omega, \xi_2^-, p)\|_{\tau, \omega} \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi_1^- - \xi_2^-\|_{\tau, \omega}$$

sowie die Identität  $s^-(\tau, \omega, 0, p) = 0$  und die Abbildung  $s^-(\cdot, \omega, \cdot, \cdot)$  ist stetig, für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi_1^-, \xi_2^- \in \mathbb{R}^{d^-}$  und  $p \in P$ .

(ii) Der Graph  $\mathcal{S}^-(\omega, p)$  ist eine zufällige invariante Mannigfaltigkeit für (2.23) in obigem Sinne.

(iii) Wie oben übertragen sich Periodizitätseigenschaften von  $A^\pm$ ,  $F^\pm$  und  $\|\cdot\|_{t,\omega}$  bezüglich  $t$  auf die Abbildung  $s^-$ .

**Beweis:** Der Beweis wird analog zum Beweis des Satzes 1.3.1 geführt — und somit werden aus Symmetriegründen nur die in (a) enthaltenen Aussagen bewiesen. Dazu soll zunächst die folgende Aussage verifiziert werden:

Zu jeder Wahl von  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$ ,  $p \in P$  und  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$  gibt es genau einen Punkt  $s_\gamma^+(\tau, \omega, \xi^+, p) \in \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß

$$\lambda^-(\cdot; \tau, \omega, \xi^+, s_\gamma^+(\tau, \omega, \xi^+, p), p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$$

$\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Die Abbildung  $s_\gamma^+(\tau, \omega, \xi^+, \cdot)$  ist stetig, für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$ .

Zum Nachweis dieser Aussage seien zunächst  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$  beliebig, aber fest. Des weiteren sei  $I := (-\infty, \tau]$  und  $X_{\tau, \omega}$  sei der Banachraum aller stetigen Abbildungen  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  sind, versehen mit der Norm  $\|\cdot\|_{\tau, \omega, \gamma}$ .

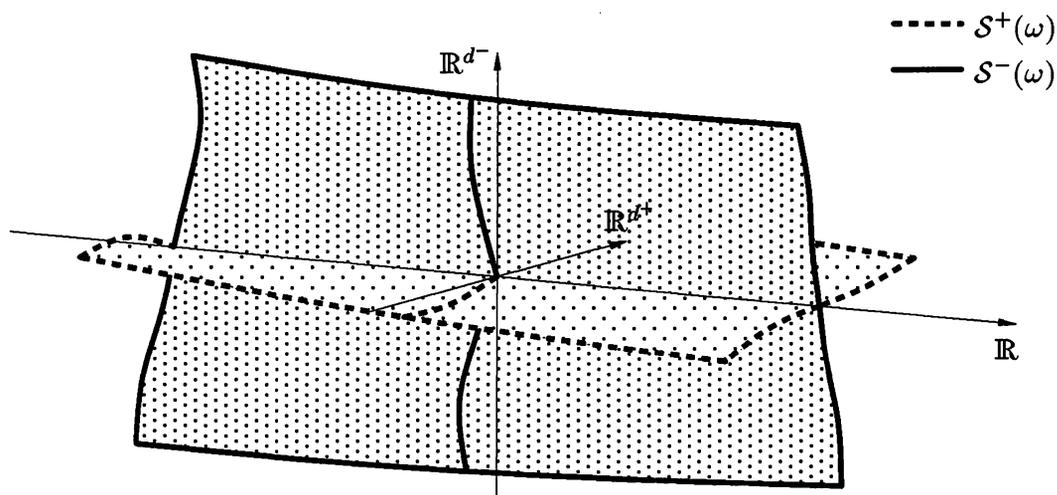


Abbildung 2.1: Zufällige invariante Mannigfaltigkeiten

Seien nun  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  und  $p \in P$  beliebig, aber fest gewählt. Ferner sei  $\nu_p \in X_{\tau, \omega}$  beliebig. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x}^+ = A^+(t, \omega)x^+ + F^+(t, \omega, x^+, \nu_p(t), p) \quad , \quad t \in I \quad , \quad x^+(\tau) = \xi^+ \quad (2.24)$$

gemäß Satz A.2.1 eine eindeutig bestimmte  $\omega, p$ -Lösung  $\mu_p : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$ . Darüber hinaus ist die Abbildung  $\mu_p(t)$  stetig, falls die Abbildung  $\nu_p(t)$  für jedes  $t \in I$  stetig ist. Wegen Lemma 2.2.5 ist die Abbildung  $\mu_p$  sogar  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  und es gilt

$$\|\mu_p\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq K e^{-\gamma\tau} \|\xi^+\|_{\tau, \omega} + \frac{KL}{\alpha_+ - \gamma - KL} \|\nu_p\|_{\tau, \omega, \gamma}^- .$$

Als nächstes soll Lemma 2.2.2 auf die Differentialgleichung

$$\dot{x}^- = A^-(t, \omega)x^- + F^-(t, \omega, \mu_p(t), \nu_p(t), p) \quad , \quad t \in I \quad (2.25)$$

angewandt werden. Dies ist wegen der für alle  $t \in I$  gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} & e^{-\gamma t} \|F^-(t, \omega, \mu_p(t), \nu_p(t), p)\|_{t, \omega} \leq \\ & \leq L \|\mu_p\|_{\tau, \omega, \gamma}^- + L \|\nu_p\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \\ & \leq K L e^{-\gamma\tau} \|\xi^+\|_{\tau, \omega} + \left( L + \frac{KL^2}{\alpha_+ - \gamma - KL} \right) \|\nu_p\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \end{aligned} \quad (2.26)$$

tatsächlich möglich und liefert eine eindeutig bestimmte  $\omega, p$ -Lösung  $\nu_p^* : I \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  von (2.25), die  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Damit läßt sich schließlich ein Operator  $T_{\tau, \omega, \xi^+, p}$  durch

$$T_{\tau, \omega, \xi^+, p} : \begin{cases} X_{\tau, \omega} & \rightarrow & X_{\tau, \omega} \\ \nu_p & \mapsto & \nu_p^* \end{cases}$$

definieren — und die Abschätzung (2.26) zeigt zusammen mit Lemma 2.2.2, daß die Familie  $T_{\tau, \omega, \xi^+, p}$ , mit  $p \in P$ , der Bedingung (ii) von Lemma A.1.3 genügt.

Das nächste Ziel ist der Nachweis der Kontraktionseigenschaft des soeben definierten Operators. Seien dazu  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi_1^+, \xi_2^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$ ,  $\nu_1, \nu_2 \in X_{\tau, \omega}$  und  $p \in P$  beliebig, aber fest. Bezeichnet dann  $\mu_i$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}^+ = A^+(t, \omega)x^+ + F^+(t, \omega, x^+, \nu_i(t), p) \quad , \quad t \in I \quad , \quad x^+(\tau) = \xi_i^+ \quad ,$$

so ist die Differenz  $\mu := \mu_1 - \mu_2$  eine  $\omega, p$ -Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}^+ = A^+(t, \omega)x^+ + F^+(t, \omega, x^+ + \mu_2(t), \nu_1(t), p) - F^+(t, \omega, \mu_2(t), \nu_2(t), p) \quad , \quad t \in I \quad ,$$

die allen Voraussetzungen von Lemma 2.2.5 genügt. Dieses Ergebnis liefert unmittelbar die beiden Abschätzungen

$$\|\mu\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq K e^{-\gamma\tau} \|\mu(\tau)\|_{\tau, \omega} + \frac{KL}{\alpha_+ - \gamma - KL} \|\nu_1 - \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^-$$

und

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq K e^{-\gamma\tau} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\tau, \omega} + \frac{KL}{\alpha_+ - \gamma - KL} \|\nu_1 - \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \quad . \quad (2.27)$$

Setzt man nun  $\nu_i^* := T_{\tau, \omega, \xi_i^+, p} \nu_i$ , so ist die Differenz  $\nu^* := \nu_1^* - \nu_2^*$  eine  $\omega, p$ -Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\dot{x}^- = A^-(t, \omega)x^- + F^-(t, \omega, \mu_1(t), \nu_1(t), p) - F^-(t, \omega, \mu_2(t), \nu_2(t), p) \quad , \quad t \in I \quad ,$$

und für alle  $t \in I$  erhält man unter Beachtung von (2.27) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & e^{-\gamma t} \|F^-(t, \omega, \mu_1(t), \nu_1(t), p) - F^-(t, \omega, \mu_2(t), \nu_2(t), p)\|_{t, \omega} \leq \\ & \leq L \|\mu_1 - \mu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- + L \|\nu_1 - \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \\ & \leq K L e^{-\gamma\tau} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\tau, \omega} + \frac{L(\alpha_+ - \gamma)}{\alpha_+ - \gamma - KL} \|\nu_1 - \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- . \end{aligned}$$

Die bereits bekannte  $\gamma^-$ -Quasibeschränktheit (bezüglich  $\omega$ ) der Abbildung  $\nu^*$  impliziert jetzt mit Lemma 2.2.2 unmittelbar

$$\|\nu^*\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K^2 L}{\gamma - \alpha_-} e^{-\gamma\tau} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\tau, \omega} + \frac{KL(\alpha_+ - \gamma)}{(\alpha_+ - \gamma - KL)(\gamma - \alpha_-)} \|\nu_1 - \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- ,$$

und zusammen mit  $T_{\tau, \omega, \xi_i^+, p} \nu_i = \nu_i^*$  und  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$  folgt abschließend

$$\|T_{\tau, \omega, \xi_1^+, p} \nu_1 - T_{\tau, \omega, \xi_2^+, p} \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K^2 L}{\delta} e^{-\gamma\tau} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\tau, \omega} + \frac{KL}{\delta - KL} \|\nu_1 - \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \quad . \quad (2.28)$$

Wählt man in dieser Abschätzung speziell  $\xi_1^+ := \xi_2^+ := \xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$ , so erhält man für beliebige  $p \in P$  die Ungleichung

$$\|T_{\tau, \omega, \xi^+, p} \nu_1 - T_{\tau, \omega, \xi^+, p} \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \frac{KL}{\delta - KL} \|\nu_1 - \nu_2\|_{\tau, \omega, \gamma}^- ,$$

d.h. wegen der vorausgesetzten Beziehung  $KL < \delta - KL$  ist der Operator  $T_{\tau, \omega, \xi^+, p}$  in der Tat eine Kontraktion auf  $X_{\tau, \omega}$  und besitzt somit genau einen Fixpunkt  $\nu_{\tau, \omega, \xi^+, p} \in X_{\tau, \omega}$ .

Definiert man jetzt  $s_\gamma^+(\tau, \omega, \xi^+, p) := \nu_{\tau, \omega, \xi^+, p}(\tau)$ , dann ist  $s_\gamma^+(\tau, \omega, \xi^+, p)$  offensichtlich der eindeutig bestimmte Punkt im  $\mathbb{R}^{d^+}$ , für den die Abbildung  $\lambda^-(\cdot; \tau, \omega, \xi^+, s_\gamma^+(\tau, \omega, \xi^+, p), p)$  (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkt ist. Des weiteren liefert Lemma A.1.3 die Stetigkeit der Abbildung  $s_\gamma^+(\tau, \omega, \xi^+, \cdot)$  für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  — und die obige Behauptung ist bewiesen.

Beachtet man, daß die  $\gamma_1^-$ -Quasibeschränktheit einer Abbildung offensichtlich ihre  $\gamma_2^-$ -Quasibeschränktheit nach sich zieht, für jede Wahl von  $\gamma_1, \gamma_2 \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$  mit  $\gamma_1 > \gamma_2$ , so implizieren die bereits bewiesenen Aussagen sofort die Unabhängigkeit der Abbildung  $s_\gamma^+$  von der speziellen Wahl von  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$ , d.h. der Index  $\gamma$  kann im folgenden unterdrückt werden.

Was die im Satz behauptete dynamische Charakterisierung von  $\mathcal{S}^+(\omega, p)$  angeht, sei  $\gamma \in [\alpha_- + \delta, \alpha_+ - \delta]$  beliebig und  $\lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi, p) = \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi^+, \xi^-, p)$  eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte Abbildung. Da dann offensichtlich auch die Abbildung  $\lambda^-(\cdot; \tau, \omega, \xi^+, \xi^-, p)$  (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkt ist, folgt aus dem bereits bewiesenen Teil des Satzes sofort die Identität  $\xi^- = s^+(\tau, \omega, \xi^+, p)$ , d.h.  $(\tau, \xi) = (\tau, \xi^+, \xi^-) \in \mathcal{S}^+(\omega, p)$ .

Ist nun umgekehrt  $(\tau, \xi) \in \mathcal{S}^+(\omega, p)$  beliebig, so ist  $\lambda^-(\cdot; \tau, \omega, \xi, p)$  (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkt und die Anwendung des Lemmas 2.2.5 auf die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x}^+ = A^+(t, \omega)x^+ + F^+(t, \omega, x^+, \lambda^-(t; \tau, \omega, \xi, p), p)$$

liefert (unter Beachtung von  $\alpha_+ - \gamma \geq \delta$ ) leicht die  $\gamma^-$ -Quasibeschränktheit von  $\lambda^+(\cdot; \tau, \omega, \xi, p)$  bezüglich  $\omega$ , d.h. auch  $\lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi, p)$  ist  $\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ .

Zum vollständigen Beweis des Satzes 2.3.1 fehlen jetzt nur noch die in (i), (ii) und (iii) behaupteten Aussagen.

*Beweis von (i):* Die Identität  $s^+(\tau, \omega, 0, p) = 0$  folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die triviale Abbildung für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $p \in P$  eine  $\omega, p$ -Lösung von (2.23) ist.

Zum Nachweis der in (i) enthaltenen Abschätzung sei  $\tau \in \mathbb{R}$  beliebig, aber fest. Ferner bezeichne  $\nu_{\tau, \omega, \xi_1^+, p}$  beziehungsweise  $\nu_{\tau, \omega, \xi_2^+, p}$  wieder den Fixpunkt von  $T_{\tau, \omega, \xi_1^+, p}$  beziehungsweise  $T_{\tau, \omega, \xi_2^+, p}$ . Dann liefert (2.28) die Abschätzungen

$$\|\nu_{\tau, \omega, \xi_1^+, p} - \nu_{\tau, \omega, \xi_2^+, p}\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K^2 L}{\delta} e^{-\gamma \tau} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\tau, \omega} + \frac{KL}{\delta - KL} \|\nu_{\tau, \omega, \xi_1^+, p} - \nu_{\tau, \omega, \xi_2^+, p}\|_{\tau, \omega, \gamma}^-$$

und

$$\|\nu_{\tau, \omega, \xi_1^+, p} - \nu_{\tau, \omega, \xi_2^+, p}\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} e^{-\gamma \tau} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\tau, \omega},$$

woraus schließlich die gewünschte Ungleichung

$$\begin{aligned} & \|s^+(\tau, \omega, \xi_1^+, p) - s^+(\tau, \omega, \xi_2^+, p)\|_{\tau, \omega} = \|\nu_{\tau, \omega, \xi_1^+, p}(\tau) - \nu_{\tau, \omega, \xi_2^+, p}(\tau)\|_{\tau, \omega} \leq \\ & \leq e^{\gamma \tau} \|\nu_{\tau, \omega, \xi_1^+, p} - \nu_{\tau, \omega, \xi_2^+, p}\|_{\tau, \omega, \gamma}^- \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi_1^+ - \xi_2^+\|_{\tau, \omega} \end{aligned}$$

folgt. Zum Beweis der Stetigkeit von  $s^+(\cdot, \omega, \cdot, \cdot)$  seien  $\omega \in \Omega$  und  $(\tau_0, \xi_0^+, p_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d^+} \times P$  beliebig, aber fest. Um die Stetigkeit der Abbildung  $s^+(\cdot, \omega, \cdot, \cdot)$  in  $(\tau_0, \xi_0^+, p_0)$  nachzuweisen,

genügt es wegen der für beliebige  $(\tau, \xi^+, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d^+} \times P$  gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|s^+(\tau, \omega, \xi^+, p) - s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p_0)\| \leq \\ & \leq \|s^+(\tau, \omega, \xi^+, p) - s^+(\tau, \omega, \xi_0^+, p)\| + \|s^+(\tau, \omega, \xi_0^+, p) - s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p)\| + \\ & \quad + \|s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p) - s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p_0)\| \leq \\ & \leq \ell(\tau, \omega)^2 \cdot \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi^+ - \xi_0^+\| + \|s^+(\tau, \omega, \xi_0^+, p) - s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p)\| + \\ & \quad + \|s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p) - s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p_0)\| \end{aligned}$$

offensichtlich<sup>9</sup>, die folgende Behauptung zu verifizieren:

Zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$  mit  $|\tau - \tau_0| < \delta$  und  $p \in P$  die Abschätzung

$$\|s^+(\tau, \omega, \xi_0^+, p) - s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p)\| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Setzt man abkürzend  $\mu(t, p) := \lambda(t; \tau_0, \omega, \xi_0^+, s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p), p)$ , so gelten zunächst die Identitäten

$$\mu^+(\tau_0, p) = \xi_0^+ \quad \text{und} \quad \mu^-(\tau_0, p) = s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p),$$

und die in (ii) behauptete Invarianz (die bald bewiesen wird) liefert ferner

$$\mu^-(\tau, p) = s^+(\tau, \omega, \mu^+(\tau, p), p).$$

Damit erhält man für jede Wahl von  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $p \in P$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|s^+(\tau, \omega, \xi_0^+, p) - s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p)\| \leq \\ & \leq \|s^+(\tau, \omega, \xi_0^+, p) - s^+(\tau, \omega, \mu^+(\tau, p), p)\| + \|s^+(\tau, \omega, \mu^+(\tau, p), p) - s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, p)\| \leq \\ & \leq \ell(\tau, \omega)^2 \cdot \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\mu^+(\tau_0, p) - \mu^+(\tau, p)\| + \|\mu^-(\tau, p) - \mu^-(\tau_0, p)\| \leq \\ & \leq \left( \ell(\tau, \omega)^2 \cdot \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} + 1 \right) \|\mu(\tau, p) - \mu(\tau_0, p)\|, \end{aligned}$$

und unter Verwendung von Lemma A.2.2 folgt daraus bereits die obige Behauptung.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Abbildung  $s^+$  meßbar ist. Zu diesem Zweck definiert man für jede Wahl von  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  und  $p \in P$  eine Funktionenfolge  $(\nu_{\tau, \omega, \xi^+, p}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  rekursiv durch die folgenden Schritte: Zunächst sei

$$\nu_{\tau, \omega, \xi^+, p}^{(1)}(t) := 0 \quad \text{für beliebige } t \in \mathbb{R}.$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mu_{\tau, \omega, \xi^+, p}^{(n)}$  die auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte  $\omega, p$ -Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}^+ = A^+(t, \omega)x^+ + F^+(t, \omega, x^+, \nu_{\tau, \omega, \xi^+, p}^{(n)}(t), p), \quad x^+(\tau) = \xi^+,$$

<sup>9</sup>Unter Beachtung der in Definition 2.2.1 vorausgesetzten lokalen Beschränktheit von  $\ell(\cdot, \omega)$  und der bereits bewiesenen Stetigkeit der Abbildung  $s^+(\tau_0, \omega, \xi_0^+, \cdot)$ .

und  $\nu_{\tau,\omega,\xi^+,p}^{(n+1)}$  sei die eindeutig bestimmte  $\omega, p$ -Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}^- = A^-(t,\omega)x^- + F^-(t,\omega,\mu_{\tau,\omega,\xi^+,p}^{(n)},\nu_{\tau,\omega,\xi^+,p}^{(n)}(t),p),$$

die (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkt ist<sup>10</sup>. Dann liefern Satz A.2.1 und Lemma 2.2.2 die Meßbarkeit der Abbildungen  $\nu_{\cdot,\cdot,\cdot,\cdot}^{(n)}(\cdot)$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ . Des weiteren erhält man für beliebiges, aber festes,  $\tau \in \mathbb{R}$  mit der Notation vom Beginn des Beweises sofort die Identität

$$T_{\tau,\omega,\xi^+,p} \left( \nu_{\tau,\omega,\xi^+,p}^{(n)} \Big|_{(-\infty,\tau]} \right) = \nu_{\tau,\omega,\xi^+,p}^{(n+1)} \Big|_{(-\infty,\tau]} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes folgt daraus die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{\tau,\omega,\xi^+,p}^{(n)} \Big|_{(-\infty,\tau]} = \nu_{\tau,\omega,\xi^+,p} \quad \text{in } X_{\tau,\omega},$$

wobei  $\nu_{\tau,\omega,\xi^+,p}$  wieder den eindeutig bestimmten Fixpunkt des Operators  $T_{\tau,\omega,\xi^+,p}$  bezeichnet. Beachtet man schließlich die Definition der Abbildung  $s^+$  — zusammen mit der Tatsache, daß die Konvergenz einer Funktionenfolge in  $X_{\tau,\omega}$  die punktweise Konvergenz dieser Folge nach sich zieht — so verifiziert man für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  und  $p \in P$  leicht die Identität

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{\tau,\omega,\xi^+,p}^{(n)}(\tau) = s^+(\tau,\omega,\xi^+,p),$$

d.h.  $s^+$  ist als punktweiser Grenzwert einer Folge meßbarer Abbildungen ebenfalls meßbar.

*Beweis von (ii):* Sind  $(\tau,\xi) \in \mathcal{S}^+(\omega,p)$  und  $t \in \mathbb{R}$  beliebig, so ist nach dem bereits bewiesenen Teil die Abbildung  $\lambda(\cdot;\tau,\omega,\xi,p)$  (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkt — und die wegen (2.3) gültige Identität

$$\lambda(\cdot;t,\omega,\lambda(t;\tau,\omega,\xi,p),p) = \lambda(\cdot;\tau,\omega,\xi,p)$$

liefert sofort die  $\gamma^-$ -Quasibeschränktheit der  $\omega, p$ -Lösung

$$\lambda(\cdot;t,\omega,\lambda(t;\tau,\omega,\xi,p),p)$$

bezüglich  $\omega$ , d.h. es gilt  $(t,\lambda(t;\tau,\omega,\xi,p)) \in \mathcal{S}^+(\omega,p)$ .

*Beweis von (iii):* Sind abschließend  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\xi^+ \in \mathbb{R}^{d^+}$  beliebig, aber fest, so ist die mittels

$$\xi := (\xi^+, s^+(\tau,\omega,\xi^+,p)) \in \mathbb{R}^d \quad \text{und} \quad \mu(\cdot) := \lambda(\cdot;\tau,\omega,\xi,p)$$

definierte Abbildung  $\mu$  eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega, p$ -Lösung von (2.23). Unter Beachtung der angenommenen Periodizität von  $A^\pm$ ,  $F^\pm$  und  $\|\cdot\|_{t,\omega}$  bezüglich  $t$  sieht man leicht ein, daß die durch

$$\nu(t) := \mu(t - \Theta)$$

definierte Abbildung  $\nu$  ebenfalls eine (bezüglich  $\omega$ )  $\gamma^-$ -quasibeschränkte  $\omega, p$ -Lösung von (2.23) ist. Nun liefert aber die Definition von  $\mathcal{S}^+(\omega,p)$  unter Anwendung der dynamischen Charakterisierung die Identitäten

$$\begin{aligned} s^+(\tau + \Theta, \omega, \xi^+, p) &= s^+(\tau + \Theta, \omega, \nu^+(\tau + \Theta), p) = \nu^-(\tau + \Theta) = \\ &= \mu^-(\tau) = s^+(\tau, \omega, \mu^+(\tau), p) = \\ &= s^+(\tau, \omega, \xi^+, p), \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Die Existenz einer derartigen Lösung erhält man wie zum Beginn des Beweises. Man vergleiche dazu die Ausführungen zu (2.24) und (2.25).

und der Satz ist vollständig bewiesen.  $\diamond$

Wie im diskreten Fall kann man noch weitere Aussagen über das asymptotische Verhalten der in  $\mathcal{S}^+(\omega, p)$  beziehungsweise  $\mathcal{S}^-(\omega, p)$  verlaufenden  $\omega, p$ -Lösungen machen. Diese sind im nun folgenden Korollar zusammengestellt, das allerdings nur für parameterunabhängige zufällige Differentialgleichungen formuliert wird.

**Korollar 2.3.2** *Gegeben sei die zufällige Differentialgleichung*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A^+(t, \omega) & 0 \\ 0 & A^-(t, \omega) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} F^+(t, \omega, x) \\ F^-(t, \omega, x) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

*Angenommen, diese Gleichung genügt allen Voraussetzungen von Satz 2.3.1 in einer parameterunabhängigen Version. Dann gelten für jede in  $\mathcal{S}^+(\omega)$  enthaltene  $\omega$ -Lösung  $\mu$  von (2.29) und jedes  $\gamma \leq \alpha_+ - \delta$  die beiden Ungleichungen*

$$\begin{aligned} \|\mu(t)\|_{t, \omega} &\leq \frac{K(\delta - KL)}{\delta - 2KL} e^{\gamma(t-\tau)} \|\mu(\tau)\|_{\tau, \omega} \quad \text{für } t \leq \tau, \\ \|\mu(t)\|_{t, \omega} &\geq \frac{\delta - 2KL}{K(\delta - KL)} e^{\gamma(t-\tau)} \|\mu(\tau)\|_{\tau, \omega} \quad \text{für } t \geq \tau, \end{aligned}$$

*mit  $t, \tau \in \mathbb{R}$ . Entsprechend erhält man für jede in  $\mathcal{S}^-(\omega)$  verlaufende  $\omega$ -Lösung  $\nu$  von (2.29) und jedes  $\gamma \geq \alpha_- + \delta$  die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} \|\nu(t)\|_{t, \omega} &\leq \frac{K(\delta - KL)}{\delta - 2KL} e^{\gamma(t-\tau)} \|\nu(\tau)\|_{\tau, \omega} \quad \text{für } t \geq \tau, \\ \|\nu(t)\|_{t, \omega} &\geq \frac{\delta - 2KL}{K(\delta - KL)} e^{\gamma(t-\tau)} \|\nu(\tau)\|_{\tau, \omega} \quad \text{für } t \leq \tau. \end{aligned}$$

**Beweis:** Da der Beweis fast wortwörtlich vom Beweis des Korollars 1.3.2 abgeschrieben werden kann, soll er hier nicht eigens aufgeführt werden.  $\diamond$

Wie bereits gegen Ende des Abschnittes 1.3 kann man unter Verwendung des Korollars 2.3.2 leicht zeigen, daß auch im kontinuierlichen Fall die zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{S}^+(\omega)$  und  $\mathcal{S}^-(\omega)$  nur die triviale Lösung gemeinsam haben.

## 2.4 Hierarchien und zentrale Mannigfaltigkeiten

Im ersten Kapitel dieser Arbeit hat sich herausgestellt, daß der allgemeine Existenzsatz 1.3.1 für invariante Faserbündel das zentrale Hilfsmittel zur Entwicklung einer Linearisierungstheorie für nichtautonome zufällige Differenzgleichungen ist. Unterstrichen wird diese Aussage noch durch die Tatsache, daß eigentlich nur der Beweis dieses zentralen Satzes technisch aufwendig ist — zusammen mit den vier Hilfssätzen des Abschnittes 1.2, auf die er zurückgreift. Steht das Ergebnis jedoch erst einmal zur Verfügung, so können die weiteren Resultate durch relativ geometrische Vorgehensweisen abgeleitet werden:

- So wurden etwa in Abschnitt 1.4 durch mehrmalige geeignete Anwendungen des Satzes 1.3.1 zunächst zahlreiche invariante Faserbündel  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  beziehungsweise  $\mathcal{S}^{> i}(\omega)$  konstruiert, und durch den geometrischen Vorgang des Schneidens zweier derartiger Faserbündel erhielt man die zufälligen invarianten Faserbündel  $\mathcal{S}^{i, j}(\omega)$ .

- In Abschnitt 1.5 wurde gezeigt, daß durch eine beliebig vorgegebene Lösung der betrachteten zufälligen Differenzgleichung ebenfalls zufällige invariante Faserbündel konstruiert werden können, indem man den Satz 1.3.1 auf die zugehörige Differenzgleichung der gestörten Bewegung anwendet. Damit konnten schließlich zu einer beliebigen Lösung asymptotische Phasen angegeben werden — wieder mit Hilfe des Schnittes zweier geeigneter zufälliger invarianter Faserbündel.
- Das Prinzip des Schneidens zweier Faserbündel wurde auch im darauf folgenden Abschnitt 1.6 erfolgreich angewandt und zeigte, daß gewisse nichtlineare zufällige Differenzgleichungen mittels eines von  $k$  und  $\omega$  abhängigen Homöomorphismus entkoppelt werden können.
- Zu guter Letzt wurden im Abschnitt 1.7 die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte zusammengefaßt und lieferten — nach einigen technischen Hilfssätzen — die Sätze von Hartman-Grobman.

Dieses kurze Resümee läßt bereits zwei Dinge erahnen. Einerseits wird mit dem vorliegenden Abschnitt 2.4 der vermutlich technisch weniger aufwendige Teil des zweiten Kapitels beginnen — zum anderen wird sich die Herleitung der nun folgenden Ergebnisse nur in geringem Maße vom diskreten Fall des ersten Kapitels unterscheiden, bedingt durch die zugrunde liegenden geometrischen Vorgehensweisen. Insbesondere der zweite Punkt wird Konsequenzen haben. Um die Arbeit nicht unnötig in die Länge zu ziehen soll nämlich im weiteren Verlauf bei den Beweisen der Resultate nur noch auf Unterschiede zum diskreten Fall hingewiesen werden, beziehungsweise nur noch eine kurze Beweisskizze angegeben werden.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen kann jetzt mit dem eigentlichen Gegenstand des Abschnittes 2.4 begonnen werden. In Anlehnung an den diskreten Fall sollen möglichst viele zufällige invariante Mannigfaltigkeiten gewisser nichtautonomer zufälliger Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x) \quad (2.30)$$

konstruiert werden. Es ist unmittelbar einsichtig, daß dies ohne weitere Voraussetzungen an die betrachtete Gleichung nicht machbar ist. Die wichtigste neue Voraussetzung betrifft dabei den linearen Anteil.

(V1) *Es seien  $A_i : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^{d_i})$ ,  $i = 1, \dots, p$ , meßbare Abbildungen, so daß für beliebige  $\omega \in \Omega$  die Abbildungen  $A_i(\cdot, \omega)$  lokal integrierbar sind. Darüber hinaus gelte für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$ :*

$$A(t, \omega) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1(t, \omega)} & & & 0 \\ & \boxed{A_2(t, \omega)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_p(t, \omega)} \end{pmatrix},$$

*d.h.  $A(t, \omega)$  besitzt Blockdiagonalform, mit genau  $p \geq 2$  Blöcken. Auf jedem Raum  $\mathbb{R}^{d_i}$  sei eine von  $t$  und  $\omega$  abhängige Norm gemäß Definition 2.2.1 gewählt, und für*

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p} = \mathbb{R}^d$$

sei

$$\|x\|_{t,\omega} := \|x^1\|_{t,\omega} + \|x^2\|_{t,\omega} + \dots + \|x^p\|_{t,\omega}.$$

Ferner seien  $\alpha_{i,+}$ ,  $\alpha_{i,-}$  reelle Konstanten mit

$$\alpha_{1,-} > \alpha_{1,+} > \alpha_{2,-} > \dots > \alpha_{p-1,+} > \alpha_{p,-} > \alpha_{p,+},$$

und für die Übergangsabbildungen  $\Phi_i(t, s, \omega)$  der homogenen linearen Differentialgleichungen  $\dot{x}^i = A_i(t, \omega)x^i$  gelte

$$\|\Phi_i(t, s, \omega)\|_{s,t,\omega} \leq K e^{\alpha_{i,+}(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s,$$

$$\|\Phi_i(t, s, \omega)\|_{s,t,\omega} \leq K e^{\alpha_{i,-}(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s$$

mit  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sowie einer reellen Konstanten  $K \geq 1$ . Schließlich sei

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\alpha_{1,+} - \alpha_{2,-}}{2}, \dots, \frac{\alpha_{p-1,+} - \alpha_{p,-}}{2} \right\}$$

beliebig, aber fest gewählt.

Im deterministischen, autonomen Spezialfall, d.h. falls  $A$  unabhängig von  $t$  und  $\omega$  ist, sind die obigen Voraussetzungen erfüllt, wenn man nur genügend Informationen über das Spektrum  $\sigma(A)$  von  $A$  besitzt. Während jedoch im diskreten Fall das Spektrum von  $A$  durch  $p-1$  konzentrische Kreise mit Mittelpunkt  $0 \in \mathbb{C}$  getrennt werden mußte, ist im kontinuierlichen Fall eine Trennung mittels  $p-1$  vertikaler Streifen vonnöten. Dies ist in Abbildung 2.2(a) für die Situation

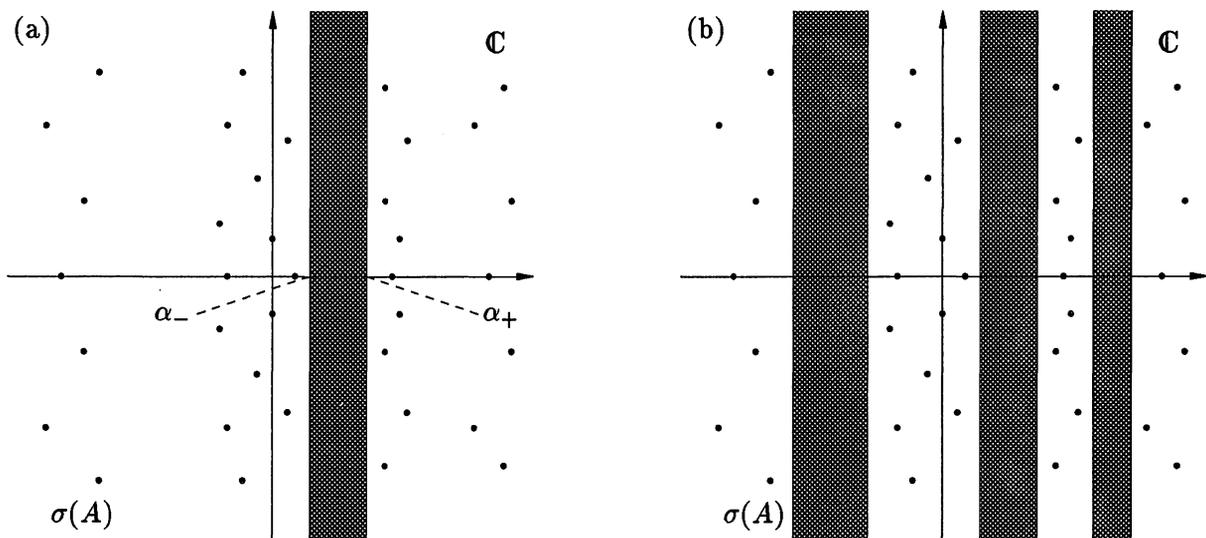


Abbildung 2.2: Zur Teilung des Spektrums  $\sigma(A)$  von  $A$

des Satzes 2.3.1 veranschaulicht, in Abbildung 2.2(b) findet man die der Voraussetzung (V1) entsprechende Situation (für den Fall  $p = 4$ ).

Als nächstes sollen die Voraussetzungen an den nichtlinearen Anteil  $F$  der zufälligen Differentialgleichung (2.30) angegeben werden, die im weiteren Verlauf dieses Kapitels benötigt werden. Wie bereits im ersten Kapitel findet die Beschränktheitsvoraussetzung (V3) nur bei der Herleitung der Sätze von Hartman-Grobman Verwendung.

(V2) Die Abbildung  $F : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei meßbar mit  $F(t, \omega, 0) = 0$  für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$ . Darüber hinaus gelte

$$\|F_i(t, \omega, x) - F_i(t, \omega, \bar{x})\|_{t, \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{t, \omega}$$

für beliebige  $i = 1, \dots, p$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$ , mit einer Konstanten  $L \geq 0$ . Dabei sei

$$F(t, \omega, x) =: (F_1(t, \omega, x), \dots, F_p(t, \omega, x)) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}.$$

(V3) Für beliebige  $i = 1, \dots, p$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  seien die Abschätzungen

$$\|F_i(t, \omega, x)\|_{t, \omega} \leq M$$

erfüllt, mit einer Konstanten  $M \geq 0$ .

Man verifiziert leicht, daß unter diesen Voraussetzungen der Satz A.2.1 auf die zufällige Differentialgleichung (2.30) angewendet werden kann, d.h. im Gegensatz zum diskreten Fall wird keine weitere Voraussetzung bezüglich der Existenz aller  $\omega$ -Lösungen dieser Gleichung benötigt. Wie üblich bezeichnet im folgenden  $\lambda$  die allgemeine Lösung von (2.30). Darüber hinaus sollen die in Bemerkung 1.4.1 eingeführten Bezeichnungen übernommen werden.

Nachdem nun die Voraussetzungen formuliert sind, denen die nichtautonome zufällige Differentialgleichung (2.30) in den restlichen Abschnitten dieses zweiten Kapitels genügen muß, kann das Hauptresultat des vorliegenden Abschnittes 2.4 angegeben werden. Es wird sich sogleich zeigen, daß die Gleichung (2.30) unter den obigen Annahmen nicht nur zwei (wie im Fall des Satzes 2.3.1), sondern vielmehr  $\frac{(p-1)(p+2)}{2}$  zufällige invariante Mannigfaltigkeiten besitzt.

**Satz 2.4.1** Gegeben sei eine zufällige Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x) \quad (2.31)$$

die den zu Beginn dieses Abschnittes aufgeführten Voraussetzungen (V1) und (V2) genügt, mit  $0 \leq L < \frac{\delta}{2K^2 p} (K+2 - \sqrt{K^2+4})$ . Dann gibt es zu jeder Wahl von  $1 \leq i \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$  eine meßbare Abbildung

$$s^{i,j} : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_{i-1}} \times \mathbb{R}^{d_{j+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p},$$

so daß die Menge

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : (x^{<i}, x^{>j}) = s^{i,j}(t, \omega, x^{i \leq j})\}$$

eine zufällige invariante Mannigfaltigkeit für (2.31) ist. Für  $1 \leq i < p$  erhält man die dynamischen Charakterisierungen

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{1,i}(\omega) &= \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\} = \\ &= \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^- \text{- und } \gamma_1^+ \text{-quasibeschränkt bez. } \omega\}, \\ \mathcal{S}^{i+1,p}(\omega) &= \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\} = \\ &= \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma^+ \text{- und } \gamma_2^- \text{-quasibeschränkt bez. } \omega\}, \end{aligned}$$

für beliebige  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ ,  $\gamma_1 \geq \alpha_{1,-} + \delta$  und  $\gamma_2 \leq \alpha_{p,+} - \delta$ . Des Weiteren gilt für  $1 < i \leq j < p$  die dynamische Charakterisierung

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma_1^+ \text{- und } \gamma_2^- \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\},$$

für jede Wahl von  $\gamma_1 \in [\alpha_{i,-} + \delta, \alpha_{i-1,+} - \delta]$  und  $\gamma_2 \in [\alpha_{j+1,-} + \delta, \alpha_{j,+} - \delta]$ . Zu guter Letzt erhält man die Identität  $s^{i,j}(\tau, \omega, 0) = 0$ , die Abbildung  $s^{i,j}(\cdot, \omega, \cdot)$  ist stetig und die Abbildung  $s^{i,j}(\tau, \omega, \cdot)$  ist global Lipschitz-stetig bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{\tau, \omega}$  mit der Lipschitzkonstanten

$$\frac{2C(L)}{1 - C(L)} \quad \text{wobei} \quad C(L) = C(L, K, \delta, p) = \frac{K^2 L p (\delta - K L p)}{\delta (\delta - 2 K L p)},$$

für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$ , und eventuelle Periodizitätseigenschaften von  $A$ ,  $F$  und  $\|\cdot\|_{t, \omega}$  bezüglich  $t$  übertragen sich auf die Abbildungen  $s^{i,j}$ .

**Beweis:** Der Beweis kann im wesentlichen analog zu den Beweisen von Lemma 1.4.2 und Satz 1.4.4 geführt werden und soll deshalb nur grob skizziert werden.

Zunächst erhält man die zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{S}^{1,i}(\omega)$  und  $\mathcal{S}^{i+1,p}(\omega)$  für  $i = 1, \dots, p-1$  durch  $(p-1)$ -malige Anwendung des Satzes 2.3.1, wobei die zugrunde liegende zufällige Differentialgleichung (2.31) jeweils in zwei geeignete gekoppelte Teilgleichungen aufgespalten wird. Schließlich werden die noch fehlenden zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  für  $1 < i \leq j < p$  als Durchschnitt der beiden Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{S}^{i,p}(\omega)$  und  $\mathcal{S}^{1,j}(\omega)$  konstruiert. Dazu setzt man

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &:= \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_{i-1}}, \\ \mathcal{X}_2 &:= \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j}, \\ \mathcal{X}_3 &:= \mathbb{R}^{d_{j+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}, \end{aligned}$$

und definiert die Abbildungsfamilie

$$T_{\tau, \omega, \xi_2} : \begin{cases} \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3 & \rightarrow & \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3 \\ (\xi_1, \xi_3) & \mapsto & (s^{i,p}(\tau, \omega, \xi_2, \xi_3), s^{1,j}(\tau, \omega, \xi_1, \xi_2)) \end{cases},$$

mit  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi_2 \in \mathcal{X}_2$ . Dann ist die Abbildung  $T_{\cdot, \cdot, \cdot}(\cdot, \cdot)$  messbar und die Abbildung  $T_{\tau, \omega, \cdot}(\cdot, \cdot)$  ist stetig, für jede Wahl von  $\omega \in \Omega$ . Wie im Beweis von Satz 1.4.4 verifiziert man nun leicht die für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi_2 \in \mathcal{X}_2$ ,  $\xi_1, \bar{\xi}_1 \in \mathcal{X}_1$  und  $\xi_3, \bar{\xi}_3 \in \mathcal{X}_3$  gültige Abschätzung

$$\|T_{\tau, \omega, \xi_2}(\xi_1, \xi_3) - T_{\tau, \omega, \xi_2}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_3)\|_{\tau, \omega} \leq C(L) \|(\xi_1, \xi_3) - (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_3)\|_{\tau, \omega},$$

und damit ist  $T_{\tau, \omega, \xi_2}$  eine Kontraktion auf  $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_3$ , sofern dieser Raum mit der Norm  $\|(\xi_1, \xi_3)\|_{\tau, \omega} := \|\xi_1\|_{\tau, \omega} + \|\xi_3\|_{\tau, \omega}$  versehen wird<sup>11</sup>. Bezeichnet schließlich  $s^{i,j}(\tau, \omega, \xi_2)$  den eindeutig bestimmten Fixpunkt von  $T_{\tau, \omega, \xi_2}$ , so ist die Abbildung  $s^{i,j}$  wegen Lemma A.1.1 messbar und die mittels  $s^{i,j}$  definierte zufällige Menge  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  genügt der Identität

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \mathcal{S}^{i,p}(\omega) \cap \mathcal{S}^{1,j}(\omega),$$

<sup>11</sup>Die im Satz angegebene Bedingung an  $L$  impliziert wieder die Ungleichung  $C(L) < 1$  — und Satz 2.3.1 liefert unmittelbar, daß  $C(L)$  die globale Lipschitzkonstante der Abbildungen  $s^{i,p}(\tau, \omega, \cdot)$  und  $s^{1,j}(\tau, \omega, \cdot)$  ist.

d.h. sie ist in der Tat invariant, enthält die triviale Lösung, läßt sich in der gewünschten Weise dynamisch charakterisieren und übernimmt eventuelle Periodizitätseigenschaften von  $A$ ,  $F$  und  $\|\cdot\|_{t,\omega}$  bezüglich  $t$ . Des weiteren kann man wie im Beweis von Satz 1.4.4 zeigen, daß die Abbildung  $s^{i,j}(\tau, \omega, \cdot)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{\tau,\omega}$  auf  $\mathcal{X}_2$  global Lipschitz-stetig ist mit der Lipschitzkonstanten  $\frac{2C(L)}{1-C(L)}$ , für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$ .

Es bleibt also nur noch die Stetigkeit der Abbildung  $s^{i,j}(\cdot, \omega, \cdot)$  für beliebiges  $\omega \in \Omega$  nachzuweisen. Seien dazu  $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi, \xi_0 \in \mathcal{X}_2$  beliebig. Dann impliziert die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|s^{i,j}(\tau, \omega, \xi) - s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)\|_{\tau,\omega} &= \|T_{\tau,\omega,\xi} s^{i,j}(\tau, \omega, \xi) - T_{\tau_0,\omega,\xi_0} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)\|_{\tau,\omega} \leq \\ &\leq \|T_{\tau,\omega,\xi} s^{i,j}(\tau, \omega, \xi) - T_{\tau,\omega,\xi} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)\|_{\tau,\omega} + \\ &\quad + \|T_{\tau,\omega,\xi} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0) - T_{\tau_0,\omega,\xi_0} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)\|_{\tau,\omega} \leq \\ &\leq C(L) \|s^{i,j}(\tau, \omega, \xi) - s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)\|_{\tau,\omega} + \\ &\quad + \|T_{\tau,\omega,\xi} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0) - T_{\tau_0,\omega,\xi_0} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)\|_{\tau,\omega} \end{aligned}$$

wegen  $C(L) < 1$  die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|s^{i,j}(\tau, \omega, \xi) - s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)\| &\leq \ell(\tau, \omega) \|s^{i,j}(\tau, \omega, \xi) - s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)\|_{\tau,\omega} \leq \\ &\leq \frac{\ell(\tau, \omega)}{1 - C(L)} \|T_{\tau,\omega,\xi} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0) - T_{\tau_0,\omega,\xi_0} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)\|_{\tau,\omega} \leq \\ &\leq \frac{\ell(\tau, \omega)^2}{1 - C(L)} \|T_{\tau,\omega,\xi} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0) - T_{\tau_0,\omega,\xi_0} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)\|, \end{aligned}$$

wobei die Abbildung  $\ell(\cdot, \omega)$  lokal beschränkt ist<sup>12</sup>. Beachtet man abschließend die Stetigkeit der Abbildung  $T_{\cdot,\omega,\cdot} s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0)$ , so folgt die Beziehung

$$\lim_{(\tau,\xi) \rightarrow (\tau_0,\xi_0)} s^{i,j}(\tau, \omega, \xi) = s^{i,j}(\tau_0, \omega, \xi_0),$$

d.h. die Abbildung  $s^{i,j}(\cdot, \omega, \cdot)$  ist für beliebiges  $\omega \in \Omega$  stetig. Damit ist alles bewiesen.  $\diamond$

**Bemerkung 2.4.2** Für beliebige  $i = 1, \dots, p-1$  setzt man wie im ersten Kapitel abkürzend

$$\mathcal{S}^{\leq i}(\omega) := \mathcal{S}^{1,i}(\omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{S}^{> i-1}(\omega) := \mathcal{S}^{i,p}(\omega)$$

und bezeichnet zufällige invariante Mannigfaltigkeiten dieser Form als *Hierarchiemannigfaltigkeiten*. Die verbleibenden zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  werden *zentrale Mannigfaltigkeiten* genannt.

Des weiteren sei für beliebige  $1 \leq i \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j}$  der Punkt

$$(\tau, \pi^{i,j}(\tau, \omega, \xi)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

der durch  $\tau$  und  $\xi$  eindeutig bestimmte Punkt in  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$ . (Man vergleiche dazu auch die Bemerkung 1.4.5.) Dann ist offensichtlich die Identität

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \{(\tau, \pi^{i,j}(\tau, \omega, \xi)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j}\}$$

erfüllt, die Abbildung  $\pi^{i,j}$  ist meßbar und  $\pi^{i,j}(\cdot, \omega, \cdot)$  ist stetig, für beliebige  $\omega \in \Omega$ .  $\square$

<sup>12</sup>Die Existenz einer derartigen Abbildung folgt leicht aus (V1) und Definition 2.2.1.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch eine kontinuierliche Version des Korollars 1.4.6 angegeben werden, die das asymptotische Verhalten derjenigen Lösungen von (2.31) untersucht, die in einer zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  verlaufen.

**Korollar 2.4.3** Gegeben sei wieder eine zufällige Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x) \quad (2.32)$$

die den zu Beginn dieses Abschnittes aufgeführten Voraussetzungen (V1) und (V2) genügt, mit  $0 \leq L < \frac{\delta}{2K^2p}(K+2-\sqrt{K^2+4})$ . Dann gilt für beliebige  $1 \leq i \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$  und beliebige  $\omega \in \Omega$ : Ist  $\mu$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.32), die in der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  enthalten ist, so gelten für jedes  $\gamma \geq \alpha_{i,-} + \delta$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|\mu(t)\|_{t,\omega} &\leq \frac{K(\delta - K L p)}{\delta - 2K L p} e^{\gamma(t-\tau)} \|\mu(\tau)\|_{\tau,\omega} \quad \text{für alle } t \geq \tau, \\ \|\mu(t)\|_{t,\omega} &\geq \frac{\delta - 2K L p}{K(\delta - K L p)} e^{\gamma(t-\tau)} \|\mu(\tau)\|_{\tau,\omega} \quad \text{für alle } t \leq \tau, \end{aligned}$$

und für jedes  $\gamma \leq \alpha_{j,+} - \delta$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|\mu(t)\|_{t,\omega} &\leq \frac{K(\delta - K L p)}{\delta - 2K L p} e^{\gamma(t-\tau)} \|\mu(\tau)\|_{\tau,\omega} \quad \text{für alle } t \leq \tau, \\ \|\mu(t)\|_{t,\omega} &\geq \frac{\delta - 2K L p}{K(\delta - K L p)} e^{\gamma(t-\tau)} \|\mu(\tau)\|_{\tau,\omega} \quad \text{für alle } t \geq \tau. \end{aligned}$$

**Beweis:** Der Beweis kann fast wortwörtlich vom Beweis des Korollars 1.4.6 übernommen werden.  $\diamond$

## 2.5 Asymptotische Phasen

In völliger Analogie zum Abschnitt 1.5 soll im weiteren das Verhalten derjenigen  $\omega$ -Lösungen  $\mu$  einer nichtlinearen, nichtautonomen zufälligen Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x)$$

genauer untersucht werden, die in keiner der im letzten Abschnitt konstruierten zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  verläuft. Den Anfang macht dabei das folgende Lemma, das zufällige invariante Hierarchiemannigfaltigkeiten durch eine beliebig vorgegebene  $\omega$ -Lösung  $\mu$  konstruiert.

**Lemma 2.5.1** Gegeben sei eine zufällige Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x) \quad (2.33)$$

die den zu Beginn des letzten Abschnittes aufgeführten Voraussetzungen (V1) und (V2) genügt, mit  $0 \leq L < \frac{\delta}{2Kp}$ . Dann gibt es zu beliebigem  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  zwei Abbildungsfamilien

$$\begin{aligned} s_{\tau_0, \xi_0}^{\leq i} &: \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i} \rightarrow \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}, \\ s_{\tau_0, \xi_0}^{> i} &: \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i}, \end{aligned}$$

mit  $\tau_0 \in \mathbb{R}$  und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ , so daß die Abbildungen  $s_{\cdot, \cdot}^{\leq i}(\cdot, \cdot, \cdot)$  und  $s_{\cdot, \cdot}^{> i}(\cdot, \cdot, \cdot)$  meßbar, und für beliebige  $\tau_0 \in \mathbb{R}$  und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$  die beiden zufälligen Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\tau_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega) &:= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : x^{\leq i} = s_{\tau_0, \xi_0}^{\leq i}(t, \omega, x^{\leq i})\}, \\ \mathcal{S}_{\tau_0, \xi_0}^{> i}(\omega) &:= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : x^{> i} = s_{\tau_0, \xi_0}^{> i}(t, \omega, x^{> i})\} \end{aligned}$$

sogar zufällige invariante Mannigfaltigkeiten für (2.33) sind, die sogenannten Hierarchiemannigfaltigkeiten durch  $(\tau_0, \xi_0)$  beziehungsweise durch die Lösung  $\lambda(\cdot; \tau_0, \omega, \xi_0)$ . Diese Mannigfaltigkeiten lassen sich mittels

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\tau_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega) &= \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \tau_0, \omega, \xi_0) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt bez. } \omega\}, \\ \mathcal{S}_{\tau_0, \xi_0}^{> i}(\omega) &= \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \tau_0, \omega, \xi_0) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt bez. } \omega\} \end{aligned}$$

dynamisch charakterisieren, für beliebiges  $\gamma \in [\alpha_{i+1, -} + \delta, \alpha_{i, +} - \delta]$ . Zu guter Letzt sind die Abbildungen  $s_{\cdot, \cdot}^{\leq i}(\cdot, \omega, \cdot)$  und  $s_{\cdot, \cdot}^{> i}(\cdot, \omega, \cdot)$  für jede Wahl von  $\omega \in \Omega$  stetig, und für beliebige  $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$  gilt:

$$\begin{aligned} \|s_{\tau_0, \xi_0}^{\leq i}(\tau, \omega, \xi^{\leq i}) - s_{\tau_0, \xi_0}^{\leq i}(\tau, \omega, \bar{\xi}^{\leq i})\|_{\tau, \omega} &\leq \frac{K^2 Lp(\delta - K Lp)}{\delta(\delta - 2K Lp)} \|\xi^{\leq i} - \bar{\xi}^{\leq i}\|_{\tau, \omega}, \\ \|s_{\tau_0, \xi_0}^{> i}(\tau, \omega, \xi^{> i}) - s_{\tau_0, \xi_0}^{> i}(\tau, \omega, \bar{\xi}^{> i})\|_{\tau, \omega} &\leq \frac{K^2 Lp(\delta - K Lp)}{\delta(\delta - 2K Lp)} \|\xi^{> i} - \bar{\xi}^{> i}\|_{\tau, \omega}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Sei  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  beliebig. Dann überzeugt man sich leicht, daß die parameterabhängige zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + \tilde{F}(t, \omega, x, \tau_0, \xi_0), \quad (2.34)$$

mit

$$\tilde{F}(t, \omega, x, \tau_0, \xi_0) := F(t, \omega, x + \lambda(t; \tau_0, \omega, \xi_0)) - F(t, \omega, \lambda(t; \tau_0, \omega, \xi_0)),$$

die von dem Parameter  $(\tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  stetig abhängt, allen Voraussetzungen des Satzes 2.3.1 genügt, sofern man nur

$$\mathbb{R}^{d^+} := \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^{d^-} := \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}$$

setzt<sup>13</sup>. Bezeichnen dann  $s_i^+$  und  $s_i^-$  die von diesem Satz garantierten parameterabhängigen Abbildungen, so liefern die Definitionen

$$\begin{aligned} s_{\tau_0, \xi_0}^{\leq i}(\tau, \omega, \xi^{\leq i}) &:= s_i^+(\tau, \omega, \xi^{\leq i} - \lambda_{\leq i}(\tau; \tau_0, \omega, \xi_0), \tau_0, \xi_0) + \lambda_{> i}(\tau; \tau_0, \omega, \xi_0), \\ s_{\tau_0, \xi_0}^{> i}(\tau, \omega, \xi^{> i}) &:= s_i^-(\tau, \omega, \xi^{> i} - \lambda_{> i}(\tau; \tau_0, \omega, \xi_0), \tau_0, \xi_0) + \lambda_{\leq i}(\tau; \tau_0, \omega, \xi_0) \end{aligned}$$

die beiden gewünschten Abbildungen, was man völlig analog zum Beweis des Lemmas 1.5.1 verifizieren kann. Dabei muß nur beachtet werden, daß eine Abbildung  $\nu$  genau dann eine  $\omega, \tau_0, \xi_0$ -Lösung der zufälligen Differentialgleichung (2.34) ist, wenn die Abbildung

$$\nu(\cdot) + \lambda(\cdot; \tau_0, \omega, \xi_0)$$

eine  $\omega$ -Lösung von (2.33) ist. ◇

<sup>13</sup>Man vergleiche hierzu auch die Beweise des Satzes 2.4.1 und des diskreten Lemmas 1.4.2.

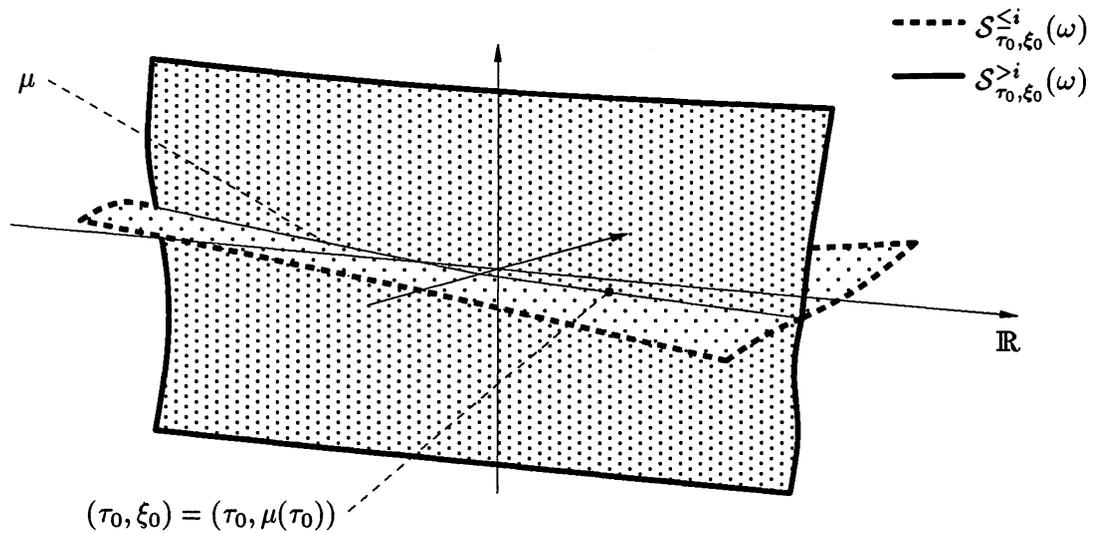


Abbildung 2.3: Zufällige invariante Mannigfaltigkeiten durch eine  $\omega$ -Lösung  $\mu$

Der obige Beweis beruhte im wesentlichen auf der Tatsache, daß auf die zufällige Differentialgleichung der gestörten Bewegung (2.34) der Satz 2.3.1 angewandt werden konnte. Es ist somit nicht verwunderlich, daß unter der in Satz 2.4.1 enthaltenen verschärften Bedingung an  $L$  auch zufällige invariante zentrale Mannigfaltigkeiten durch jede beliebige Lösung von (2.33) konstruiert werden können. Dies soll jedoch nicht eigens formuliert werden.

Unter Verwendung des Lemmas 2.5.1 lassen sich nun zu einer beliebig vorgegebenen  $\omega$ -Lösung der zufälligen Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x)$$

und zu jedem  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  zwei spezielle Lösungen — die sogenannten *asymptotischen Phasen* — auszeichnen, von denen die eine in  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  und die andere in  $\mathcal{S}^{> i}(\omega)$  verläuft, und zwar durch Schneiden der Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{S}_{\tau_0, \xi_0}^{> i}(\omega)$  und  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$ , beziehungsweise  $\mathcal{S}_{\tau_0, \xi_0}^{\leq i}(\omega)$  und  $\mathcal{S}^{> i}(\omega)$ . Dies ist der Gegenstand des nun folgenden Satzes, der den Abschnitt 2.5 abschließt.

**Satz 2.5.2** Gegeben sei wieder eine zufällige Differentialgleichung der Form

$$\boxed{\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x)} \tag{2.35}$$

die den zu Beginn des letzten Abschnittes aufgeführten Voraussetzungen (V1) und (V2) genügt, diesmal allerdings mit der verschärften Bedingung  $0 \leq L < \frac{\delta}{2K^2p}(K+2-\sqrt{K^2+4})$ . Dann erhält man für jedes beliebige  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ :

- (a) Zu jeder Wahl von  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gibt es genau einen Punkt  $P^{\leq i}(\tau, \omega, \xi) \in \mathbb{R}^d$ , so daß die Differenz

$$\lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \tau, \omega, P^{\leq i}(\tau, \omega, \xi))$$

$\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, für beliebige  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ , und die Inklusion

$$(\tau, P^{\leq i}(\tau, \omega, \xi)) \in \mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$$

gilt. Die so konstruierte Abbildung  $P^{\leq i} : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist meßbar, für beliebiges  $\omega \in \Omega$  ist  $P^{\leq i}(\cdot, \omega, \cdot)$  stetig, und darüber hinaus besitzt  $P^{\leq i}$  die folgenden Eigenschaften:

(i) Für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gilt die Abschätzung

$$\|P^{\leq i}(\tau, \omega, \xi)\|_{\tau, \omega} \leq \frac{1}{1 - C(L)} \|\xi\|_{\tau, \omega},$$

mit der Konstanten  $C(L) = C(L, K, \delta, p) = \frac{K^2 L p (\delta - K L p)}{\delta (\delta - 2 K L p)} < 1$  aus Satz 2.4.1.

(ii) Ist  $\mu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (2.35), so ist  $P^{\leq i}(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  ebenfalls eine  $\omega$ -Lösung von (2.35), die aber in  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  verläuft.

(iii) Sind die Abbildungen  $A$  und  $F$ , sowie die Normen  $\|\cdot\|_{t, \omega}$  für ein  $\omega \in \Omega$  periodisch in  $t$  mit Periode  $\Theta \in \mathbb{R}^+$ , so gilt dies auch für die Abbildung  $P^{\leq i}$ .

(b) Zu jeder Wahl von  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gibt es genau einen Punkt  $P^{> i}(\tau, \omega, \xi) \in \mathbb{R}^d$ , so daß die Differenz

$$\lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \tau, \omega, P^{> i}(\tau, \omega, \xi))$$

$\gamma^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, für beliebige  $\gamma \in [\alpha_{i+1, -} + \delta, \alpha_{i, +} - \delta]$ , und die Inklusion

$$(\tau, P^{> i}(\tau, \omega, \xi)) \in \mathcal{S}^{> i}(\omega)$$

gilt. Die so konstruierte Abbildung  $P^{> i} : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist meßbar, für beliebige  $\omega \in \Omega$  ist  $P^{> i}(\cdot, \omega, \cdot)$  stetig, und des weiteren besitzt  $P^{> i}$  die folgenden Eigenschaften:

(i) Für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gilt die Abschätzung

$$\|P^{> i}(\tau, \omega, \xi)\|_{\tau, \omega} \leq \frac{1}{1 - C(L)} \|\xi\|_{\tau, \omega}.$$

(ii) Ist  $\mu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (2.35), so ist  $P^{> i}(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  ebenfalls eine  $\omega$ -Lösung von (2.35), die aber in  $\mathcal{S}^{> i}(\omega)$  verläuft.

(iii) Sind die Abbildungen  $A$  und  $F$ , sowie die Normen  $\|\cdot\|_{t, \omega}$  für ein  $\omega \in \Omega$  periodisch in  $t$  mit Periode  $\Theta \in \mathbb{R}^+$ , so gilt dies auch für die Abbildung  $P^{> i}$ .

**Beweis:** Da der Beweis völlig analog zum Beweis des Satzes 1.5.3 geführt werden kann, soll im folgenden nur eine kurze Beweisskizze für (a) angegeben werden.

Zunächst definiert man unter Verwendung der Abkürzung  $\mathcal{X} := \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_i}$  eine Abbildungsfamilie

$$T_{\tau, \omega, \xi} : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow & \mathcal{X} \\ \eta & \mapsto & s_{\tau, \xi}^{> i}(\tau, \omega, s^{\leq i}(\tau, \omega, \eta)) \end{cases},$$

wobei  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gilt. Dann ist  $T_{\cdot, \cdot, \cdot}(\cdot)$  meßbar,  $T_{\cdot, \omega, \cdot}(\cdot)$  ist für beliebige  $\omega \in \Omega$  stetig und wie im Beweis des diskreten Falles erhält man leicht die Abschätzung

$$\|T_{\tau, \omega, \xi}(\eta_1) - T_{\tau, \omega, \xi}(\eta_2)\|_{\tau, \omega} \leq C(L)^2 \|\eta_1 - \eta_2\|_{\tau, \omega},$$

für jede Wahl von  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  und  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{X}$ . Wegen  $C(L) < 1$  liefert jetzt der Banachsche Fixpunktsatz einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\tilde{P}(\tau, \omega, \xi) \in \mathcal{X}$  des Operators

$T_{\tau, \omega, \xi}$  und gemäß Lemma A.1.1 ist die so konstruierte Abbildung  $\tilde{P}$  meßbar. Des weiteren kann man wie gegen Ende des Beweises von Satz 2.4.1 zeigen, daß die Abbildung  $\tilde{P}(\cdot, \omega, \cdot)$  für beliebiges  $\omega \in \Omega$  stetig ist. Definiert man abschließend

$$P^{\leq i}(\tau, \omega, \xi) := \pi^{1, i}(\tau, \omega, \tilde{P}(\tau, \omega, \xi)),$$

so ist die Abbildung  $P^{\leq i}$  meßbar und für beliebige  $\omega \in \Omega$  ist  $P^{\leq i}(\cdot, \omega, \cdot)$  stetig — unter Beachtung der Bemerkung 2.4.2. Daß  $P^{\leq i}$  tatsächlich auch die restlichen der in Satz 2.5.2(a) geforderten Eigenschaften besitzt, kann schließlich wie im Beweis des Satzes 1.5.3 gezeigt werden.  $\diamond$

## 2.6 Topologische Entkopplung

Bereits im letzten Abschnitt wurde damit begonnen, das asymptotische Verhalten einer beliebig vorgegebenen  $\omega$ -Lösung  $\mu$  der zufälligen Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x) \quad (2.36)$$

zu untersuchen. Dies geschah im wesentlichen dadurch, daß man der Lösung  $\mu$  zwei spezielle Lösungen zuordnete — und zwar je eine in der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  und in  $\mathcal{S}^{> i}(\omega)$ , für  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ .

In Ergänzung zu dieser Vorgehensweise soll im vorliegenden Abschnitt 2.6 damit begonnen werden, das Verhalten *aller*  $\omega$ -Lösungen der Gleichung (2.36) mit dem Lösungsverhalten einer “einfacheren” zufälligen Differentialgleichung in Zusammenhang zu bringen. Der dazu benötigte Begriff ist natürlich der der topologischen Äquivalenz, wie er in Definition 2.1.1 eingeführt wurde. Was schließlich die “Einfachheit” der neuen zufälligen Differentialgleichung angeht, so wäre sicherlich eine lineare Gleichung das erstrebenswerte Ziel — und die bekannten Ergebnisse aus der Theorie der autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen zeigen, daß dieses Ziel nicht immer erreicht werden kann.

Die genaue Untersuchung dieser Fragestellung ist jedoch dem nächsten Abschnitt vorbehalten und wird ihren Höhepunkt in den Sätzen von Hartman-Grobman für nichtautonome zufällige Differentialgleichungen finden. In Vorbereitung auf diese Ergebnisse soll im folgenden zunächst gezeigt werden, daß (2.36) einer neuen nichtlinearen Gleichung topologisch äquivalent ist, die wenigstens in entkoppelter Form vorliegt. Diese neue Gleichung ist der Gegenstand des ersten Lemmas dieses Abschnittes.

**Lemma 2.6.1** *Gegeben sei eine zufällige Differentialgleichung der Form*

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x) \quad (2.37)$$

*die den zu Beginn des Abschnittes 2.4 aufgeführten Voraussetzungen (V1) und (V2) genügt. Dann gibt es eine positive Konstante*

$$0 < L^* = L^*(K, \delta, p) \leq \frac{\delta}{2K^2 p} (K + 2 - \sqrt{K^2 + 4}),$$

*so daß für  $0 \leq L < L^*$  die entkoppelte zufällige Differentialgleichung*

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F^e(t, \omega, x) \quad (2.38)$$

mit der Nichtlinearität

$$F^e(t, \omega, x) := \begin{pmatrix} F_1(t, \omega, \pi^{1,1}(t, \omega, x^1)) \\ F_2(t, \omega, \pi^{2,2}(t, \omega, x^2)) \\ \vdots \\ F_p(t, \omega, \pi^{p,p}(t, \omega, x^p)) \end{pmatrix}$$

allen Voraussetzungen des Satzes 2.4.1 genügt und daß die von diesem Satz garantierten zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten für (2.38) in Wirklichkeit zufällige invariante lineare Unterräume sind, d.h. die sie bestimmenden Abbildungen verschwinden identisch.

**Beweis:** Der Beweis orientiert sich stark am Beweis des Lemmas 1.6.2. Zunächst implizieren Satz 2.4.1 und Bemerkung 2.4.2 für jedes  $0 \leq L < \frac{\delta}{2K^2p}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4})$  die Abschätzung

$$\|F_i(t, \omega, \pi^{i,i}(t, \omega, x^i)) - F_i(t, \omega, \pi^{i,i}(t, \omega, \bar{x}^i))\|_{t,\omega} \leq L \left( \frac{2C(L)}{1 - C(L)} + 1 \right) \|x^i - \bar{x}^i\|_{t,\omega},$$

für beliebige  $i = 1, \dots, p$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x^i, \bar{x}^i \in \mathbb{R}^{d_i}$ , woraus wegen der Gültigkeit der Beziehung  $\lim_{L \rightarrow 0} C(L) = 0$  sofort die Existenz einer Konstanten

$$0 < L^* = L^*(K, \delta, p) \leq \frac{\delta}{2K^2p}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4})$$

gefolgt werden kann, so daß für  $0 \leq L < L^*$  die Ungleichungen

$$\|F_i(t, \omega, \pi^{i,i}(t, \omega, x^i)) - F_i(t, \omega, \pi^{i,i}(t, \omega, \bar{x}^i))\|_{t,\omega} \leq 2L \|x^i - \bar{x}^i\|_{t,\omega} \leq 2L \|x - \bar{x}\|_{t,\omega}$$

und

$$2L < \frac{\delta}{2K^2p}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4}) < \frac{\delta}{K}$$

erfüllt sind. Damit genügt aber die entkoppelte zufällige Differentialgleichung (2.38) allen Voraussetzungen des Satzes 2.4.1 (mit  $2L$  an Stelle von  $L$ ), und auf jede der  $p$  Teilgleichungen

$$\dot{x}^i = A_i(t, \omega)x^i + F_i(t, \omega, \pi^{i,i}(t, \omega, x^i))$$

können die Lemmata 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 und 2.2.5 angewandt werden. Nun folgen die Behauptungen völlig analog zum Beweis des Lemmas 1.6.2.  $\diamond$

Nach diesen Vorbereitungen kann jetzt das Hauptresultat des Abschnittes 2.6 angegeben werden, das die topologische Äquivalenz der Gleichungen (2.37) und (2.38) beweist.

**Satz 2.6.2** Gegeben sei wieder eine zufällige Differentialgleichung der Form

$$\boxed{\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x)} \quad (2.39)$$

die den zu Beginn des Abschnittes 2.4 aufgeführten Voraussetzungen (V1) und (V2) genügt. Dann gibt es eine positive Konstante

$$0 < L^* = L^*(K, \delta, p) \leq \frac{\delta}{2K^2p}(K + 2 - \sqrt{K^2 + 4}),$$

so daß für  $0 \leq L < L^*$  die entkoppelte zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F^e(t, \omega, x) \quad (2.40)$$

mit der Nichtlinearität

$$F^e(t, \omega, x) := \begin{pmatrix} F_1(t, \omega, \pi^{1,1}(t, \omega, x^1)) \\ F_2(t, \omega, \pi^{2,2}(t, \omega, x^2)) \\ \vdots \\ F_p(t, \omega, \pi^{p,p}(t, \omega, x^p)) \end{pmatrix}$$

allen Voraussetzungen des letzten Lemmas 2.6.1 genügt, und daß meßbare Abbildungen  $E, \tilde{E} : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften existieren:

- (a) Für beliebiges  $\omega \in \Omega$  sind die Abbildungen  $E(\cdot, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{E}(\cdot, \omega, \cdot)$  stetig. Des weiteren sind die beiden Abbildungen  $E(\tau, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{E}(\tau, \omega, \cdot)$  für jede Wahl von  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$  einander invers, mithin Homöomorphismen auf dem  $\mathbb{R}^d$ .
- (b) Ist  $\mu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (2.39), so ist  $E(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.40).
- (c) Ist  $\nu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (2.40), so ist  $\tilde{E}(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.39).
- (d) Für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \|\xi\|_{\tau, \omega} &\leq \|E(\tau, \omega, \xi)\|_{\tau, \omega} \leq B \|\xi\|_{\tau, \omega} \\ \frac{1}{B} \|\xi\|_{\tau, \omega} &\leq \|\tilde{E}(\tau, \omega, \xi)\|_{\tau, \omega} \leq B \|\xi\|_{\tau, \omega}, \end{aligned}$$

mit einer Konstanten  $B = B(L, K, \delta, p) \geq 1$ . Insbesondere übertragen also die Abbildungen  $E$  und  $\tilde{E}$  jede Quasibeschränktheitseigenschaft einer betrachteten Lösung auf die Bildlösung, d.h. die zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten von (2.39) gemäß Satz 2.4.1 werden auf die entsprechenden zufälligen invarianten linearen Unterräume der Gleichung (2.40) abgebildet, und umgekehrt.

- (e) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A$  und  $F$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{t, \omega}$  bezüglich  $t$  überträgt sich auf die Abbildungen  $E$  und  $\tilde{E}$ .

Mit anderen Worten: Die Gleichungen (2.39) und (2.40) sind topologisch äquivalent vermöge der Abbildung  $E$ , im Sinne von Definition 2.1.1.

**Beweis:** Der Satz soll durch vollständige Induktion über  $p$  bewiesen werden. Da dabei der Induktionsschritt fast wortwörtlich vom Beweis des Satzes 1.6.3 übernommen werden kann, wird im folgenden nur eine Beweisskizze des Induktionsanfangs  $p = 2$  angegeben. Zunächst definiert man die Abbildung  $E$  mittels

$$E(\tau, \omega, \xi) := (P_1^{\leq 1}(\tau, \omega, \xi), P_2^{> 1}(\tau, \omega, \xi)),$$

wobei  $P^{\leq 1}$  und  $P^{> 1}$  die Phasenabbildungen aus Satz 2.5.2 sind<sup>14</sup>. Dann ist  $E$  offensichtlich meßbar und die Abbildung  $E(\cdot, \omega, \cdot)$  ist für beliebige  $\omega \in \Omega$  stetig. Des weiteren folgen die

<sup>14</sup>Es sei an dieser Stelle noch einmal daran erinnert, daß gemäß Bemerkung 1.4.1 tiefgestellte Indizes bei Abbildungen die jeweiligen Komponentenfunktionen bezeichnen.

Aussagen in (b) und (e) bezüglich  $E$ , wie auch die in (d) geforderte Abschätzung nach oben, aus den entsprechenden Aussagen des Satzes 2.5.2.

Zur Konstruktion der Abbildung  $\tilde{E}$  wird ein weiteres Mal der Banachsche Fixpunktsatz herangezogen. Dazu definiert man für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  einen Operator  $T_{\tau,\omega,\xi}$  durch

$$T_{\tau,\omega,\xi} : \begin{cases} \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} & \rightarrow & \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \\ (\eta_1, \eta_2) & \mapsto & (s_{\tau,\pi^1,1}^{>1}(\tau,\omega,\xi^1)(\tau,\omega,\eta_2), s_{\tau,\pi^2,2}^{\leq 1}(\tau,\omega,\xi^2)(\tau,\omega,\eta_1)) \end{cases}$$

Es leuchtet unmittelbar ein, daß  $T_{\cdot,\cdot}(\cdot,\cdot)$  meßbar und die Abbildung  $T_{\cdot,\omega}(\cdot,\cdot)$  für beliebiges  $\omega \in \Omega$  stetig ist. Darüber hinaus erhält man die Abschätzung

$$\|T_{\tau,\omega,\xi}(\eta_1, \eta_2) - T_{\tau,\omega,\xi}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)\|_{\tau,\omega} \leq C(L) \|(\eta_1, \eta_2) - (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)\|_{\tau,\omega},$$

für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\eta_1, \bar{\eta}_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$  und  $\eta_2, \bar{\eta}_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ . Wegen  $C(L) < 1$  garantiert nun der Banachsche Fixpunktsatz einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\tilde{E}(\tau, \omega, \xi)$  des Operators  $T_{\tau,\omega,\xi}$ , und wie im Beweis des Satzes 2.5.2 erhält man die Meßbarkeit der Abbildung  $\tilde{E}$ , sowie die Stetigkeit von  $\tilde{E}(\cdot, \omega, \cdot)$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Ferner gilt die noch fehlende Aussage in (a), wenn man die obige Konstruktion von  $\tilde{E}$  und das diskrete Lemma 1.6.1 beachtet — und somit lassen sich die Aussagen in (c) und (e) bezüglich  $\tilde{E}$  aus den bereits bewiesenen Eigenschaften von  $E$  ableiten, wie auch die in (d) behaupteten Abschätzungen nach unten aus den entsprechenden Abschätzungen nach oben. Zum vollständigen Beweis des Satzes muß also nur noch die Abschätzung nach oben für  $\|\tilde{E}(\tau, \omega, \xi)\|_{\tau,\omega}$  verifiziert werden. Dies kann man jedoch fast wortwörtlich vom Beweis des Lemmas 1.6.1 übernehmen.  $\diamond$

Wie bereits im diskreten Fall des Abschnittes 1.6 zeigt der obige Satz, daß die zufällige Differentialgleichung (2.39) nicht nur die zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten aus Satz 2.4.1 besitzt, sondern auch zahlreiche andere, die man leicht unter Verwendung der Abbildung  $\tilde{E}$  konstruieren kann. Die einzelnen " $t, \omega$ -Fasern" dieser Mannigfaltigkeiten sind jedoch im allgemeinen nicht mehr die Graphen global Lipschitz-stetiger Abbildungen (bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{t,\omega}$ ). Darüber hinaus können diese zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten nicht dynamisch charakterisiert werden.

## 2.7 Topologische Linearisierung

Im Mittelpunkt dieses letzten Abschnittes des zweiten Kapitels steht die Übertragung der Sätze von Hartman-Grobman auf den Fall nichtautonomer zufälliger Differentialgleichungen. Somit wird das zentrale Ergebnis des letzten Abschnittes noch verschärft, denn der *klassische Satz von Hartman-Grobman* wird eine Bedingung angeben, unter der die zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x)$$

der linearen Gleichung

$$\dot{x} = A(t, \omega)x$$

topologisch äquivalent ist — und der *verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman* wird zeigen, daß immerhin noch eine teilweise Linearisierung möglich ist, falls diese Bedingung verletzt ist. Zunächst müssen jedoch die drei folgenden technischen Lemmata bewiesen werden.

**Lemma 2.7.1** Gegeben seien die beiden zufälligen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x + f_1(t, \omega, x) \quad (2.41)$$

und

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x + f_2(t, \omega, x) \quad (2.42)$$

mit meßbaren Abbildungen  $A^- : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^{d^-})$ ,  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , und die Abbildung  $A^-(\cdot, \omega)$  sei für jedes  $\omega \in \Omega$  lokal integrierbar. Des weiteren sei  $\Phi^-(t, s, \omega)$  die Übergangsabbildung der homogenen linearen Differentialgleichung  $\dot{x} = A^-(t, \omega)x$  und für beliebige  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^-}$  gelte:

$$\|\Phi^-(t, s, \omega)\|_{s, t, \omega} \leq K e^{\alpha_-(t-s)} \quad \text{für } t \geq s,$$

$$\|f_1(t, \omega, x)\|_{t, \omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f_1(t, \omega, x) - f_1(t, \omega, \bar{x})\|_{t, \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{t, \omega},$$

$$\|f_2(t, \omega, x)\|_{t, \omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f_2(t, \omega, x) - f_2(t, \omega, \bar{x})\|_{t, \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{t, \omega},$$

mit reellen Konstanten  $\alpha_- < 0$ ,  $K \geq 1$ ,  $M \geq 0$  und  $0 \leq L < \frac{-\alpha_-}{K}$ . Zu guter Letzt seien wie üblich  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  die zu (2.41) beziehungsweise (2.42) gehörenden allgemeinen Lösungen gemäß Satz A.2.1.

Dann gibt es zu jeder Wahl von  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$  einen eindeutig bestimmten Punkt  $H^-(\tau, \omega, \xi) \in \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß die Differenz

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \tau, \omega, H^-(\tau, \omega, \xi)) - \lambda^{(1)}(\cdot; \tau, \omega, \xi)$$

0-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Die so erzeugte Abbildung  $H^- : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  besitzt folgende Eigenschaften:

(a)  $H^-$  ist meßbar und für beliebige  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $H^-(\cdot, \omega, \cdot)$  stetig.

(b) Für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$  ist die Abschätzung

$$\|H^-(\tau, \omega, \xi) - \xi\|_{\tau, \omega} \leq \frac{2KM}{-\alpha_- - KL}$$

erfüllt.

(c) Ist  $\nu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (2.41), so ist die Abbildung  $H^-(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.42).

(d) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A^-$ ,  $f_1$  und  $f_2$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{t, \omega}$  bezüglich  $t$  überträgt sich auf die Abbildung  $H^-$ .

**Beweis:** In Anlehnung an den Beweis des Lemmas 1.7.1 betrachtet man zunächst die von dem Parameter  $(\tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d^-}$  abhängige zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x + f_2(t, \omega, x + \lambda^{(1)}(t; \tau_0, \omega, \xi_0)) - f_1(t, \omega, \lambda^{(1)}(t; \tau_0, \omega, \xi_0)). \quad (2.43)$$

Man verifiziert leicht, daß diese Gleichung den Voraussetzungen des Satzes A.2.1 genügt — und die resultierende allgemeine Lösung von (2.43) werde mit

$$\lambda^{(3)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$$

bezeichnet. Des weiteren erfüllt die zufällige Differentialgleichung (2.43) alle Voraussetzungen des Lemmas 2.2.2 mit  $\gamma := 0$ , d.h. es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\mu : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-},$$

so daß für beliebige  $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{d^-}$  die Abbildung

$$\lambda^{(3)}(\cdot; \tau, \omega, \mu(\tau, \omega, \tau_0, \xi_0), \tau_0, \xi_0)$$

0-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Darüber hinaus ist  $\mu$  meßbar, die Abbildung  $\mu(\cdot, \omega, \cdot, \cdot)$  ist stetig und es gilt die Abschätzung

$$\|\mu(\tau, \omega, \tau_0, \xi_0)\|_{\tau, \omega} \leq \frac{2KM}{-\alpha_- - KL},$$

für beliebige  $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{d^-}$ .

Da eine Abbildung  $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$  genau dann eine  $\omega, \tau_0, \xi_0$ -Lösung der Gleichung (2.43) ist, wenn die Abbildung

$$\nu(\cdot) + \lambda^{(1)}(\cdot; \tau_0, \omega, \xi_0)$$

die Gleichung (2.42) löst, liefert die Definition

$$H^-(\tau, \omega, \xi) := \xi + \mu(\tau, \omega, \tau, \xi)$$

die eindeutig bestimmte Abbildung  $H^-$ , so daß die Differenz

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \tau, \omega, H^-(\tau, \omega, \xi)) - \lambda^{(1)}(\cdot; \tau, \omega, \xi)$$

0-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, für jede Wahl von  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$ . Die restlichen Aussagen des Lemmas werden wie im Beweis der diskreten Version verifiziert:

(a) Die Meßbarkeit von  $\mu$  impliziert unmittelbar die Meßbarkeit von  $H^-$  — und die Stetigkeit von  $H^-(\cdot, \omega, \cdot)$  ist eine Konsequenz der Stetigkeit von  $\mu(\cdot, \omega, \cdot, \cdot)$ .

(b) Die geforderte Ungleichung folgt aus der obigen Abschätzung für  $\mu(\tau, \omega, \tau_0, \xi_0)$ .

(c) Sei nun als nächstes  $\nu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (2.41), sowie

$$\xi_0 := \nu(\tau_0) \quad \text{und} \quad \nu^*(t) := \lambda^{(2)}(t; \tau_0, \omega, H^-(\tau_0, \omega, \xi_0)).$$

Dann ist  $\nu^*$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.42), wobei die Differenz  $\nu^* - \nu$  (bezüglich  $\omega$ ) 0-quasibeschränkt ist. Sei jetzt  $\tau \in \mathbb{R}$  beliebig und  $\xi^* := H^-(\tau, \omega, \nu(\tau))$ . Bekanntlich ist  $\xi^*$  der eindeutig bestimmte Punkt des  $\mathbb{R}^{d^-}$ , für den die Differenz

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \tau, \omega, \xi^*) - \lambda^{(1)}(\cdot; \tau, \omega, \nu(\tau))$$

0-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Wegen der Beziehung

$$\lambda^{(1)}(t; \tau, \omega, \nu(\tau)) = \nu(t)$$

ist nun aber die Abbildung  $\nu^*(\cdot) - \lambda^{(1)}(\cdot; \tau, \omega, \nu(\tau))$  (bezüglich  $\omega$ ) 0-quasibeschränkt, d.h. es gelten die Identitäten  $\nu^*(\cdot) = \lambda^{(2)}(\cdot; \tau, \omega, \xi^*)$  und

$$H^-(\tau, \omega, \nu(\tau)) = \xi^* = \nu^*(\tau).$$

Damit ist  $H^-(\cdot, \omega, \nu(\cdot)) = \nu^*(\cdot)$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.42).

(d) Die Aussage zur Periodizität von  $H^-$  läßt sich wie in Lemma 1.7.1 zeigen, indem man die bereits bewiesene dynamische Charakterisierung des Punktes  $H^-(\tau, \omega, \xi)$  verwendet.  $\diamond$

Wie im diskreten Fall behandelt das nun folgende Lemma die duale Situation, d.h. die Abschätzung der Norm der Übergangsabbildung gilt jetzt für beliebige  $t \leq s$ .

**Lemma 2.7.2** *Gegeben seien die beiden zufälligen Differentialgleichungen*

$$\dot{x} = A^+(t, \omega)x + f_1(t, \omega, x) \quad (2.44)$$

und

$$\dot{x} = A^+(t, \omega)x + f_2(t, \omega, x) \quad (2.45)$$

mit meßbaren Abbildungen  $A^+ : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^{d^+})$ ,  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$ , und die Abbildung  $A^+(\cdot, \omega)$  sei für jedes  $\omega \in \Omega$  lokal integrierbar. Des weiteren sei  $\Phi^+(t, s, \omega)$  die Übergangsabbildung der homogenen linearen Differentialgleichung  $\dot{x} = A^+(t, \omega)x$  und für beliebige  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^+}$  gelte:

$$\|\Phi^+(t, s, \omega)\|_{s,t,\omega} \leq K e^{\alpha_+(t-s)} \quad \text{für } t \leq s,$$

$$\|f_1(t, \omega, x)\|_{t,\omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f_1(t, \omega, x) - f_1(t, \omega, \bar{x})\|_{t,\omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{t,\omega},$$

$$\|f_2(t, \omega, x)\|_{t,\omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f_2(t, \omega, x) - f_2(t, \omega, \bar{x})\|_{t,\omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{t,\omega},$$

mit reellen Konstanten  $\alpha_+ > 0$ ,  $K \geq 1$ ,  $M \geq 0$  und  $0 \leq L < \frac{\alpha_+}{K}$ . Schließlich seien wieder  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  die zu (2.44) beziehungsweise (2.45) gehörenden allgemeinen Lösungen gemäß Satz A.2.1.

Dann gibt es zu jeder Wahl von  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^+}$  einen eindeutig bestimmten Punkt  $H^+(\tau, \omega, \xi) \in \mathbb{R}^{d^+}$ , so daß die Differenz

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \tau, \omega, H^+(\tau, \omega, \xi)) - \lambda^{(1)}(\cdot; \tau, \omega, \xi)$$

0-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist. Die so erzeugte Abbildung  $H^+ : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$  besitzt folgende Eigenschaften:

(a)  $H^+$  ist meßbar und für beliebige  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $H^+(\cdot, \omega, \cdot)$  stetig.

(b) Für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^+}$  ist die Abschätzung

$$\|H^+(\tau, \omega, \xi) - \xi\|_{\tau,\omega} \leq \frac{2KM}{\alpha_+ - KL}$$

erfüllt.

(c) Ist  $\nu$  eine beliebige  $\omega$ -Lösung von (2.44), so ist die Abbildung  $H^+(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.45).

(d) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A^+$ ,  $f_1$  und  $f_2$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{t,\omega}$  bezüglich  $t$  überträgt sich auf die Abbildung  $H^+$ .

**Beweis:** Der Beweis kann völlig analog zum Beweis von Lemma 2.7.1 durchgeführt werden.  $\diamond$

Mit den beiden soeben bewiesenen Ergebnissen lassen sich nun Resultate zur topologischen Linearisierung gewisser zufälliger Differentialgleichungen herleiten. Dies ist der Gegenstand des folgenden Lemmas.

**Lemma 2.7.3** Für jede beliebige Wahl der Konstanten  $\alpha_- < 0 < \alpha_+$ ,  $K \geq 1$  und  $M \geq 0$  gelten die folgenden Aussagen:

(a) Gegeben sei die zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x + f^-(t, \omega, x) \quad (2.46)$$

und die zugehörige homogene lineare zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^-(t, \omega)x \quad (2.47)$$

mit meßbaren Abbildungen  $A^- : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^{d^-})$  und  $f^- : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ . Die Abbildung  $A^-(\cdot, \omega)$  sei für beliebige  $\omega \in \Omega$  lokal integrierbar,  $\Phi^-(t, s, \omega)$  sei die Übergangsabbildung von (2.47) und für beliebige  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^-}$  gelte:

$$\|\Phi^-(t, s, \omega)\|_{s, t, \omega} \leq K e^{\alpha_-(t-s)} \quad \text{für } t \geq s,$$

$$\|f^-(t, \omega, x)\|_{t, \omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f^-(t, \omega, x) - f^-(t, \omega, \bar{x})\|_{t, \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_{t, \omega},$$

mit  $0 \leq L < \frac{-\alpha_-}{K}$ . Dann gibt es meßbare Abbildungen  $H^-, \tilde{H}^- : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß  $H^-(\cdot, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{H}^-(\cdot, \omega, \cdot)$  für beliebige  $\omega \in \Omega$  stetig sind, mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Ist  $\mu$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.46), so ist  $H^-(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.47).
- (ii) Ist  $\nu$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.47), so ist  $\tilde{H}^-(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.46).
- (iii) Für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$  sind die Abbildungen  $H^-(\tau, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{H}^-(\tau, \omega, \cdot)$  einander invers, mithin Homöomorphismen auf dem  $\mathbb{R}^{d^-}$ .
- (iv) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A^-$  und  $f^-$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{t, \omega}$  bezüglich  $t$  überträgt sich auf die Abbildungen  $H^-$  und  $\tilde{H}^-$ .

Die zufälligen Differentialgleichungen (2.46) und (2.47) sind also topologisch äquivalent im Sinne von Definition 2.1.1.

(b) Gegeben sei die zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^+(t, \omega)x + f^+(t, \omega, x) \quad (2.48)$$

und die zugehörige homogene lineare zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A^+(t, \omega)x \quad (2.49)$$

mit meßbaren Abbildungen  $A^+ : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^{d^+})$  und  $f^+ : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$ . Die Abbildung  $A^+(\cdot, \omega)$  sei für beliebige  $\omega \in \Omega$  lokal integrierbar,  $\Phi^+(t, s, \omega)$  sei die Übergangsabbildung von (2.49) und für beliebige  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{d^+}$  gelte:

$$\|\Phi^+(t, s, \omega)\|_{s, t, \omega} \leq K e^{\alpha_+(t-s)} \quad \text{für } t \leq s,$$

$$\|f^+(t, \omega, x)\|_{t, \omega} \leq M \quad \text{und} \quad \|f^+(t, \omega, x) - f^+(t, \omega, \bar{x})\|_{t, \omega} \leq L\|x - \bar{x}\|_{t, \omega},$$

wobei  $0 \leq L < \frac{\alpha_+}{K}$ . Dann gibt es meßbare Abbildungen  $H^+, \tilde{H}^+ : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^+} \rightarrow \mathbb{R}^{d^+}$ , so daß  $H^+(\cdot, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{H}^+(\cdot, \omega, \cdot)$  für beliebige  $\omega \in \Omega$  stetig sind, mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Ist  $\mu$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.48), so ist  $H^+(\cdot, \omega, \mu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.49).
- (ii) Ist  $\nu$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.49), so ist  $\tilde{H}^+(\cdot, \omega, \nu(\cdot))$  eine  $\omega$ -Lösung von (2.48).
- (iii) Für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$  sind die Abbildungen  $H^+(\tau, \omega, \cdot)$  und  $\tilde{H}^+(\tau, \omega, \cdot)$  einander invers, mithin Homöomorphismen auf dem  $\mathbb{R}^{d^+}$ .
- (iv) Eine eventuelle Periodizität der Abbildungen  $A^+$  und  $f^+$ , sowie der Normen  $\|\cdot\|_{t, \omega}$  bezüglich  $t$  überträgt sich auf die Abbildungen  $H^+$  und  $\tilde{H}^+$ .

Die zufälligen Differentialgleichungen (2.48) und (2.49) sind also topologisch äquivalent.

**Beweis:** Wie im Beweis von Lemma 1.7.3 wird im folgenden nur (a) bewiesen.

Mit  $f_1(t, \omega, x) := f^-(t, \omega, x)$  und  $f_2(t, \omega, x) := 0$  liefert Lemma 2.7.1 eine meßbare Abbildung  $H^- : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , die bezüglich der ersten und der letzten Variablen stetig ist, und die die in (i) und (iv) geforderten Eigenschaften besitzt.

Mit  $f_1(t, \omega, x) := 0$  und  $f_2(t, \omega, x) := f^-(t, \omega, x)$  dagegen liefert Lemma 2.7.1 eine meßbare Abbildung  $\tilde{H}^- : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , die ebenfalls bezüglich der ersten und der letzten Variablen stetig ist, und die die in (ii) und (iv) geforderten Eigenschaften besitzt.

Es bleibt also nur noch (iii) zu zeigen. Dazu wird Lemma 2.7.1 ein drittes Mal angewandt, diesmal mit  $f_1(t, \omega, x) := f^-(t, \omega, x)$  und  $f_2(t, \omega, x) := f^-(t, \omega, x)$ . Bezeichnet  $\lambda(t; \tau, \omega, \xi)$  wieder die allgemeine Lösung von (2.46) gemäß Satz A.2.1, so gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung  $H^* : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-} \rightarrow \mathbb{R}^{d^-}$ , so daß für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$  die Abbildung

$$\lambda(\cdot; \tau, \omega, H^*(\tau, \omega, \xi)) - \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi)$$

0-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, nämlich  $H^*(\tau, \omega, \xi) \equiv \xi$  auf  $\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-}$ . Unter Beachtung der obigen Definitionen von  $H^-$  und  $\tilde{H}^-$  folgt weiter, daß für jedes  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$  die Differenzen

$$\Phi^-(\cdot, \tau, \omega)H^-(\tau, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi)$$

und

$$\lambda(\cdot; \tau, \omega, \tilde{H}^-(\tau, \omega, H^-(\tau, \omega, \xi))) - \Phi^-(\cdot, \tau, \omega)H^-(\tau, \omega, \xi)$$

0-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  sind, d.h. auch die Abbildung

$$\lambda(\cdot; \tau, \omega, \tilde{H}^-(\tau, \omega, H^-(\tau, \omega, \xi))) - \lambda(\cdot; \tau, \omega, \xi)$$

ist 0-quasibeschränkt für alle  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d^-}$  — und die Eindeutigkeitsaussage von Lemma 2.7.1 impliziert

$$\tilde{H}^-(\tau, \omega, H^-(\tau, \omega, \xi)) \equiv H^*(\tau, \omega, \xi) \equiv \xi \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-}.$$

Analog läßt sich die Identität  $H^-(\tau, \omega, \tilde{H}^-(\tau, \omega, \xi)) \equiv \xi$  auf  $\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{d^-}$  beweisen.  $\diamond$

**Bemerkung 2.7.4** Erfüllen die Abbildungen  $f^\pm$  in Lemma 2.7.3 die Gleichheit

$$f^\pm(t, \omega, 0) = 0$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$ , dann liefert der obige Beweis von Lemma 2.7.3 unmittelbar die Identitäten

$$H^\pm(\tau, \omega, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{H}^\pm(\tau, \omega, 0) = 0 \quad \text{für alle} \quad \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega.$$

In diesem Fall ist nämlich die triviale  $\omega$ -Lösung der zufälligen Differentialgleichung (2.46) beziehungsweise (2.48) die eindeutig bestimmte  $\omega$ -Lösung, die 0-quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist.  $\square$

Zum Abschluß dieses Abschnittes, und damit auch des zweiten Kapitels, können nun endlich die Sätze von Hartman-Grobman auf den Fall nichtautonomer zufälliger Differentialgleichungen übertragen werden.

Den Anfang macht der *klassische Satz von Hartman-Grobman*, der unter gewissen Voraussetzungen die vollständige topologische Linearisierung einer zufälligen Differentialgleichung erlaubt.

**Satz 2.7.5** Gegeben sei eine zufällige Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x) \quad (2.50)$$

die den zu Beginn des Abschnittes 2.4 aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) genügt. Ferner gelte

$$0 \notin (\alpha_{i,+} - \delta, \alpha_{i,-} + \delta),$$

für alle  $i = 1, \dots, p$ .

Dann gibt es eine positive Konstante  $L^* > 0$ , so daß (2.50) für  $0 \leq L < L^*$  den Voraussetzungen von Satz 2.4.1 genügt und der homogenen linearen zufälligen Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t, \omega)x \quad (2.51)$$

topologisch äquivalent ist, vermöge einer Abbildung  $H$  (gemäß Definition 2.1.1), die der Identität  $H(\tau, \omega, 0) = 0$  für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$  genügt und eine eventuelle Periodizität von  $A$ ,  $F$  und den Normen  $\|\cdot\|_{t,\omega}$  bezüglich  $t$  übernimmt. Darüber hinaus bildet die Abbildung  $H$  jede in einer zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega)$  verlaufende  $\omega$ -Lösung auf eine  $\omega$ -Lösung von (2.51) ab, die in dem entsprechenden zufälligen invarianten linearen Unterraum verläuft, und umgekehrt.

**Beweis:** Zum Beweis des Satzes müssen — wie im diskreten Satz 1.7.5 — nur die von Satz 2.6.2 und Lemma 2.7.3 garantierten Abbildungen geeignet kombiniert werden.  $\diamond$

In der Situation des obigen Satzes nennt man die lineare zufällige Differentialgleichung (2.51) *hyperbolisch*, in Anlehnung an den bekannten Begriff aus der Theorie der autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen, der dadurch verallgemeinert wird. Ist jetzt abschließend die Gleichung (2.51) nicht hyperbolisch, so garantiert der nun folgende *verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman* zumindest noch eine teilweise topologische Linearisierung der betrachteten Ausgangsgleichung.

**Satz 2.7.6** Gegeben sei wieder eine zufällige Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = A(t, \omega)x + F(t, \omega, x) \quad (2.52)$$

die den zu Beginn des Abschnittes 2.4 aufgeführten Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) genügt. Ferner gelte

$$0 \in [\alpha_{i,+}, \alpha_{i,-}],$$

für ein  $i \in \{1, \dots, p\}$ .

Dann gibt es eine positive Konstante  $L^* > 0$ , so daß (2.52) für  $0 \leq L < L^*$  den Voraussetzungen von Satz 2.4.1 genügt und der entkoppelten, teilweise linearen zufälligen Differentialgleichung

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^1 & = & A_1(t, \omega)x^1 \\ & \vdots & \\ \dot{x}^{i-1} & = & A_{i-1}(t, \omega)x^{i-1} \\ \dot{x}^i & = & A_i(t, \omega)x^i + F_i(t, \omega, \pi^{i,i}(t, \omega, x^i)) \\ \dot{x}^{i+1} & = & A_{i+1}(t, \omega)x^{i+1} \\ & \vdots & \\ \dot{x}^p & = & A_p(t, \omega)x^p \end{array} \quad (2.53)$$

topologisch äquivalent ist, vermöge einer Abbildung  $H$  (gemäß Definition 2.1.1), die der Identität  $H(\tau, \omega, 0) = 0$  für beliebige  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$  genügt und eine eventuelle Periodizität von  $A$ ,  $F$  und den Normen  $\|\cdot\|_{t, \omega}$  bezüglich  $t$  übernimmt. Darüber hinaus bildet die Abbildung  $H$  jede in einer zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega)$  verlaufende  $\omega$ -Lösung auf eine  $\omega$ -Lösung von (2.53) ab, die in dem entsprechenden zufälligen invarianten linearen Unterraum verläuft, und umgekehrt.

**Beweis:** Auch dieser verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman ist eine unmittelbare Konsequenz des Satzes 2.6.2 und des Lemmas 2.7.3.  $\diamond$

## Kapitel 3

# Zufällige dynamische Systeme

### 3.1 Definitionen und lineare Theorie

Betrachtet man die Ergebnisse der letzten beiden Kapitel, so sind sicherlich noch einige Fragen bezüglich der Anwendbarkeit dieser Ergebnisse offen geblieben. Dabei stehen vor allem hinter den Voraussetzungen an den Linearteil und der Wahl der von  $\omega$  und  $k$  (beziehungsweise  $t$ ) abhängigen Normen große Fragezeichen. Des weiteren sind die globalen Lipschitzbedingungen an die Nichtlinearität extrem einschränkend. Die Beantwortung dieser Fragen steht im Mittelpunkt des vorliegenden abschließenden Kapitels.

Ein erster Schritt wurde bereits in den ersten beiden Kapiteln vollzogen. Es wurde mehrfach darauf hingewiesen, daß im autonomen Spezialfall die Voraussetzungen an den Linearteil unmittelbare Konsequenzen gewisser Eigenwertbedingungen sind, und daß man dann — indem die Normen  $\|\cdot\|_{k,\omega}$  beziehungsweise  $\|\cdot\|_{t,\omega}$  unabhängig von  $k$  beziehungsweise  $t$  gewählt werden — “echt autonome” Ergebnisse erhält: Die Abbildungen  $s^{i,j}$ , die die zufälligen invarianten Faserbündel erzeugen, sind unabhängig von der Zeitvariablen, geben also somit sogar Anlaß zu zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten im Phasenraum, und ähnliches gilt für die Abbildungen  $H$  in den Sätzen von Hartman-Grobman. Dieser autonome Spezialfall ist jedoch bei weitem noch nicht alles...

Bekanntlich lassen sich gewissen deterministischen autonomen Differenzgleichungen beziehungsweise Differentialgleichungen auf kanonische Art und Weise *diskrete* beziehungsweise *kontinuierliche deterministische dynamische Systeme* zuordnen. Bezeichnet nämlich  $\varphi(\cdot, \xi)$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad , \quad x_0 = \xi \quad ,$$

beziehungsweise im kontinuierlichen Fall

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = \xi \quad ,$$

mit einem  $C^1$ -Diffeomorphismus  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , und nimmt man an, daß  $\varphi(\cdot, \xi)$  für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^d$  auf ganz  $\mathbb{Z}$  beziehungsweise  $\mathbb{R}$  definiert ist, so liefert die Autonomie der Gleichungen leicht die folgende *Gruppeneigenschaft*: Unter Verwendung der Abkürzung  $\varphi(t) := \varphi(t, \cdot)$  gelten die Identitäten

$$\varphi(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^d}$$

und

$$\varphi(t+s) = \varphi(t) \circ \varphi(s),$$

für beliebige  $t, s \in \mathbb{T}$ , mit  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ . Interpretiert man nun den  $\mathbb{R}^d$  als *Zustandsraum* eines (zum Beispiel physikalisch motivierten) Systems, so gibt die Abbildung  $\varphi(\cdot, \xi)$  für jeden *Anfangszustand*  $\xi$  die zeitliche Veränderung des Zustands an. Die obige Gruppeneigenschaft besagt dann, daß tatsächlich nur der augenblickliche Zustand die weitere (beziehungsweise die vergangene) Zeitentwicklung festlegt, unabhängig von dem Zeitpunkt, an dem der Zustand beobachtet wird (vergleiche Abbildung 3.1). Mit anderen Worten: Allein der augenblickliche Zustand eines deterministischen dynamischen Systems bestimmt bereits die gesamte Zukunft und die gesamte Vergangenheit des Systems.

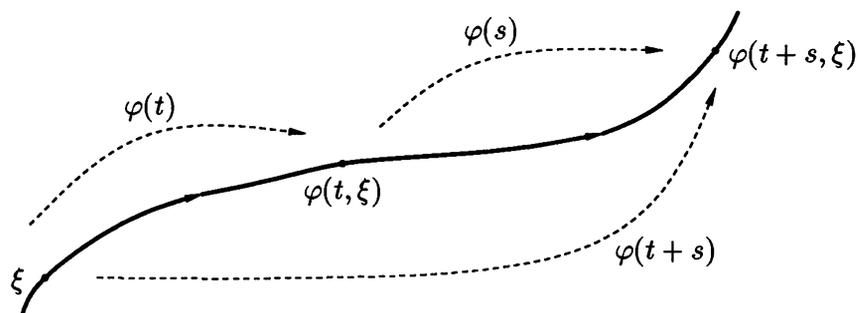


Abbildung 3.1: Die Zustandsentwicklung bei einem dynamischen System

Diese Sicht der Dinge ist natürlich extrem idealisiert. In Wirklichkeit wird ein „reales“ System von der Umgebung in mannigfacher Weise beeinflusst — und all diese Einflüsse müssen streng genommen mit in das System eingearbeitet werden. Leider läßt sich jedoch ein derartig großes System (wenn überhaupt) nur sehr schwer mit Methoden der Theorie der dynamischen Systeme untersuchen, da der Zustandsraum sehr schnell unendlich-dimensional sein wird.

Eine andere Möglichkeit, diese äußeren Einflüsse in die Untersuchungen eines dynamischen Systems miteinzubeziehen, wurde vor einiger Zeit an der Universität Bremen entwickelt. Die Grundidee besteht — vereinfacht ausgedrückt — darin, daß man die Dynamik des betrachteten Systems und die Störeinflüsse als getrennte Komponenten betrachtet, wobei die Störeinflüsse (die im folgenden auch als Rauschen bezeichnet werden) in spezieller Art und Weise auf die Dynamik einwirken. Der Vorteil dieser Betrachtungsweise liegt auf der Hand: Während sich die Dynamik noch immer in einem endlich-dimensionalen Raum abspielt, wird nur das Rauschen durch einen (im allgemeinen) unendlich-dimensionalen Raum modelliert. Das so entstandene neue System wird als *zufälliges dynamisches System* bezeichnet.

Nach diesen vagen Vorbemerkungen sollen im folgenden die grundlegenden Definitionen und Ergebnisse aus der Theorie der zufälligen dynamischen Systeme angegeben werden. Den Anfang macht die eben erwähnte Komponente des Rauschens.

**Definition 3.1.1** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sowie eine Zeitmenge  $\mathbb{T}$ , wobei  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  gilt. Dann heißt das Quadrupel  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}})$  meßbares dynamisches System, falls die Abbildungen  $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$  den folgenden beiden Bedingungen genügen:

(a) Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{T} \times \Omega & \rightarrow & \Omega \\ (t, \omega) & \mapsto & \theta_t \omega \end{cases}$$

ist meßbar.

(b) Die Abbildungsfamilie  $(\theta_t)_{t \in \mathbb{T}}$  bildet eine Gruppe, d.h. es gilt

$$\theta_0 = id_{\Omega},$$

sowie

$$\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$$

für beliebige  $t, s \in \mathbb{T}$ .

Gilt zusätzlich noch die folgende Bedingung (c), so nennt man  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}})$  metrisches dynamisches System oder auch maßerhaltendes dynamisches System:

(c) Die Abbildungen  $\theta_t$  sind  $\mathbb{P}$ -erhaltend, d.h. für beliebige  $t \in \mathbb{T}$  und  $F \in \mathcal{F}$  ist die Identität

$$\mathbb{P}(\theta_t^{-1}(F)) = \mathbb{P}(F)$$

erfüllt.

Schließlich heißt ein metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}})$  ergodisch, falls alle  $\theta_t$ -invarianten Mengen Nullmengen oder Mengen mit Wahrscheinlichkeit 1 sind, d.h. falls für beliebige  $F \in \mathcal{F}$  die Implikation

$$\theta_t^{-1}(F) = F \text{ für alle } t \in \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(F) = 0 \text{ oder } \mathbb{P}(F) = 1$$

gilt.

Einige Interpretationen sollen diese Definition näher erläutern. Zunächst einmal besteht die Menge  $\Omega$  aus allen möglichen Zuständen des Rauschens — und die Abbildungsfamilie  $(\theta_t)_{t \in \mathbb{T}}$  beschreibt die zeitliche Veränderung dieser Zustände. Dabei zeigt die Gruppeneigenschaft, daß sich das Rauschen wie ein deterministisches dynamisches System verhält: Der augenblickliche Zustand bestimmt eindeutig Zukunft und Vergangenheit, unabhängig von der gerade registrierten Zeit. Die hohe Komplexität dieses dynamischen Systems des Rauschens bedingt jedoch, daß in der Praxis der genaue Zustand nicht ermittelt werden kann. Aus diesem Grund wird jeder Menge  $F \in \mathcal{F}$  von Zuständen eine gewisse Häufigkeit  $\mathbb{P}(F)$  zugeordnet.

In vielen Anwendungen wird  $\Omega$  ein unendlich-dimensionaler Funktionenraum sein und  $(\theta_t)_{t \in \mathbb{T}}$  eine Familie von Shift-Abbildungen. Eine in  $\Omega$  enthaltene Funktion kann dann als ein möglicher Zeitablauf der Störeinflüsse interpretiert werden.

Als nächstes soll nun die dynamische Komponente eines zufälligen dynamischen Systems vorgestellt werden — zusammen mit den Regeln, die das Einwirken des Rauschens auf die Dynamik beschreiben.

**Definition 3.1.2** Ein meßbares zufälliges dynamisches System auf dem  $\mathbb{R}^d$  über einem metrischen dynamischen System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}})$  mit Zeitmenge  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  ist eine meßbare Abbildung  $\varphi : \mathbb{T} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die einen Kozykel über  $\theta_t$  bildet, d.h. die Abbildungen  $\varphi(t, \omega) := \varphi(t, \omega, \cdot)$  genügen den Identitäten

$$\varphi(0, \omega) = id_{\mathbb{R}^d}$$

und

$$\varphi(t + s, \omega) = \varphi(t, \theta_s \omega) \circ \varphi(s, \omega),$$

für beliebige  $t, s \in \mathbb{T}$  und  $\omega \in \Omega$ .

Für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  nennt man die Abbildung  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$  den  $\omega$ -Orbit von  $\varphi$  durch  $\xi$ . Das zufällige dynamische System  $\varphi$  heißt linear, falls die Abbildungen  $\varphi(t, \omega)$  linear sind, es heißt stetig, falls die Abbildungen  $\varphi(\cdot, \omega, \cdot)$  stetig sind, und es heißt differenzierbar von der Klasse  $C^1$ , falls es stetig ist, die Abbildungen  $\varphi(t, \omega)$  von der Klasse  $C^1$  sind und die Ableitung stetig bezüglich  $(t, x)$  ist, für beliebige  $t \in \mathbb{T}$  und  $\omega \in \Omega$ . Schließlich nennt man im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  das zufällige dynamische System diskretes zufälliges dynamisches System, im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  dagegen kontinuierliches zufälliges dynamisches System.

In der obigen Definition ist die Analogie zu den eingangs erwähnten deterministischen dynamischen Systemen unverkennbar. Neu ist nur, daß die Abbildung  $\varphi$  neben der Zeit  $t$  und dem Anfangszustand  $\xi$  jetzt auch noch von dem Störeinfluß  $\omega$  abhängt. Ferner wird die Gruppeneigenschaft durch die Kozykeleigenschaft ersetzt. Man erkennt aber sofort, daß die Art und Weise, in der dies alles geschieht, den ursprünglichen Begriff eines dynamischen Systems verallgemeinert: Ist  $\varphi$  von  $\omega$  unabhängig, so liegt ein deterministisches dynamisches System vor. Im echt zufälligen Fall dagegen hängt die zeitliche Entwicklung des Systems nun nicht mehr nur vom Anfangszustand  $\xi \in \mathbb{R}^d$  ab, sondern auch noch von dem Störeinfluß  $\omega \in \Omega$  — und die Kozykel-eigenschaft bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß sich auch der Störeinfluß im Lauf der Zeit verändert (vergleiche Abbildung 3.2).

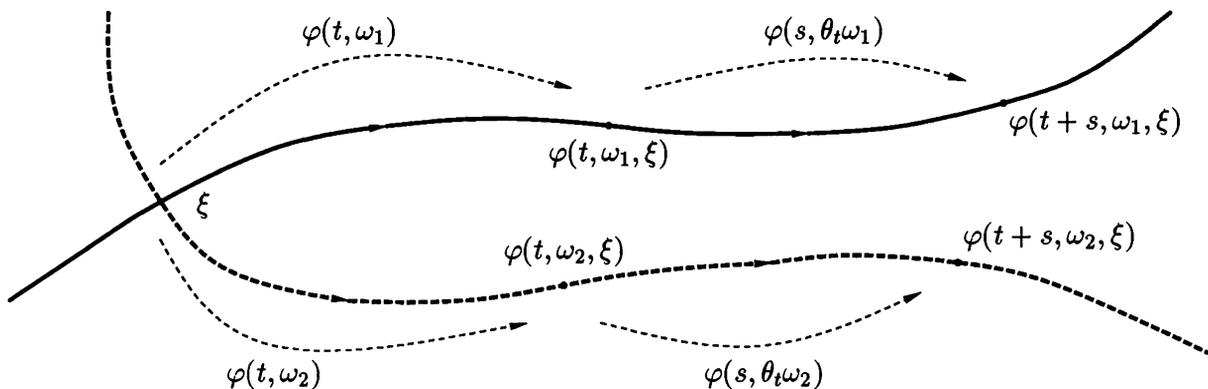
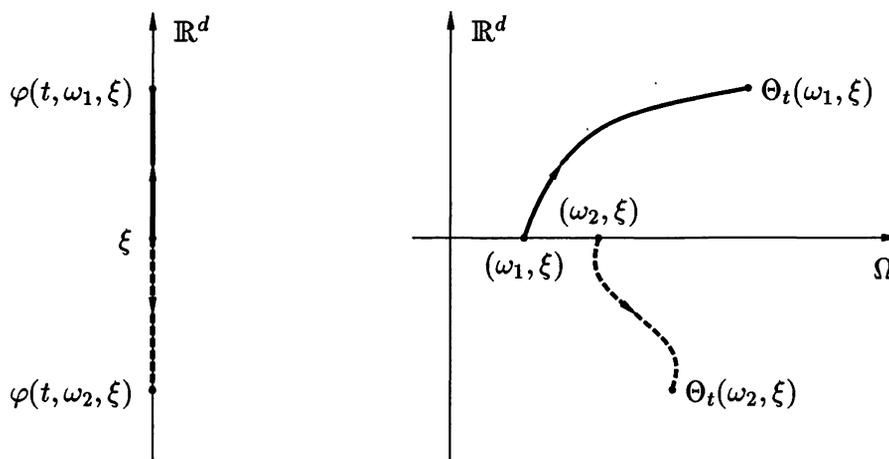


Abbildung 3.2: Die Zustandsentwicklung bei einem zufälligen dynamischen System

Trotz alledem liegt dem Begriff des zufälligen dynamischen Systems durchaus eine deterministische Sichtweise zugrunde. Betrachtet man nämlich den erweiterten Zustandsraum  $\Omega \times \mathbb{R}^d$  und beschreibt die zeitliche Entwicklung eines erweiterten Anfangszustandes  $(\omega, \xi)$  durch die Abbildungsfamilie  $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , mit

$$\Theta_t : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{R}^d & \rightarrow & \Omega \times \mathbb{R}^d \\ (\omega, \xi) & \mapsto & (\theta_t \omega, \varphi(t, \omega, \xi)) \end{cases},$$

so prüft man leicht nach, daß die Abbildungen  $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{T}}$  die Gruppeneigenschaft erfüllen. Man nennt  $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{T}}$  auch den von  $\varphi$  erzeugten Schiefproduktfluß (vergleiche Abbildung 3.3). Weitergehende Aussagen zu allgemeinen zufälligen dynamischen Systemen findet man in der

Abbildung 3.3: Der von  $\varphi$  erzeugte Schiefproduktfluß  $\Theta$ 

Arbeit ARNOLD, CRAUEL [4], sowie in ARNOLD [2].

Es wird das Ziel dieses Kapitels sein, die Ergebnisse der letzten beiden Kapitel auf zufällige dynamische Systeme anzuwenden, d.h. es soll das qualitative Verhalten nichtlinearer zufälliger dynamischer Systeme mit Hilfe eines linearisierten Systems untersucht werden. Der erste — und vermutlich wichtigste — Schritt in diese Richtung ist der nun folgende multiplikative Ergodensatz, der auf OSELEDETS [32] zurückgeht und das asymptotische Verhalten eines linearen zufälligen dynamischen Systems beschreibt.

**Satz 3.1.3 (Multiplikativer Ergodensatz)** *Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}})$ , sowie darüber ein stetiges lineares zufälliges dynamisches System  $\Phi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ . Ferner gelte die folgende Integrierbarkeitsbedingung<sup>1</sup>:*

$$\ln^+ \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t, \omega)\| + \ln^+ \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi(t, \omega)^{-1}\| \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Dann gibt es eine  $\theta_t$ -invariante Menge  $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$  mit  $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$ , sowie reelle Zahlen

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$$

(die sogenannten Lyapunov-Exponenten) mit Vielfachheiten  $d_i$ ,  $\sum_{i=1}^p d_i = d$ , so daß für alle  $\omega \in \tilde{\Omega}$  die folgenden Aussagen gelten:

- (a) *Es existiert eine Zerlegung  $\mathbb{R}^d = E_1(\omega) \oplus \dots \oplus E_p(\omega)$ , wobei die sogenannten Oseledets-Räume  $E_i(\omega)$  meßbar von  $\omega$  abhängen, mit  $\dim E_i(\omega) = d_i$  und*

$$\Phi(t, \omega)E_i(\omega) = E_i(\theta_t \omega)$$

*für alle  $t \in \mathbb{T}$  und  $i = 1, \dots, p$ . Mit anderen Worten: Die Oseledets-Räume sind invariant unter dem linearen Kozykel  $\Phi$ .*

- (b) *Für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  existieren die Grenzwerte  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(t, \omega)x\|$  und es gilt:*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(t, \omega)x\| = \lambda_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in E_i(\omega) \setminus \{0\}.$$

<sup>1</sup>Die in der Integrierbarkeitsbedingung auftretende Funktion  $\ln^+$  ist wie üblich definiert als  $\ln^+ x := \max\{0, \ln x\}$ .

**Beweis:** Der Beweis dieses Satzes kann etwa in ARNOLD [2, Abschnitt 3.3] gefunden werden.  $\diamond$

Die Lyapunov-Exponenten geben also gerade die möglichen exponentiellen Wachstumsraten der Abbildungen  $\Phi(\cdot, \omega)x$  an. Es wird sich bald zeigen, daß sie die Rolle der Realteile der Eigenwerte (im Fall der autonomen Differentialgleichungen) beziehungsweise der Logarithmen der Eigenwertbeträge (im Fall der autonomen Differenzgleichungen) übernehmen. Die Tatsache, daß die Lyapunov-Exponenten von  $\omega$  unabhängig sind, ist eine Konsequenz der vorausgesetzten Ergodizität des metrischen dynamischen Systems  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}})$ . Diese Voraussetzung wurde nur deshalb angenommen, um im folgenden die Ergebnisse möglichst einfach angeben zu können. Im nicht ergodischen Fall erhält man zu  $\omega \in \tilde{\Omega}$  die Lyapunov-Exponenten  $\lambda_1(\omega) > \dots > \lambda_{p(\omega)}(\omega)$ , wobei  $p(\omega) \in \{1, \dots, d\}$ , mit Vielfachheiten  $d_i(\omega)$ ,  $\sum_{i=1}^{p(\omega)} d_i(\omega) = d$ . Dabei sind die Abbildungen  $\lambda_i$ ,  $p$  und  $d_i$  zwar im allgemeinen nicht mehr konstant, aber wenigstens noch invariant bezüglich  $\theta_t$ , d.h. es gilt etwa

$$p(\theta_t \omega) = p(\omega) \quad \text{für beliebige } t \in \mathbb{T}, \omega \in \tilde{\Omega},$$

und analog für  $\lambda_i$  und  $d_i$ . Schließlich bleiben die Aussagen (a) und (b) in Satz 3.1.3 erhalten, wenn man die  $\omega$ -Abhängigkeit von  $\lambda_i$ ,  $p$  und  $d_i$  in der Formulierung berücksichtigt.

Im deterministischen Fall spielen die hyperbolischen linearen dynamischen Systeme eine besondere Rolle — nicht zuletzt deswegen, weil im allgemeinen nur für dynamische Systeme mit hyperbolischem linearen Anteil der klassische Satz von Hartman-Grobman gilt, der ja eine vollständige Linearisierung erlaubt. Im Fall der zufälligen dynamischen Systeme wird das nicht anders sein. Die folgende Definition der Hyperbolizität für lineare zufällige dynamische Systeme ist dabei keine Überraschung.

**Definition 3.1.4** *In der Situation von Satz 3.1.3 heißt das lineare zufällige dynamische System  $\Phi$  hyperbolisch, falls keiner der Lyapunov-Exponenten verschwindet.*

Für die Anwendung der Ergebnisse der ersten beiden Kapitel ist es von entscheidender Bedeutung, daß der multiplikative Ergodensatz die Konstruktion sogenannter *zufälliger Normen* ermöglicht, die auf BOXLER [12] und DAHLKE [15] zurückgehen. Die im Rahmen dieser Arbeit benötigten Ergebnisse sind im folgenden Satz zusammengefaßt.

**Satz 3.1.5** *Es sei die Situation von Satz 3.1.3 vorausgesetzt. Ferner sei  $a > 0$  eine beliebige, aber feste, reelle Konstante, so daß die Intervalle  $[\lambda_i - a, \lambda_i + a]$ ,  $i = 1, \dots, p$ , disjunkt sind, und  $\|\cdot\|$  sei die euklidische Norm auf dem  $\mathbb{R}^d$ . Definiert man dann für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $x = x^1 + \dots + x^p \in E_1(\omega) \oplus \dots \oplus E_p(\omega)$*

$$\|x\|_\omega := \sqrt{\|x^1\|_\omega^2 + \dots + \|x^p\|_\omega^2},$$

mit

$$\|u\|_\omega := \begin{cases} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|\Phi(t, \omega)u\|^2 e^{-2(\lambda_i t + a|t|)} dt \right)^{\frac{1}{2}} & \text{für } \mathbb{T} = \mathbb{R}, \\ \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\Phi(n, \omega)u\|^2 e^{-2(\lambda_i n + a|n|)} \right)^{\frac{1}{2}} & \text{für } \mathbb{T} = \mathbb{Z}, \end{cases}$$

für  $u \in E_i(\omega)$ , sowie  $\|x\|_\omega := \|x\|$  für beliebige  $\omega \notin \tilde{\Omega}$ , so gelten die folgenden Aussagen:

(a)  $\|\cdot\|_\omega$  ist eine zufällige Norm auf dem  $\mathbb{R}^d$ , d.h. die Abbildung  $(x, \omega) \mapsto \|x\|_\omega$  ist meßbar.

(b) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert eine meßbare Abbildung  $B_\varepsilon : \Omega \rightarrow [1, \infty)$  mit

$$\frac{1}{B_\varepsilon(\omega)} \|x\| \leq \|x\|_\omega \leq B_\varepsilon(\omega) \|x\|$$

und

$$B_\varepsilon(\omega) e^{-\varepsilon|t|} \leq B_\varepsilon(\theta_t \omega) \leq B_\varepsilon(\omega) e^{\varepsilon|t|}$$

für beliebige  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $t \in \mathbb{T}$ .

(c) Für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $x \in E_i(\omega)$  und  $t \in \mathbb{T}$  gelten die Abschätzungen

$$e^{\lambda_i t - a|t|} \|x\|_\omega \leq \|\Phi(t, \omega)x\|_{\theta_t \omega} \leq e^{\lambda_i t + a|t|} \|x\|_\omega,$$

beziehungsweise die dazu äquivalenten Abschätzungen

$$e^{\lambda_i t - a|t|} \leq \|\Phi(t, \omega)|_{E_i(\omega)}\|_{\omega, \theta_t \omega} \leq e^{\lambda_i t + a|t|},$$

mit  $\|\Phi(t, \omega)|_{E_i(\omega)}\|_{\omega, \theta_t \omega} := \sup\{\|\Phi(t, \omega)x\|_{\theta_t \omega} : x \in E_i(\omega), \|x\|_\omega \leq 1\}$ .

**Beweis:** Der Beweis dieses Satzes kann in ARNOLD [2, Theorem 3.74] gefunden werden. Dort ist die in (a) geforderte Aussage bezüglich der Meßbarkeit der Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R}^d \times \Omega & \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ (x, \omega) & \mapsto \|x\|_\omega \end{cases}$$

zwar nicht explizit enthalten, sie folgt jedoch leicht unter Verwendung von Corollary 3.78 in ARNOLD [2]. Damit läßt sich nämlich zeigen, daß für jedes  $i \in \{1, \dots, p\}$  die Projektion eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^d$  auf  $E_i(\omega)$  längs  $\bigoplus_{j \neq i} E_j(\omega)$  meßbar von  $x$  und  $\omega$  abhängt — und dies impliziert zusammen mit der obigen Definition von  $\|x\|_\omega$  bereits die Behauptung.  $\diamond$

**Bemerkung 3.1.6** Die in (c) enthaltenen Abschätzungen für  $\|\Phi(t, \omega)|_{E_i(\omega)}\|_{\omega, \theta_t \omega}$  liefern in natürlicher Weise auch Abschätzungen für  $\|\Phi(t, \omega)\|_{\omega, \theta_t \omega}$ . Sei dazu ein beliebiger Vektor  $x = x^1 + \dots + x^p \in E_1(\omega) \oplus \dots \oplus E_p(\omega)$  gegeben. Dann erhält man für beliebige  $t \in \mathbb{T}$  mit  $t \geq 0$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, \omega)x\|_{\theta_t \omega} &= \sqrt{\underbrace{\|\Phi(t, \omega)x^1\|_{\theta_t \omega}^2}_{\in E_1(\theta_t \omega)} + \dots + \underbrace{\|\Phi(t, \omega)x^p\|_{\theta_t \omega}^2}_{\in E_p(\theta_t \omega)}} \leq \\ &\leq \sqrt{(e^{(\lambda_1 + a)t} \|x^1\|_\omega)^2 + \dots + (e^{(\lambda_p + a)t} \|x^p\|_\omega)^2} \leq \\ &\leq e^{(\lambda_1 + a)t} \sqrt{\|x^1\|_\omega^2 + \dots + \|x^p\|_\omega^2} = \\ &= e^{(\lambda_1 + a)t} \|x\|_\omega, \end{aligned}$$

und damit

$$\|\Phi(t, \omega)\|_{\omega, \theta_t \omega} \leq e^{(\lambda_1 + a)t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Analog läßt sich auch die Abschätzung

$$\|\Phi(t, \omega)\|_{\omega, \theta_t \omega} \leq e^{(\lambda_p - a)t} \quad \text{für alle } t \leq 0$$

herleiten.  $\square$

Die in Satz 3.1.5 eingeführten zufälligen Normen ermöglichen eine kanonische Wahl der in den ersten beiden Kapiteln benötigten, sowohl von der Zeit als auch von  $\omega$  abhängigen Normen  $\|\cdot\|_{k,\omega}$  beziehungsweise  $\|\cdot\|_{t,\omega}$  — man betrachtet nämlich einfach  $\|\cdot\|_{\theta_t\omega}$ , mit  $(t,\omega) \in \mathbb{T} \times \Omega$ . Speziell im kontinuierlichen Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  kann dann die in Definition 2.2.1 auftauchende Funktion  $\ell$  als  $\ell(t,\omega) := B_1(\theta_t\omega)$  gewählt werden, denn gemäß Satz 3.1.5(b) ist die Abbildung  $B_1(\theta_t\omega)$  für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  lokal beschränkt<sup>2</sup>. Damit läßt sich jetzt auch der Begriff der Quasibeschränktheit an die in diesem Kapitel behandelte spezielle Situation anpassen.

**Definition 3.1.7** Gegeben sei ein metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}})$ , mit  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ . Ferner sei  $\|\cdot\|_\omega$  eine zufällige Norm auf dem  $\mathbb{R}^d$ , die die in Satz 3.1.5(a),(b) aufgeführten Eigenschaften besitzt,  $\mu : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei eine Abbildung und  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  sei eine beliebige positive Konstante. Die Abbildung  $\mu$  heißt  $\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , falls für beliebige  $t \in \mathbb{T}$  mit  $t \geq 0$  die Abschätzung

$$\|\mu(t)\|_{\theta_t\omega} \leq C\gamma^t \quad (3.1)$$

erfüllt ist, mit einer Konstanten  $C \geq 0$ . Wie bereits in Definition 1.2.1 werden die Begriffe  $\gamma^-$ -beziehungsweise  $\gamma$ -Quasibeschränktheit verwendet, falls die obige Abschätzung (3.1) für beliebige  $t \in \mathbb{T}$  mit  $t \leq 0$  beziehungsweise für beliebige  $t \in \mathbb{T}$  gilt.

Für  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  ist diese Definition der Quasibeschränktheit eine direkte Übertragung der im ersten Kapitel angegebenen Definition 1.2.1. Dagegen weicht sie im kontinuierlichen Fall von der Definition 2.2.1 insofern ab, als an Stelle der Abbildung  $e^{\gamma t}$  die Abbildung  $\gamma^t$  betrachtet wird. Es wird sich jedoch im Abschnitt 3.3 herausstellen, daß diese abweichende Wahl für die Belange des vorliegenden Kapitels durchaus sinnvoll ist.

Das nun folgende Lemma zeigt, daß in der speziellen Situation der Definition 3.1.7 die Quasibeschränktheit einer Abbildung auch Aussagen über das tatsächliche asymptotische Verhalten der betrachteten Abbildung  $\mu$  ermöglicht, d.h. genauer über das asymptotische Verhalten der euklidischen Norm  $\|\mu(t)\|$  — und ebenso umgekehrt.

**Lemma 3.1.8** In der Situation der obigen Definition 3.1.7 gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Ist  $\mu$  eine (bezüglich  $\omega \in \tilde{\Omega}$ )  $\gamma^+$ -quasibeschränkte Abbildung, so existiert zu jedem  $\beta > \gamma$  eine Konstante  $C_\beta \geq 0$ , so daß für beliebige  $t \in \mathbb{T}$  mit  $t \geq 0$  die Abschätzung

$$\|\mu(t)\| \leq C_\beta \cdot \beta^t$$

erfüllt ist.

- (b) Genügt umgekehrt die Abbildung  $\mu$  für beliebige  $t \in \mathbb{T}$  mit  $t \geq 0$  einer Abschätzung der Form

$$\|\mu(t)\| \leq C_\beta \cdot \beta^t,$$

mit  $\beta > 0$  und  $C_\beta \geq 0$ , so ist  $\mu$  eine  $\gamma^+$ -quasibeschränkte Abbildung bezüglich  $\omega$ , für jedes beliebige  $\gamma > \beta$  und jedes  $\omega \in \tilde{\Omega}$ .

Analoge Aussagen erhält man auch für den Begriff der  $\gamma^-$ -Quasibeschränktheit, wenn man in (a) beziehungsweise (b) jeweils  $0 < \beta < \gamma$  beziehungsweise  $0 < \gamma < \beta$  wählt.

<sup>2</sup>Die Tatsache, daß die lokale Beschränktheit nur für alle  $\omega \in \tilde{\Omega}$  gilt, ist dabei im folgenden keine Einschränkung, da man sich bei der Anwendung der Ergebnisse des zweiten Kapitels auf die  $\theta_t$ -invariante Menge  $\tilde{\Omega}$  zurückziehen kann.

**Beweis:** Zum Beweis von (a) sei  $\beta > \gamma$  beliebig, aber fest. Setzt man dann  $\varepsilon := \ln \frac{\beta}{\gamma} > 0$ , so erhält man unter Verwendung von 3.1.5(b) aus der vorausgesetzten  $\gamma^+$ -Quasibeschränktheit (bezüglich  $\omega \in \tilde{\Omega}$ ) für beliebige  $t \geq 0$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mu(t)\| &\leq B_\varepsilon(\theta_t \omega) \cdot \|\mu(t)\|_{\theta_t \omega} \leq B_\varepsilon(\omega) e^{\varepsilon |t|} \cdot \|\mu(t)\|_{\theta_t \omega} \leq \\ &\leq B_\varepsilon(\omega) e^{\varepsilon |t|} \cdot C \gamma^t = B_\varepsilon(\omega) C \cdot (\gamma e^\varepsilon)^t, \end{aligned}$$

woraus mit  $C_\beta := B_\varepsilon(\omega) C$  und  $\gamma e^\varepsilon = \beta$  sofort die gewünschte Ungleichung folgt. Völlig analog erhält man in (b) die  $\gamma^+$ -Quasibeschränktheit (bezüglich  $\omega \in \tilde{\Omega}$ ) der Abbildung  $\mu$  aus der Abschätzung

$$\|\mu(t)\|_{\theta_t \omega} \leq B_\varepsilon(\theta_t \omega) \cdot \|\mu(t)\| \leq B_\varepsilon(\omega) C_\beta \cdot (\beta e^\varepsilon)^t,$$

wobei  $\varepsilon := \ln \frac{\gamma}{\beta} > 0$  gesetzt wird.  $\diamond$

Zum Abschluß dieses einleitenden Abschnittes soll noch ein Ergebnis angegeben werden, mit dessen Hilfe im folgenden die benötigte Blockdiagonalgestalt eines linearen zufälligen dynamischen Systems konstruiert werden kann.

**Satz 3.1.9** *Wieder sei die Situation von Satz 3.1.3 vorausgesetzt. Dann gibt es eine meßbare Abbildung  $P : \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}^d)$ , so daß durch*

$$\Phi^*(t, \omega) := P(\theta_t \omega) \Phi(t, \omega) P(\omega)^{-1}$$

*ein meßbares lineares zufälliges dynamisches System<sup>3</sup> mit Blockdiagonalgestalt definiert wird, d.h. es gilt*

$$\Phi^*(t, \omega) = \begin{pmatrix} \boxed{\Phi_1^*(t, \omega)} & & & 0 \\ & \boxed{\Phi_2^*(t, \omega)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\Phi_p^*(t, \omega)} \end{pmatrix},$$

*bezüglich der Zerlegung  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}$ . Darüber hinaus besitzt  $\Phi^*$  die folgenden Eigenschaften:*

- (a) *Unter Verwendung der Zerlegung  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}$ , wobei  $d_i$  die Vielfachheit des  $i$ -ten Lyapunov-Exponenten  $\lambda_i$  von  $\Phi$  ist, ist der  $i$ -te Block  $\Phi_i^*$  ein lineares zufälliges dynamisches System auf dem  $\mathbb{R}^{d_i}$  (über dem metrischen dynamischen System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}})$ ), für beliebiges  $i = 1, \dots, p$ .*
- (b) *Für  $\Phi^*$  gelten die Aussagen des Satzes 3.1.3. Dabei besteht das Lyapunov-Spektrum von  $\Phi^*$  ebenfalls aus den Lyapunov-Exponenten  $\lambda_i$  mit Vielfachheiten  $d_i$ , und der  $i$ -te Oseledets-Raum ist gerade der Unterraum*

$$E_i^{\Phi^*}(\omega) := \{0\} \times \dots \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d_i} \times \{0\} \times \dots \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d,$$

*für beliebiges  $i = 1, \dots, p$ .*

<sup>3</sup>Für  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  ist  $\Phi^*$  offensichtlich sogar ein stetiges lineares zufälliges dynamisches System.

(c) Für  $\Phi^*$  gelten die Aussagen des Satzes 3.1.5, d.h. es gibt eine zufällige Norm  $\|\cdot\|_\omega^*$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , so daß die Aussagen (a), (b) und (c) des Satzes 3.1.5 erfüllt sind. Dabei kann man natürlich  $\Phi^*(t, \omega)|_{E_i^{\Phi^*}(\omega)}$  mit  $\Phi_i^*(t, \omega)$  identifizieren.

**Beweis:** Definiert man den zufälligen Isomorphismus  $P(\omega)$  wie in ARNOLD [2, Corollary 3.78] — d.h.  $P(\omega)$  bildet für jedes  $\omega \in \tilde{\Omega}$  den  $i$ -ten Oseledets-Raum  $E_i(\omega)$  in geeigneter Weise bijektiv auf den oben definierten Raum  $E_i^{\Phi^*}(\omega)$  ab — so folgt die Gültigkeit von (a) und (b) direkt aus Corollary 3.78 und Proposition 3.53 in ARNOLD [2]. Des weiteren überzeugt man sich leicht, daß  $\Phi^*$  in der Tat ein meßbares lineares zufälliges dynamisches System ist.

Was die noch fehlende Aussage (c) angeht, so definiert man die neue zufällige Norm  $\|\cdot\|_\omega^*$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  mittels

$$\|x\|_\omega^* := \|P(\omega)^{-1}x\|_\omega \quad \text{für } \omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann gilt offensichtlich die Aussage von Satz 3.1.5(a). Zum Nachweis von Satz 3.1.5(b) sei zunächst ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  gegeben. Gemäß Corollary 3.78 in ARNOLD [2] existiert eine meßbare Abbildung  $R_{\frac{\varepsilon}{2}} : \Omega \rightarrow [1, \infty)$  und eine Konstante  $C \geq 1$  mit

$$\|P(\omega)^{-1}\| \leq C \quad \text{und} \quad \|P(\omega)\| \leq 2CR_{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega),$$

sowie

$$R_{\frac{\varepsilon}{2}}(\theta_t \omega) \leq R_{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega)e^{\frac{\varepsilon}{2}|t|},$$

für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $t \in \mathbb{T}$ . Beachtet man nun die für beliebige  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$  gültigen Abschätzungen

$$\|x\|_\omega^* = \|P(\omega)^{-1}x\|_\omega \leq B_\varepsilon(\omega)\|P(\omega)^{-1}x\| \leq CB_\varepsilon(\omega)\|x\|,$$

mit der Abbildung  $B_\varepsilon(\omega)$  aus Satz 3.1.5(b), sowie

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|P(\omega)P(\omega)^{-1}x\| \leq 2CR_{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega)\|P(\omega)^{-1}x\| \leq \\ &\leq 2CR_{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega)B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega)\|P(\omega)^{-1}x\|_\omega = \\ &= 2CR_{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega)B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega)\|x\|_\omega^*, \end{aligned}$$

so besitzt die durch

$$B_\varepsilon^*(\omega) := \max\{CB_\varepsilon(\omega), 2CR_{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega)B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega)\} \quad \text{für } \omega \in \Omega$$

definierte Abbildung alle in Satz 3.1.5(b) aufgeführten Eigenschaften.

Sei nun abschließend  $x = (0, \dots, 0, x^i, 0, \dots, 0) \in E_i^{\Phi^*}(\omega)$  beliebig. Dann erhält man für beliebige  $t \in \mathbb{T}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Phi^*(t, \omega)x\|_{\theta_t \omega}^* &= \|P(\theta_t \omega)^{-1}\Phi^*(t, \omega)x\|_{\theta_t \omega} = \|\underbrace{\Phi(t, \omega)P(\omega)^{-1}x}_{\in E_i(\omega)}\|_{\theta_t \omega} \leq \\ &\leq e^{\lambda_i t + a|t|}\|P(\omega)^{-1}x\|_\omega = e^{\lambda_i t + a|t|}\|x\|_\omega^*, \end{aligned}$$

und analog läßt sich auch die noch fehlende Abschätzung nach unten in Satz 3.1.5(c) nachweisen. Damit ist alles gezeigt.  $\diamond$

**Bemerkung 3.1.10** Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, daß zur Anwendung der Sätze 3.1.3 und 3.1.5 stets ein *stetiges* lineares zufälliges dynamisches System  $\Phi$  benötigt wird. Für  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  ist aber im allgemeinen das eben konstruierte lineare zufällige dynamische System  $\Phi^*$  wirklich nur ein *meßbares* lineares zufälliges dynamisches System, d.h. die oben genannten Sätze sind nicht direkt anwendbar. Trotzdem können die Aussagen der beiden Sätze auf  $\Phi^*$  übertragen werden, wie der soeben bewiesene Satz 3.1.9 zeigt.  $\square$

Bei den weiteren Untersuchungen kann man also getrost annehmen, daß das lineare zufällige dynamische System  $\Phi$  in Blockdiagonalgestalt vorliegt. Dabei wird in den folgenden Abschnitten die zufällige Norm  $\|\cdot\|_\omega^*$  wieder mit  $\|\cdot\|_\omega$  bezeichnet.

### 3.2 Diskrete zufällige dynamische Systeme

Möchte man die Ergebnisse des ersten Kapitels auf diskrete zufällige dynamische Systeme anwenden, so stellt sich natürlich zunächst die Frage, welcher Zusammenhang zwischen den zufälligen Differenzgleichungen und den diskreten zufälligen dynamischen Systemen besteht.

Sei dazu ein diskretes zufälliges dynamisches System  $\varphi$  wie in Definition 3.1.2 gegeben. Unter Verwendung der Kozykleigenschaft verifiziert man dann leicht, daß die Abbildung  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$  für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  eine  $\omega$ -Lösung des Anfangswertproblems

$$x_{k+1} = \varphi(1, \theta_k \omega, x_k) \quad , \quad x_0 = \xi \quad (3.2)$$

ist, d.h.  $\varphi$  ist gerade die allgemeine Lösung der nichtautonomen zufälligen Differenzgleichung (3.2) im Sinne von (1.4), wobei die Anfangszeit  $\kappa$  gleich 0 gesetzt wird. Weitere Aussagen sind im nun folgenden Lemma enthalten.

**Lemma 3.2.1** Gegeben sei eine zufällige Differenzgleichung

$$\boxed{x_{k+1} = f(k, \omega, x_k)} \quad (3.3)$$

wobei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein beliebiger Meßraum und die Abbildung  $f : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  meßbar ist. Ferner sei angenommen, daß alle  $\omega$ -Lösungen von (3.3) auf ganz  $\mathbb{Z}$  existieren und dort eindeutig bestimmt sind, und daß die allgemeine Lösung  $\lambda$  im Sinne von (1.4) meßbar ist. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(a) Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  definiert durch  $\varphi(k, \omega, x) := \lambda(k; 0, \omega, x)$  ist ein meßbares diskretes zufälliges dynamisches System über dem metrischen dynamischen System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}})$ .

(b) Die allgemeine Lösung von (3.3) genügt der Identität

$$\lambda(k; \kappa, \omega, x) = \lambda(k - \kappa; 0, \theta_\kappa \omega, x) \quad ,$$

für beliebige  $k, \kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ .

(c) Die Abbildung  $f$  erfüllt

$$f(k, \omega, x) = f(0, \theta_k \omega, x) \quad ,$$

für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ .

**Beweis:** Seien  $k, \kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  beliebig. Um die Äquivalenz von (a) und (b) nachzuweisen, sei  $y := \lambda(0; \kappa, \omega, x)$ . Dann impliziert (1.5) die Identitäten

$$\lambda(k; \kappa, \omega, x) = \lambda(k; 0, \omega, \lambda(0; \kappa, \omega, x)) = \varphi(k, \omega, y)$$

und

$$\lambda(k - \kappa; 0, \theta_\kappa \omega, x) = \lambda(k - \kappa; 0, \theta_\kappa \omega, \lambda(\kappa; 0, \omega, \lambda(0; \kappa, \omega, x))) = \varphi(k - \kappa, \theta_\kappa \omega, \varphi(\kappa, \omega, y)),$$

und die Bijektivität von  $\lambda(0; \kappa, \omega, \cdot)$  liefert sofort die behauptete Äquivalenz von (a) und (b). Sei nun die Gültigkeit von (b) vorausgesetzt. Dann liefern die Beziehungen

$$f(k, \omega, x) = f(k, \omega, \lambda(k; k, \omega, x)) = \lambda(k + 1; k, \omega, x)$$

und

$$f(0, \theta_k \omega, x) = \lambda(1; 0, \theta_k \omega, x)$$

unmittelbar (c). Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß (c) die Aussage (b) impliziert. Seien dazu  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  beliebig, aber fest. Dann läßt sich (b) leicht mittels Induktion über  $k$  beweisen. Für  $k = \kappa$  ist die Behauptung offensichtlich erfüllt. Gilt nun (b) für ein  $k \in \mathbb{Z}$ , so erhält man sowohl

$$\begin{aligned} \lambda(k + 1; \kappa, \omega, x) &= f(k, \omega, \lambda(k; \kappa, \omega, x)) = \\ &= f(0, \theta_{k-\kappa} \theta_\kappa \omega, \lambda(k - \kappa; 0, \theta_\kappa \omega, x)) = \\ &= f(k - \kappa, \theta_\kappa \omega, \lambda(k - \kappa; 0, \theta_\kappa \omega, x)) = \\ &= \lambda(k + 1 - \kappa; 0, \theta_\kappa \omega, x), \end{aligned}$$

als auch

$$\lambda(k - 1; \kappa, \omega, x) = \lambda(k - 1 - \kappa; 0, \theta_\kappa \omega, x).$$

Damit ist alles bewiesen. ◇

**Bemerkung 3.2.2** Sei  $\Phi$  ein diskretes lineares zufälliges dynamisches System, das den Voraussetzungen von Satz 3.1.5 genügt. Bezeichnet dann  $\hat{\Phi}(m, n, \omega)$  die Übergangsabbildung der linearen zufälligen Differenzgleichung

$$x_{k+1} = A(k, \omega)x_k \quad \text{mit} \quad A(k, \omega) := \Phi(1, \theta_k \omega), \quad (3.4)$$

so liefert das eben bewiesene Lemma 3.2.1 leicht die Identität

$$\hat{\Phi}(m, n, \omega) = \Phi(m - n, \theta_n \omega),$$

für beliebige  $m, n \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega$ . Setzt man schließlich noch — wie bereits im letzten Abschnitt angedeutet wurde — für alle  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\|x\|_{k, \omega} := \|x\|_{\theta_k \omega},$$

wobei die letzte Norm die zufällige Norm aus Satz 3.1.5 ist, so folgen unter Verwendung der Beziehung

$$\|\hat{\Phi}(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} = \|\Phi(m - n, \theta_n \omega)\|_{\theta_n \omega, \theta_m \omega} = \|\Phi(m - n, \theta_n \omega)\|_{\theta_n \omega, \theta_{m-n} \theta_n \omega}$$

und Bemerkung 3.1.6 sofort die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\hat{\Phi}(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq (e^{\lambda_1 + a})^{m-n} \quad \text{für } m \geq n, \\ \|\hat{\Phi}(m, n, \omega)\|_{n, m, \omega} &\leq (e^{\lambda_p - a})^{m-n} \quad \text{für } m \leq n, \end{aligned}$$

mit  $m, n \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$ . Mit anderen Worten: Die Übergangsabbildung  $\hat{\Phi}$  von (3.4) genügt Abschätzungen, wie sie im ersten Kapitel stets benötigt wurden! Analoge Aussagen erhält man für die Teilblöcke  $\Phi_i$ , falls  $\Phi$  in Blockdiagonalform vorliegt.  $\square$

Nachdem der Zusammenhang zwischen den diskreten zufälligen dynamischen Systemen und den (nichtautonomen) zufälligen Differenzgleichungen mit dem eben bewiesenen Lemma hergestellt ist, kann nun damit begonnen werden, die Ergebnisse des ersten Kapitels auf diskrete zufällige dynamische Systeme anzuwenden.

Sei dazu  $\varphi$  ein stetiges diskretes zufälliges dynamisches System auf dem  $\mathbb{R}^d$  über einem ergodischen metrischen dynamischen System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}})$  mit Fixpunkt 0, d.h. es gelte  $\varphi(k, \omega, 0) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \Omega^d$ . Des weiteren sei  $\Phi$  ein diskretes lineares zufälliges dynamisches System auf dem  $\mathbb{R}^d$  über  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ , für das die Aussagen der Sätze 3.1.3 und 3.1.5 gelten, und der "nichtlineare" Anteil  $\Psi$  von  $\varphi$  sei durch

$$\boxed{\varphi(k, \omega, x) =: \Phi(k, \omega)x + \Psi(k, \omega, x)} \quad (3.5)$$

definiert. Setzt man dann  $A(k, \omega) := \Phi(1, \theta_k \omega)$  und  $F(k, \omega, x) := \Psi(1, \theta_k \omega, x)$ , für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ , so verifiziert man leicht, daß die allgemeine Lösung  $\lambda(k; \kappa, \omega, x)$  der zufälligen Differenzgleichung

$$\boxed{x_{k+1} = A(k, \omega)x_k + F(k, \omega, x_k)} \quad (3.6)$$

im Sinne von (1.4) existiert, und Lemma 3.2.1 liefert die Identität

$$\lambda(k; \kappa, \omega, \xi) = \varphi(k - \kappa, \theta_\kappa \omega, \xi), \quad (3.7)$$

für beliebige  $k, \kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Darüber hinaus ist  $\lambda$  meßbar, sowie stetig bezüglich der letzten Variablen<sup>5</sup>.

Auf die obige zufällige Differenzgleichung (3.6) sollen im folgenden die Ergebnisse des ersten Kapitels angewandt werden, um somit Aussagen über das diskrete zufällige dynamische System  $\varphi$  zu erhalten. Dazu müssen natürlich gerade die Voraussetzungen (V1) bis (V4) vom Beginn des Abschnittes 1.4 erfüllt sein. Während die Gültigkeit von (V3) bereits im letzten Absatz gezeigt wurde, gelten die übrigen Voraussetzungen offensichtlich nur, falls weitere Bedingungen an das zufällige dynamische System  $\varphi$ , beziehungsweise an  $\Phi$  und  $\Psi$ , gestellt werden. Zunächst soll der lineare Anteil  $\Phi$  betrachtet werden.

<sup>4</sup>Man kann zeigen, daß diese Annahme ohne Beschränkung der Allgemeinheit gemacht werden kann — ganz im Gegensatz zum deterministischen Fall. Vergleiche dazu etwa ARNOLD [2, Proposition 1.23].

<sup>5</sup>Man beachte, daß die Abbildung  $\varphi(k, \omega)$  bijektiv ist, mit der Umkehrabbildung  $\varphi(-k, \theta_k \omega)$ . Dies folgt sofort aus der Kozykleigenschaft von  $\varphi$ .

(D1) Das lineare zufällige dynamische System  $\Phi$  sei in Blockdiagonalgestalt, d.h. es gelte

$$\Phi(k, \omega) = \begin{pmatrix} \boxed{\Phi_1(k, \omega)} & & & 0 \\ & \boxed{\Phi_2(k, \omega)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\Phi_p(k, \omega)} \end{pmatrix},$$

bezüglich der Zerlegung  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}$ . Dabei sollen für  $\Phi$  alle Aussagen des Satzes 3.1.9 gelten, d.h. der Lyapunov-Exponent  $\lambda_i$  besitzt gerade die Vielfachheit  $d_i$ , der  $i$ -te Oseledets-Raum ist gegeben durch

$$E_i(\omega) = \{0\} \times \dots \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d_i} \times \{0\} \times \dots \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d,$$

für  $i = 1, \dots, p$ , und es gibt eine zufällige Norm  $\|\cdot\|_\omega$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , so daß die Aussagen des Satzes 3.1.5 erfüllt sind.

Sei nun  $x^i \in \mathbb{R}^{d_i}$  beliebig. Dann wird durch

$$\|x^i\|_\omega := \underbrace{\|(0, \dots, 0, \overbrace{x^i}^{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)\|_\omega}_{\in \mathbb{R}^d}$$

eine zufällige Norm auf dem  $\mathbb{R}^{d_i}$  definiert, für jedes  $i = 1, \dots, p$ . (Die Normen werden von der Bezeichnung her nicht unterschieden.) Sei weiter die Konstante  $a > 0$  so gewählt, daß die Intervalle  $[\lambda_i - a, \lambda_i + a]$ ,  $i = 1, \dots, p$ , disjunkt sind, und im hyperbolischen Fall (man vergleiche Definition 3.1.4) gelte ferner

$$0 \notin [\lambda_i - a, \lambda_i + a] \quad \text{für } i = 1, \dots, p.$$

Setzt man als nächstes

$$\alpha_{i,+} := e^{\lambda_i - a} \quad \text{und} \quad \alpha_{i,-} := e^{\lambda_i + a}$$

für  $i = 1, \dots, p$ , so gilt

$$\infty > \alpha_{1,-} > \alpha_{1,+} > \alpha_{2,-} > \dots > \alpha_{p-1,+} > \alpha_{p,-} > \alpha_{p,+} > 0,$$

und Satz 3.1.5(c) liefert unter Beachtung von Bemerkung 3.2.2 sofort die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\hat{\Phi}_i(m, n, \omega)\|_{\theta_n \omega, \theta_m \omega} &\leq \alpha_{i,+}^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n, \\ \|\hat{\Phi}_i(m, n, \omega)\|_{\theta_n \omega, \theta_m \omega} &\leq \alpha_{i,-}^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n, \end{aligned}$$

mit  $m, n \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$ , wobei  $\hat{\Phi}_i$  die Übergangsabbildung der linearen zufälligen Differenzengleichung  $x_{k+1}^i = A_i(k, \omega)x_k^i$  ist, mit  $A_i(k, \omega) := \Phi_i(1, \theta_k \omega)$ . Wählt man schließlich eine beliebige (aber dann feste) positive Konstante  $\delta$  mit

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\alpha_{1,+} - \alpha_{2,-}}{2}, \dots, \frac{\alpha_{p-1,+} - \alpha_{p,-}}{2}, \alpha_{p,+} \right\},$$

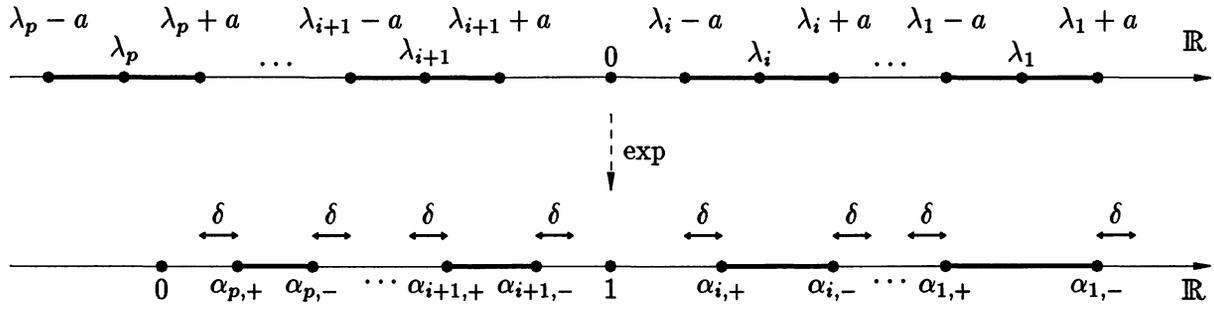


Abbildung 3.4: Zur Wahl der Konstanten  $\alpha_{i,+}$ ,  $\alpha_{i,-}$  und  $\delta$  im hyperbolischen Fall

und fordert im hyperbolischen Fall noch

$$1 \notin (\alpha_{i,+} - \delta, \alpha_{i,-} + \delta) \quad \text{für } i = 1, \dots, p,$$

so erfüllt der lineare Anteil der zufälligen Differenzgleichung (3.6) die Voraussetzung (V1) aus Abschnitt 1.4, sofern man dort  $\Omega$  durch  $\tilde{\Omega}$  ersetzt und  $\|\cdot\|_{k,\omega} := \|\cdot\|_{\theta_k\omega}$  definiert. (Man vergleiche dazu auch Abbildung 3.4.) Zu guter Letzt wird die zufällige Norm  $\|\cdot\|_\omega$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  aus (D1) durch die äquivalente Norm

$$\|x\|_\omega = \|(x^1, \dots, x^p)\|_\omega := \|x^1\|_\omega + \dots + \|x^p\|_\omega$$

ersetzt, wobei natürlich  $x = (x^1, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p} = \mathbb{R}^d$  beliebig ist. Von jetzt an wird nur noch diese zufällige Norm auf dem  $\mathbb{R}^d$  betrachtet.

Nun ist auch klar, welche Bedingungen an den nichtlinearen Anteil  $\Psi$  in (3.5) die noch fehlenden Voraussetzungen (V2) und (V4) implizieren<sup>6</sup>. Sie lauten:

(D2) Für beliebige  $i = 1, \dots, p$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$  seien, unter Verwendung von

$$\Psi =: (\Psi_1, \dots, \Psi_p) : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p},$$

die Abschätzungen

$$\|\Psi_i(1, \omega, x) - \Psi_i(1, \omega, \bar{x})\|_{\theta_1\omega} \leq L\|x - \bar{x}\|_\omega$$

erfüllt, mit  $0 \leq L < L^*$ , wobei  $L^*$  etwa wie in Satz 1.7.5 gewählt wird — und es gelte ferner

$$\|\Psi_i(1, \omega, x)\|_{\theta_1\omega} \leq M,$$

mit einer reellen Konstanten  $M \geq 0$ .

Genügt also das obige diskrete zufällige dynamische System  $\varphi$  den beiden Voraussetzungen (D1) und (D2), so erfüllt die zugehörige zufällige Differenzgleichung (3.6) alle Voraussetzungen vom Beginn des Abschnittes 1.4 — und alle Ergebnisse der Abschnitte 1.4, 1.5, 1.6 und 1.7 können nun direkt angewandt werden. Zunächst liefert Satz 1.4.4 das folgende Resultat.

<sup>6</sup>Zur Ableitung der Voraussetzungen (V2) und (V4) aus (D2) muß man nur die Definition  $F(k, \omega, x) := \Psi(1, \theta_k\omega, x)$  beachten.

**Satz 3.2.3** Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ , sowie darüber ein stetiges diskretes zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Fixpunkt 0. Darüber hinaus existiere ein lineares diskretes zufälliges dynamisches System  $\Phi$ , so daß mit

$$\varphi(k, \omega, x) = \Phi(k, \omega)x + \Psi(k, \omega, x)$$

die Voraussetzungen (D1) und (D2) erfüllt sind. Dann gibt es zu jeder Wahl von  $1 \leq i \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$  eine zufällige Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega) \subset \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die zufällige Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega)$  läßt sich schreiben als

$$S^{i,j}(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^d : (x^{<i}, x^{>j}) = s^{i,j}(\omega, x^{i \leq j})\}$$

mit einer meßbaren Abbildung

$$s^{i,j} : \Omega \times \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_{i-1}} \times \mathbb{R}^{d_{j+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p},$$

wobei die Abbildungen  $s^{i,j}(\omega, \cdot)$  für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  global Lipschitz-stetig sind, und die zugehörigen Lipschitzkonstanten für  $L \rightarrow 0$  ebenfalls gegen 0 konvergieren.

(b) Die zufällige Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega)$  ist tatsächlich eine zufällige invariante Mannigfaltigkeit, d.h. für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$  ist die Identität

$$\varphi(k, \omega)S^{i,j}(\omega) = S^{i,j}(\theta_k \omega)$$

erfüllt.

(c) Die zufällige invariante Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega)$  läßt sich für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  dynamisch charakterisieren als

$$S^{i,j}(\omega) = \{\xi \in \mathbb{R}^d : \varphi(\cdot, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma_1^+ \text{- und } \gamma_2^- \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega\},$$

wobei

$$\gamma_1 \in \begin{cases} [\alpha_{1,-} + \delta, \infty) & \text{für } i = 1 \\ [\alpha_{i,-} + \delta, \alpha_{i-1,+} - \delta] & \text{für } i > 1 \end{cases}$$

und

$$\gamma_2 \in \begin{cases} [\alpha_{j+1,-} + \delta, \alpha_{j,+} - \delta] & \text{für } j < p \\ (0, \alpha_{p,+} - \delta] & \text{für } j = p \end{cases}$$

beliebig gewählt werden können.

Definiert man schließlich noch  $S^{1,p}(\omega) := \mathbb{R}^d$  für beliebige  $\omega \in \Omega$ , so gelten die Aussagen (b) und (c) auch für  $S^{1,p}(\omega)$ .

**Beweis:** Wegen der vorausgesetzten Gültigkeit von (D1) und (D2) erfüllt die Differenzgleichung (3.6), deren allgemeine Lösung  $\lambda$  ja das zufällige dynamische System  $\varphi$  durch die Identität (3.7) erzeugt, alle Voraussetzungen des Satzes 1.4.4, sofern man dort  $\Omega$  durch  $\tilde{\Omega}$  ersetzt. Seien nun  $1 \leq i \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$  beliebig, aber fest gewählt. Ferner sei

$$\hat{s}^{i,j} : \mathbb{Z} \times \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_{i-1}} \times \mathbb{R}^{d_{j+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}$$

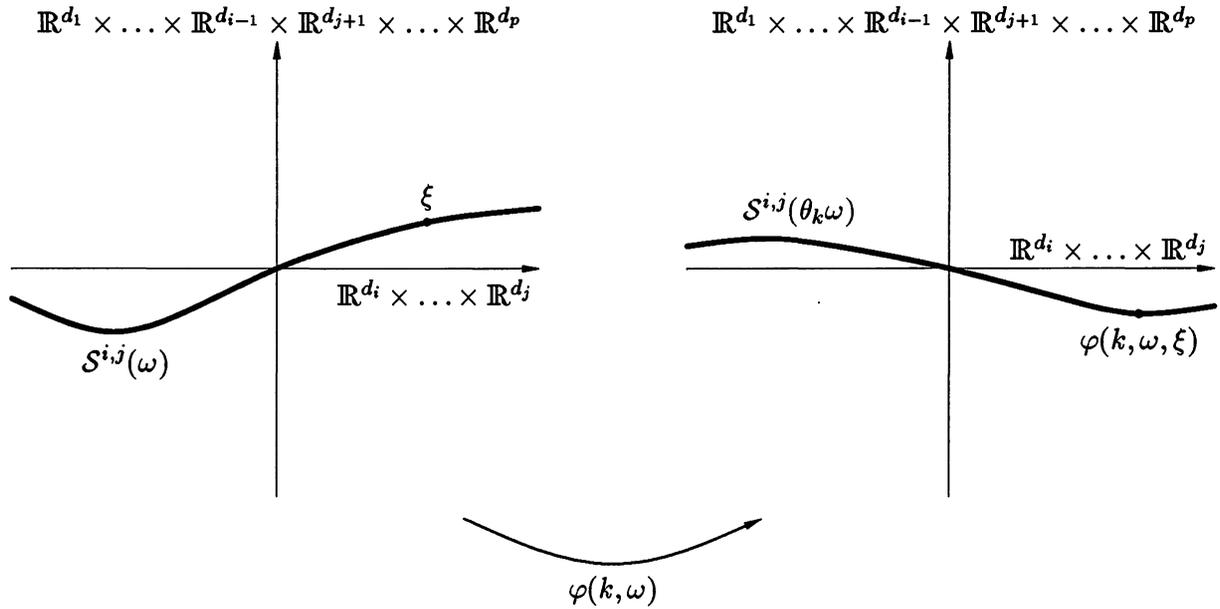


Abbildung 3.5: Zufällige invariante Mannigfaltigkeiten

die von Satz 1.4.4 garantierte Abbildung. Definiert man dann für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $(x^i, \dots, x^j) \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j}$  die Abbildung  $s^{i,j}$  durch

$$s^{i,j}(\omega, x^i, \dots, x^j) := \hat{s}^{i,j}(0, \omega, x^i, \dots, x^j)$$

und setzt diese Definition meßbar auf ganz  $\Omega$  fort (indem man etwa für alle  $\omega \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}$  die Abbildung als 0 definiert), so sind mit

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) := \{x \in \mathbb{R}^d : (x^{<i}, x^{>j}) = s^{i,j}(\omega, x^{i \leq j})\}$$

zunächst die Aussagen (a) und (c) erfüllt.

Was die in (b) geforderte Invarianz angeht, so reicht es offensichtlich zu zeigen, daß für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$  die Identität

$$\hat{s}^{i,j}(\kappa, \omega, \cdot) = \hat{s}^{i,j}(0, \theta_\kappa \omega, \cdot) \quad (3.8)$$

gilt — denn dann folgt die Invarianz der zufälligen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  leicht aus der in Satz 1.4.4 gezeigten Invarianz des entsprechenden zufälligen invarianten Faserbündels  $\hat{\mathcal{S}}^{i,j}(\omega)$ . Diese liefert nämlich für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in \mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  die Inklusion  $\varphi(k, \omega, \xi) \in \mathcal{S}^{i,j}(\theta_k \omega)$ , d.h.

$$\varphi(k, \omega) \mathcal{S}^{i,j}(\omega) \subset \mathcal{S}^{i,j}(\theta_k \omega),$$

und unter Verwendung der Kozykleigenschaft von  $\varphi$  folgt weiter

$$\mathcal{S}^{i,j}(\theta_k \omega) = \underbrace{\varphi(k, \omega) \varphi(-k, \theta_k \omega)}_{=\text{id}_{\mathbb{R}^d}} \mathcal{S}^{i,j}(\theta_k \omega) \subset \varphi(k, \omega) \mathcal{S}^{i,j}(\theta_{-k} \theta_k \omega) = \varphi(k, \omega) \mathcal{S}^{i,j}(\omega),$$

d.h. es gilt tatsächlich die geforderte Gleichheit.

Zum Nachweis von (3.8) seien  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  mit  $(\kappa, \xi) \in \hat{\mathcal{S}}^{i,j}(\omega)$  beliebig, aber fest. Gemäß Satz 1.4.4 ist zunächst die Abbildung  $\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi)$  sowohl  $\gamma_1^+$ - als auch  $\gamma_2^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , mit  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  wie in (c). Beachtet man nun die für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  gültige Identität

$$\gamma^{-k} \|\lambda(k; 0, \theta_\kappa \omega, \xi)\|_{\theta_\kappa \theta_\kappa \omega} = \gamma^\kappa \gamma^{-(\kappa+k)} \|\lambda(k + \kappa; \kappa, \omega, \xi)\|_{\theta_{\kappa+\kappa} \omega},$$

die eine unmittelbare Konsequenz aus Lemma 3.2.1(b) ist, so folgt sofort die  $\gamma_1^+$ - und die  $\gamma_2^-$ -Quasibeschränktheit der Abbildung  $\lambda(\cdot; 0, \theta_\kappa \omega, \xi)$  bezüglich  $\theta_\kappa \omega$ , d.h. es gilt  $(0, \xi) \in \hat{\mathcal{S}}^{i,j}(\theta_\kappa \omega)$ . Dies liefert schließlich die Identität

$$\hat{s}^{i,j}(\kappa, \omega, \xi^{i \leq j}) = (\xi^{<i}, \xi^{>j}) = \hat{s}^{i,j}(0, \theta_\kappa \omega, \xi^{i \leq j}),$$

d.h. (3.8) ist in der Tat erfüllt.  $\diamond$

**Bemerkung 3.2.4** Bezeichnet  $\hat{\pi}^{i,j}$  die zu  $\hat{\mathcal{S}}^{i,j}(\omega)$  gehörende Abbildung aus Bemerkung 1.4.5, so liefert die Definition

$$\pi^{i,j}(\omega, \xi) := \hat{\pi}^{i,j}(0, \omega, \xi)$$

für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j}$  (und  $\pi^{i,j}(\omega, \xi) := 0$  für  $\omega \notin \tilde{\Omega}$ ) unmittelbar die folgende alternative Darstellung der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$ :

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \{\pi^{i,j}(\omega, \xi) : \xi \in \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j}\},$$

für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$ .  $\square$

Der soeben bewiesene Satz 3.2.3 zeigt, daß auch bei den diskreten zufälligen dynamischen Systemen die zufälligen invarianten Unterräume  $E_i(\omega)$  eine kleine nichtlineare Störung überleben — und zwar als zufällige invariante Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{S}^{i,i}(\omega)$ . In Anlehnung an die Terminologie des Satzes 3.1.3 werden deshalb die zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{S}^{i,i}(\omega)$  auch *Oseledets-Mannigfaltigkeiten* genannt. Ebenso wie die Oseledets-Räume erzeugen aber auch die direkten Summen

$$E_i(\omega) \oplus \dots \oplus E_j(\omega)$$

nichtlineare Analoga, nämlich die zufälligen invarianten Faserbündel  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$ . Dieses Ergebnis wurde bereits vor einigen Jahren von DAHLKE [15] für den  $C^1$ -Fall bewiesen.

Wie schon im letzten Abschnitt erwähnt wurde, sind die zufälligen dynamischen Systeme eine Verallgemeinerung der deterministischen dynamischen Systeme — man betrachtet dazu einfach eine von  $\omega$  unabhängige Abbildung  $\varphi$ . Wendet man auf eine derartige Abbildung den obigen Satz 3.2.3 an, wobei man  $\Omega$  als einpunktige Menge definiert mit  $\theta_k := \text{id}_\Omega$  für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$ , so erhält man (ebenfalls von  $\omega$  unabhängige) invariante Mannigfaltigkeiten für das betrachtete dynamische System  $\varphi$  — und reproduziert somit bekannte Ergebnisse, wie sie etwa in dem Buch von IRWIN [27] gefunden werden können. In Anlehnung an diese deterministische Situation sollen noch die folgenden, auf KELLEY [28] zurückgehenden Bezeichnungen eingeführt werden. Seien dazu  $p \geq 3$  und  $1 < i < p$  so, daß  $\lambda_i = 0$  gilt. Dann nennt man

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{<i}(\omega) & \text{ instabile zufällige Mannigfaltigkeit,} \\ \mathcal{S}^{\leq i}(\omega) & \text{ zentral-instabile zufällige Mannigfaltigkeit,} \\ \mathcal{S}^{i,i}(\omega) & \text{ zufällige Zentrumsmannigfaltigkeit,} \\ \mathcal{S}^{\geq i}(\omega) & \text{ zentral-stabile zufällige Mannigfaltigkeit,} \\ \mathcal{S}^{>i}(\omega) & \text{ stabile zufällige Mannigfaltigkeit,} \end{aligned}$$

wobei abkürzend wieder  $\mathcal{S}^{<i}(\omega) := \mathcal{S}^{1,i-1}(\omega), \dots$ , gesetzt wurde. In den übrigen Fällen (etwa im hyperbolischen Fall) werden ganz analoge Bezeichnungen verwendet. Dabei treten dann natürlich nicht mehr alle *fünf klassischen zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten* auf. Die Existenz zufälliger Zentrumsmannigfaltigkeiten wurde bereits in BOXLER [12] gezeigt.

Bekanntlich sind im deterministischen Fall die Bezeichnungen "stabil" beziehungsweise "instabil" auf die Tatsache zurückzuführen, daß die in der stabilen (beziehungsweise instabilen) Mannigfaltigkeit verlaufenden Orbits für  $k \rightarrow \infty$  (beziehungsweise  $k \rightarrow -\infty$ ) exponentiell gegen 0 konvergieren — und unter Beachtung des Lemmas 3.1.8 erkennt man sofort, daß sich dies auf den Fall zufälliger dynamischer Systeme überträgt. Des weiteren liefert der Beweis dieses Lemmas unter Verwendung des Korollars 1.4.6 auch Aussagen zum Wachstumsverhalten eines  $\omega$ -Orbits  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$ , der in der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  verläuft. Es gelten nämlich für beliebige  $\gamma_1 > \alpha_{i,-} + \delta$  und  $0 < \gamma_2 < \alpha_{j,+} - \delta$  die Ungleichungen

$$\frac{1}{C} \|\xi\| \cdot \gamma_2^k \leq \|\varphi(k, \omega, \xi)\| \leq C \|\xi\| \cdot \gamma_1^k \quad \text{für beliebige } k \geq 0,$$

und ferner

$$\frac{1}{C} \|\xi\| \cdot \gamma_1^k \leq \|\varphi(k, \omega, \xi)\| \leq C \|\xi\| \cdot \gamma_2^k \quad \text{für beliebige } k \leq 0,$$

mit einer Konstanten  $C \geq 1$ , die zwar von  $\omega, L, \delta, p, \gamma_1$  und  $\gamma_2$ , nicht aber von  $\xi$  abhängt. Für den Fall, daß die zufällige invariante Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  in der stabilen zufälligen Mannigfaltigkeit enthalten ist, d.h. für  $0 > \lambda_i \geq \lambda_j$ , sind diese Ungleichungen in Abbildung 3.6 veranschaulicht.

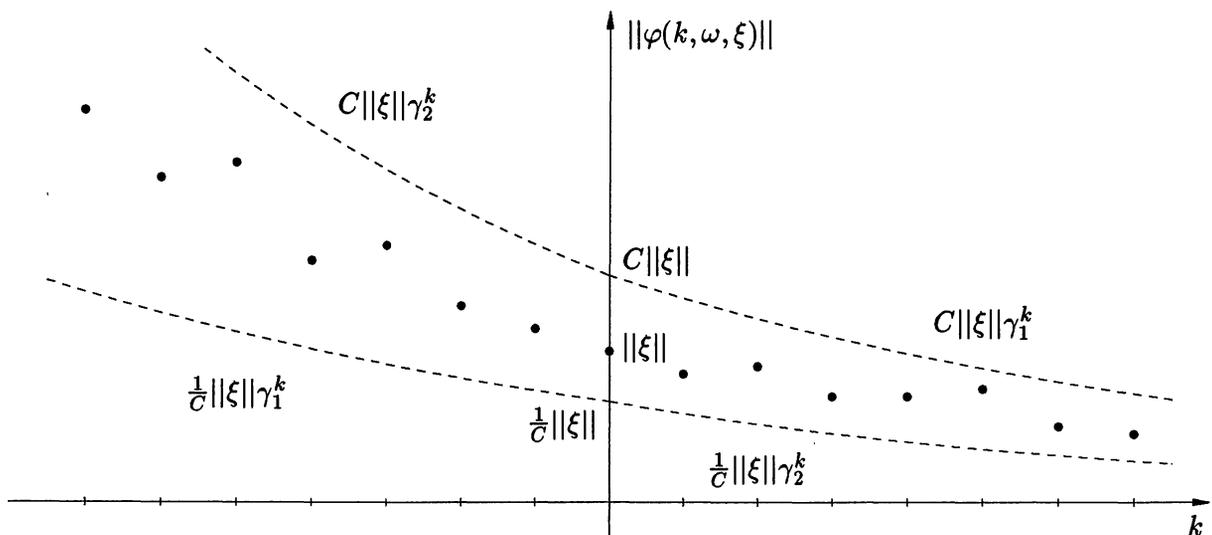


Abbildung 3.6: Wachstumsverhalten von  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$  in der stabilen zufälligen Mannigfaltigkeit

Die obigen Abschätzungen zeigen auch, daß  $\omega$ -Orbits, die in einer Oseledets-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,i}(\omega)$  mit  $\lambda_i < 0$  verlaufen, für  $k \rightarrow \infty$  langsamer gegen 0 konvergieren als solche, die in der Oseledets-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i+1,i+1}(\omega)$  liegen. Was aber läßt sich über die Orbits aussagen, die zwar in  $\mathcal{S}^{i,i+1}(\omega)$ , jedoch außerhalb der eben genannten Oseledets-Mannigfaltigkeiten verlaufen? Betrachtet man dazu das in Abbildung 3.7 skizzierte Phasenportrait der deterministischen

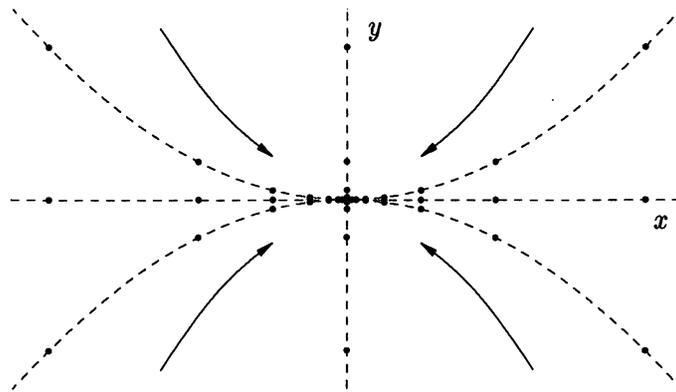


Abbildung 3.7: Lösungsverhalten eines deterministischen linearen Beispiels

linearen Differenzgleichung

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \frac{1}{2}x_k \\y_{k+1} &= \frac{1}{4}y_k\end{aligned}$$

so liegt die Vermutung nahe, daß sich derartige Orbits der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,i}(\omega)$  "tangential" annähern. Wie der nächste Satz zeigt, trifft dies tatsächlich zu.

**Satz 3.2.5** Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ , sowie darüber ein stetiges diskretes zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Fixpunkt 0. Darüber hinaus existiere ein lineares diskretes zufälliges dynamisches System  $\Phi$ , so daß mit

$$\varphi(k, \omega, x) = \Phi(k, \omega)x + \Psi(k, \omega, x)$$

die Voraussetzungen (D1) und (D2) erfüllt sind. Dann gibt es zu jedem  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  meßbare Abbildungen  $P^{\leq i}, P^{> i} : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , so daß für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  folgendes gilt:

(a) Die Abbildungen  $P^{\leq i}(\omega) := P^{\leq i}(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $P^{> i}(\omega) := P^{> i}(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sind stetig mit  $P^{\leq i}(\omega)0 = P^{> i}(\omega)0 = 0$  und erfüllen die Identitäten

$$\begin{aligned}P^{\leq i}(\omega)\mathbb{R}^d &= \mathcal{S}^{\leq i}(\omega), \\P^{> i}(\omega)\mathbb{R}^d &= \mathcal{S}^{> i}(\omega).\end{aligned}$$

(b) Die zufälligen Abbildungen  $P^{\leq i}(\omega)$  und  $P^{> i}(\omega)$  bilden  $\omega$ -Orbits von  $\varphi$  wieder auf  $\omega$ -Orbits von  $\varphi$  ab, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}P^{\leq i}(\theta_k \omega)\varphi(k, \omega, \xi) &= \varphi(k, \omega, P^{\leq i}(\omega)\xi), \\P^{> i}(\theta_k \omega)\varphi(k, \omega, \xi) &= \varphi(k, \omega, P^{> i}(\omega)\xi),\end{aligned}$$

für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

- (c) Für beliebiges  $\xi_0 \in \mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  ist das Urbild  $P^{\leq i}(\omega)^{-1}(\xi_0) \subset \mathbb{R}^d$  der Graph einer global Lipschitz-stetigen Abbildung, deren Lipschitzkonstante für  $L \rightarrow 0$  gegen 0 konvergiert. Des weiteren erhält man die dynamische Charakterisierung

$$P^{\leq i}(\omega)^{-1}(\xi_0) = \{ \xi \in \mathbb{R}^d : \varphi(\cdot, \omega, \xi) - \varphi(\cdot, \omega, \xi_0) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega \},$$

für beliebiges  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ . Insbesondere gilt also  $P^{\leq i}(\omega)\xi_0 = \xi_0$ , sowie

$$P^{\leq i}(\omega)^{-1}(0) = \mathcal{S}^{> i}(\omega).$$

Für beliebiges  $\eta_0 \in \mathcal{S}^{> i}(\omega)$  ist das Urbild  $P^{> i}(\omega)^{-1}(\eta_0) \subset \mathbb{R}^d$  ebenfalls der Graph einer global Lipschitz-stetigen Abbildung, deren Lipschitzkonstante für  $L \rightarrow 0$  gegen 0 konvergiert, und man erhält die dynamische Charakterisierung

$$P^{> i}(\omega)^{-1}(\eta_0) = \{ \eta \in \mathbb{R}^d : \varphi(\cdot, \omega, \eta) - \varphi(\cdot, \omega, \eta_0) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega \},$$

für beliebiges  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ . Insbesondere erhält man  $P^{> i}(\omega)\eta_0 = \eta_0$  und

$$P^{> i}(\omega)^{-1}(0) = \mathcal{S}^{\leq i}(\omega).$$

- (d) Für beliebige  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{S}^{> i}(\omega)$  und  $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  gelten die Abschätzungen

$$\|P^{\leq i}(\theta_k \omega)\varphi(k, \omega, \xi) - \varphi(k, \omega, \xi)\| \leq K_{\omega, \xi}^{(1)} \cdot \beta_1^k \cdot \|\varphi(k, \omega, \xi)\| \quad \text{für } k \geq 0,$$

$$\|P^{> i}(\theta_k \omega)\varphi(k, \omega, \eta) - \varphi(k, \omega, \eta)\| \leq K_{\omega, \eta}^{(2)} \cdot \beta_2^k \cdot \|\varphi(k, \omega, \eta)\| \quad \text{für } k \leq 0,$$

mit gewissen Zahlen  $0 < \beta_1 < 1 < \beta_2$ , sowie Konstanten  $K_{\omega, \xi}^{(1)} \geq 0$  und  $K_{\omega, \eta}^{(2)} \geq 0$ .

**Beweis:** Sei  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  beliebig, aber fest. Ersetzt man in Lemma 1.5.1 und Satz 1.5.3 die Menge  $\Omega$  durch  $\tilde{\Omega}$  und beachtet (D1) sowie (D2), so erfüllt die  $\varphi$  erzeugende Differenzgleichung (3.6) alle in den beiden Ergebnissen genannten Voraussetzungen — und  $\hat{P}^{\leq i}$  beziehungsweise  $\hat{P}^{> i}$  seien die von Satz 1.5.3 garantierten Abbildungen. Definiert man dann die Abbildungen  $P^{\leq i}$  und  $P^{> i}$  mittels

$$P^{\leq i}(\omega) := \hat{P}^{\leq i}(0, \omega, \cdot) \quad \text{und} \quad P^{> i}(\omega) := \hat{P}^{> i}(0, \omega, \cdot),$$

für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$ , und setzt diese Definitionen meßbar auf ganz  $\Omega$  fort, so folgen die Behauptungen in (a) und (c) leicht aus Lemma 1.5.1 und aus dem Beweis des Satzes 1.5.3. Zum Beweis von (b) genügt es, die beiden Identitäten

$$\hat{P}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi) = \hat{P}^{\leq i}(0, \theta_\kappa \omega, \xi) \quad \text{und} \quad \hat{P}^{> i}(\kappa, \omega, \xi) = \hat{P}^{> i}(0, \theta_\kappa \omega, \xi) \quad (3.9)$$

für beliebige  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  nachzuprüfen — denn dann folgen die geforderten Eigenschaften von  $P^{\leq i}(\omega)$  und  $P^{> i}(\omega)$  unmittelbar aus Satz 1.5.3(a), (ii) beziehungsweise (b), (ii). Seien also  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  beliebig, aber fest, und  $\lambda$  bezeichne wieder die allgemeine Lösung von (3.6). Gemäß Satz 1.5.3(a) ist  $\xi^* := \hat{P}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi)$  der eindeutig bestimmte Punkt des  $\mathbb{R}^d$  mit  $(\kappa, \xi^*) \in \hat{\mathcal{S}}^{\leq i}(\omega)$ , für den die Differenz

$$\lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi) - \lambda(\cdot; \kappa, \omega, \xi^*)$$

$\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  ist, für jedes  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]^7$ . Wie im Beweis des Satzes 3.2.3 erhält man nun aber sofort die Inklusion  $(0, \xi^*) \in \hat{\mathcal{S}}^{\leq i}(\theta_\kappa \omega)$ , wie auch die Tatsache, daß die Differenz

$$\lambda(\cdot; 0, \theta_\kappa \omega, \xi) - \lambda(\cdot; 0, \theta_\kappa \omega, \xi^*)$$

$\gamma^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\theta_\kappa \omega$  ist, für  $\gamma$  wie oben. Eine nochmalige Anwendung der Charakterisierung aus Satz 1.5.3(a) liefert schließlich die gewünschte Identität

$$\hat{P}^{\leq i}(\kappa, \omega, \xi) = \xi^* = \hat{P}^{\leq i}(0, \theta_\kappa \omega, \xi).$$

Völlig analog zeigt man die entsprechende Aussage für  $\hat{P}^{> i}$ .

Was die erste Abschätzung in (d) angeht, seien  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{S}^{> i}(\omega)$  beliebig gewählt. Definiert man dann abkürzend

$$\mu := \varphi(\cdot, \omega, \xi) \quad \text{und} \quad \nu := P^{\leq i}(\theta_\omega) \mu(\cdot) = \varphi(\cdot, \omega, P^{\leq i}(\omega) \xi),$$

so verläuft  $\nu$  in der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  und es gilt  $\mu(k) \neq 0, \nu(k) \neq 0$  für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$ . Gemäß Korollar 1.4.6 genügt  $\nu$  der Abschätzung

$$\|\nu(k)\|_{\theta_k \omega} \geq \frac{\delta - 2Lp}{\delta - Lp} \|\nu(0)\|_\omega \cdot \gamma_1^k \quad \text{für beliebige } k \geq 0,$$

mit  $\gamma_1 := \alpha_{i,+} - \delta$ , und die Differenz  $\mu - \nu$  erfüllt wegen (c) die Ungleichung

$$\|\nu(k) - \mu(k)\|_{\theta_k \omega} \leq K'_{\omega, \xi} \cdot \gamma_2^k \quad \text{für beliebige } k \geq 0,$$

mit einer Konstanten  $K'_{\omega, \xi} \geq 0$  und  $\gamma_2 := \alpha_{i+1,-} + \delta < \gamma_1$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$  so klein, daß

$$\beta_1 := \frac{e^{2\varepsilon} \gamma_2}{\gamma_1} \in (0, 1)$$

gilt. Unter Verwendung von Satz 3.1.5(b) liefern dann die beiden obigen Abschätzungen für beliebige  $k \geq 0$  die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \frac{\|\nu(k) - \mu(k)\|}{\|\nu(k)\|} &\leq B_\varepsilon(\theta_k \omega)^2 \cdot \frac{\|\nu(k) - \mu(k)\|_{\theta_k \omega}}{\|\nu(k)\|_{\theta_k \omega}} \leq \\ &\leq \frac{B_\varepsilon(\omega)^2 K'_{\omega, \xi}}{\frac{\delta - 2Lp}{\delta - Lp} \|\nu(0)\|_\omega} \cdot \left( \frac{e^{2\varepsilon} \gamma_2}{\gamma_1} \right)^k =: K''_{\omega, \xi} \cdot \beta_1^k. \end{aligned}$$

Wegen  $\beta_1 \in (0, 1)$  gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}_0$ , so daß für alle  $k \geq k_0$  die Abschätzung

$$\|\nu(k)\| - \|\mu(k)\| \leq \|\nu(k) - \mu(k)\| \leq \frac{1}{2} \|\nu(k)\|,$$

und damit

$$\|\mu(k)\| \geq \frac{1}{2} \|\nu(k)\|$$

<sup>7</sup>Dabei sei  $\hat{\mathcal{S}}^{\leq i}(\omega)$  wieder das von Lemma 1.4.2 garantierte zufällige invariante Faserbündel für die Differenzgleichung (3.6).

erfüllt ist. Insgesamt erhält man also für beliebige  $k \geq k_0$  die Ungleichung

$$\frac{\|\nu(k) - \mu(k)\|}{\|\mu(k)\|} \leq \frac{\|\nu(k) - \mu(k)\|}{\frac{1}{2}\|\nu(k)\|} \leq 2K''_{\omega, \xi} \cdot \beta_1^k,$$

und daraus folgt schließlich

$$\frac{\|\nu(k) - \mu(k)\|}{\|\mu(k)\|} \leq K_{\omega, \xi}^{(1)} \cdot \beta_1^k$$

für beliebige  $k \geq 0$  mit einer Konstanten  $K_{\omega, \xi}^{(1)} \geq 0$ . Analog läßt sich auch die noch fehlende zweite Ungleichung in (d) herleiten. Damit ist dann alles gezeigt.  $\diamond$

**Bemerkung 3.2.6** Die Aussage (a) des Satzes 3.2.5 läßt sich noch etwas verfeinern. Seien dazu  $1 \leq i \leq \ell \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$  und  $\ell < p$  beliebig, und sei  $\mu := \varphi(\cdot, \omega, \xi)$  ein  $\omega$ -Orbit von  $\varphi$ , der in der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  verläuft. Definiert man dann für  $k \in \mathbb{Z}$  die Abbildung  $\nu$  mittels

$$\nu(k) := P^{\leq \ell}(\theta_k \omega) \mu(k),$$

so liefert Satz 3.2.5 zunächst die folgenden Aussagen:

- $\nu$  ist ein  $\omega$ -Orbit von  $\varphi$ , der in der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{\leq \ell}(\omega)$  verläuft, d.h.  $\nu$  ist  $\gamma_2^-$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , für beliebiges  $\gamma_2 \in [\alpha_{\ell+1,-} + \delta, \alpha_{\ell,+} - \delta]$ .
- Die Differenz  $\mu - \nu$  ist  $\gamma_2^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$ , mit  $\gamma_2$  wie eben — und damit natürlich erst recht  $\gamma_1^+$ -quasibeschränkt bezüglich  $\omega$  für beliebiges  $\gamma_1 \geq \alpha_{i,-} + \delta$ .

Beachtet man nun noch, daß  $\mu$  als in  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  verlaufender  $\omega$ -Orbit angenommen wurde, so erhält man ferner:

- $\mu$  ist  $\gamma_1^+$ -quasibeschränkt, mit  $\gamma_1$  wie eben.

Damit ist aber auch  $\nu = \mu - (\mu - \nu)$  eine  $\gamma_1^+$ -quasibeschränkte Abbildung bezüglich  $\omega$ , für jede Wahl von  $\gamma_1 \geq \alpha_{i,-} + \delta$  — liegt also gemäß Satz 3.2.3 sogar in der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,\ell}(\omega)$ . Unter Anwendung der wegen Satz 3.2.5(c) gültigen Identität  $P^{\leq \ell}(\omega)|_{\mathcal{S}^{\leq \ell}(\omega)} = \text{id}_{\mathcal{S}^{\leq \ell}(\omega)}$  folgt schließlich die Beziehung

$$\boxed{P^{\leq \ell}(\omega) \mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \mathcal{S}^{i,\ell}(\omega)}$$

für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $1 \leq i \leq \ell \leq j \leq p$  mit  $\ell < p$ . Völlig analog läßt sich auch die Gültigkeit von

$$\boxed{P^{> \ell-1}(\omega) \mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \mathcal{S}^{\ell,j}(\omega)}$$

für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $1 \leq i \leq \ell \leq j \leq p$  mit  $\ell > 1$  beweisen.  $\square$

Mit Satz 3.2.5(d) und Bemerkung 3.2.6 kann nun leicht die zuvor aufgeworfene Frage beantwortet werden. Ist nämlich  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$  ein in  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  mit  $i < j$  verlaufender  $\omega$ -Orbit, der nicht in  $\mathcal{S}^{\ell+1,j}(\omega)$  liegt, für ein  $i \leq \ell < j$ , so gilt wegen

$$\text{dist}(\varphi(k, \omega, \xi), \mathcal{S}^{i,\ell}(\theta_k \omega)) \leq \|P^{\leq \ell}(\theta_k \omega) \varphi(k, \omega, \xi) - \varphi(k, \omega, \xi)\|$$

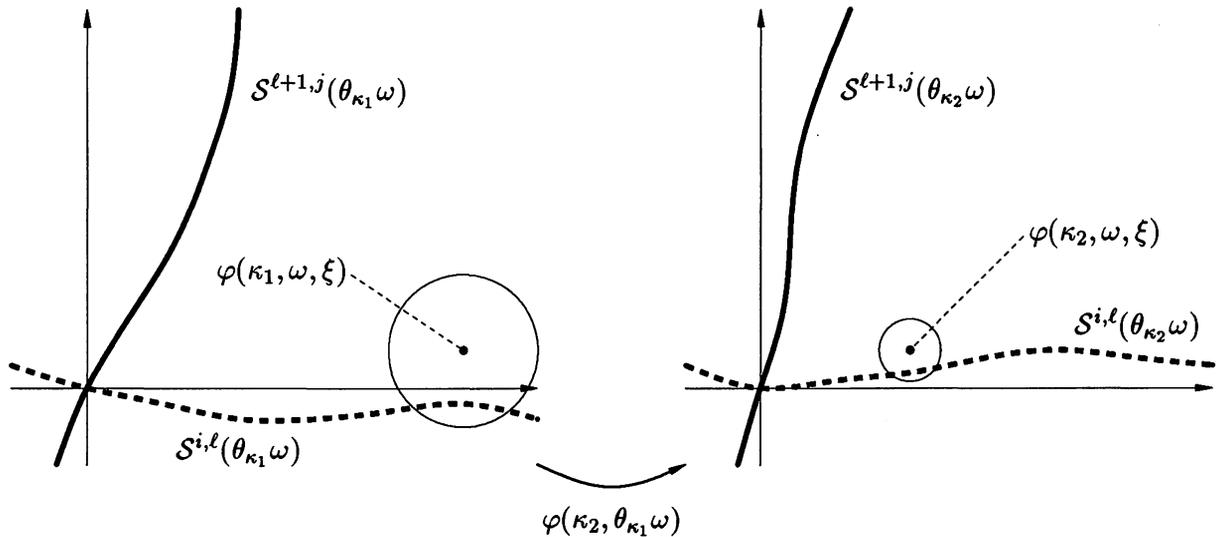


Abbildung 3.8: Zur asymptotischen Annäherung an  $\mathcal{S}^{i,\ell}(\omega)$

offensichtlich die Beziehung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(\varphi(k, \omega, \xi), \mathcal{S}^{i,\ell}(\theta_k \omega))}{\|\varphi(k, \omega, \xi)\|} = 0,$$

d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\kappa \in \mathbb{N}_0$ , so daß für beliebige  $k \geq \kappa$  die Ungleichung

$$\text{dist}(\varphi(k, \omega, \xi), \mathcal{S}^{i,\ell}(\theta_k \omega)) \leq \varepsilon \cdot \|\varphi(k, \omega, \xi)\|$$

erfüllt ist. Speziell für  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k, \omega, \xi) = 0$  — wie es etwa für  $\lambda_i < 0$  der Fall ist — bedeutet das aber gerade, daß sich der  $\omega$ -Orbit  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$  der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,\ell}(\omega)$  für  $k \rightarrow \infty$  “tangential” annähert (man vergleiche dazu auch Abbildung 3.8<sup>8</sup>). Analoge Aussagen erhält man für das asymptotische Verhalten von  $\omega$ -Orbits, die für  $k \rightarrow -\infty$  gegen 0 konvergieren.

Zum Abschluß dieses Abschnittes sollen noch die Sätze von Hartman-Grobman für diskrete zufällige dynamische Systeme angegeben werden. Zunächst wird der hyperbolische Fall behandelt.

**Satz 3.2.7** Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ , sowie darüber ein stetiges diskretes zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Fixpunkt 0. Darüber hinaus existiere ein lineares diskretes zufälliges dynamisches System  $\Phi$ , so daß mit

$$\varphi(k, \omega, x) = \Phi(k, \omega)x + \Psi(k, \omega, x)$$

die Voraussetzungen (D1) und (D2) erfüllt sind. Ist dann  $\Phi$  hyperbolisch, d.h. sind alle Lyapunov-Exponenten von 0 verschieden, so existiert eine meßbare Abbildung  $h : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Für beliebiges  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $h(\omega) := h(\omega, \cdot)$  ein Homöomorphismus auf dem  $\mathbb{R}^d$  mit  $h(\omega)0 = 0$ , und die Abbildung  $h(\cdot)^{-1}(\cdot) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist meßbar.

<sup>8</sup>Mit den Bezeichnungen von oben gelten in Abbildung 3.8 die Beziehungen  $\varepsilon = \frac{1}{5}$  und  $\kappa_2 > \kappa_1 \geq \kappa$ . Die beiden Kreise besitzen die Radien  $\varepsilon \cdot \|\varphi(\kappa_1, \omega, \xi)\|$  beziehungsweise  $\varepsilon \cdot \|\varphi(\kappa_2, \omega, \xi)\|$ .

(b) Für jedes  $\omega \in \tilde{\Omega}$  bildet die Abbildung  $h(\omega)$  beliebige  $\omega$ -Orbits von  $\varphi$  auf entsprechende  $\omega$ -Orbits des linearen zufälligen dynamischen Systems  $\Phi$  ab, d.h. es gilt

$$\varphi(k, \omega, \xi) = h(\theta_k \omega)^{-1} \Phi(k, \omega) h(\omega) \xi$$

für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

(c) Für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $1 \leq i \leq j \leq p$  bildet die Abbildung  $h(\omega)$  die zufällige invariante Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega)$  auf die direkte Summe  $E_i(\omega) \oplus \dots \oplus E_j(\omega)$  ab.

Im hyperbolischen Fall sind also das nichtlineare zufällige dynamische System  $\varphi$  und das lineare zufällige dynamische System  $\Phi$  topologisch äquivalent.

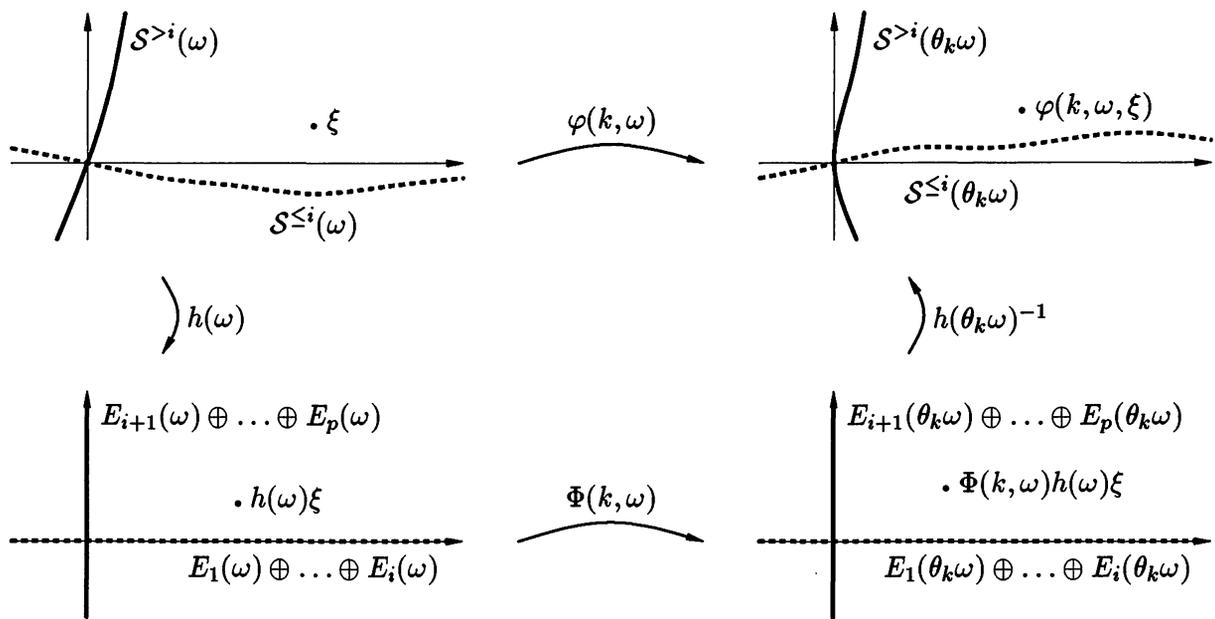


Abbildung 3.9: Der Satz von Hartman-Grobman für diskrete zufällige dynamische Systeme

**Beweis:** Zum Beweis des Satzes muß man nur Satz 1.7.5 auf die Differenzgleichung (3.6) anwenden, wieder mit  $\tilde{\Omega}$  an Stelle von  $\Omega$ . Ist dann  $\hat{H}$  die Abbildung aus Satz 1.7.5, so liefert die Definition

$$h(\omega) := \begin{cases} \hat{H}(0, \omega, \cdot) & \text{für } \omega \in \tilde{\Omega} \\ \text{id}_{\mathbb{R}^d} & \text{für } \omega \notin \tilde{\Omega} \end{cases}$$

einen zufälligen Homöomorphismus, der (a) und (c) erfüllt. Was den noch fehlenden Beweis von (b) angeht, so kann man wie im Beweis von Satz 3.2.5(b) für  $\hat{H}$  eine Beziehung der Form (3.9) herleiten, indem man entsprechende Beziehungen für die Abbildung  $E$  aus Satz 1.6.3 und die Abbildungen  $H^\pm$  aus Lemma 1.7.3 zeigt.  $\diamond$

Die Aussagen (b) und (c) des obigen Satzes sind in Abbildung 3.9 veranschaulicht. Dabei werden aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die beiden zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten  $S^{<=i}(\omega)$  und  $S^{>i}(\omega)$  dargestellt — zusammen mit den entsprechenden zufälligen linearen Unterräumen  $E_1(\omega) \oplus \dots \oplus E_i(\omega)$  beziehungsweise  $E_{i+1}(\omega) \oplus \dots \oplus E_p(\omega)$ .

Im noch fehlenden nicht hyperbolischen Fall erreicht man im allgemeinen wieder nur eine teilweise Linearisierung des gegebenen diskreten zufälligen dynamischen Systems  $\varphi$ .

**Satz 3.2.8** Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ , sowie darüber ein stetiges diskretes zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Fixpunkt 0. Darüber hinaus existiere ein lineares diskretes zufälliges dynamisches System  $\Phi$ , so daß mit

$$\varphi(k, \omega, x) = \Phi(k, \omega)x + \Psi(k, \omega, x)$$

die Voraussetzungen (D1) und (D2) erfüllt sind. Gibt es dann ein  $i \in \{1, \dots, p\}$  mit  $\lambda_i = 0$ , d.h. ist das lineare zufällige dynamische System  $\Phi$  nicht hyperbolisch, so existiert eine meßbare Abbildung  $h : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Für beliebiges  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $h(\omega) := h(\omega, \cdot)$  ein Homöomorphismus auf dem  $\mathbb{R}^d$  mit  $h(\omega)0 = 0$ , und die Abbildung  $h(\cdot)^{-1}(\cdot) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist meßbar.
- (b) Für jedes  $\omega \in \tilde{\Omega}$  bildet die Abbildung  $h(\omega)$  beliebige  $\omega$ -Orbits von  $\varphi$  auf entsprechende  $\omega$ -Orbits des zufälligen dynamischen Systems  $\varphi^*(k, \omega, \xi) := \Phi(k, \omega)\xi + \Psi^*(k, \omega, \xi)$  ab, wobei die neue Nichtlinearität  $\Psi^*$  durch

$$\Psi^*(k, \omega, \xi) := (0, \dots, 0, \underbrace{\Psi_i(k, \omega, \pi^{i,i}(\omega, \xi^i))}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$$

definiert wird, unter Verwendung der Abbildung  $\pi^{i,i}$  aus Bemerkung 3.2.4. Mit anderen Worten: Es gilt

$$\varphi(k, \omega, \xi) = h(\theta_k \omega)^{-1} \varphi^*(k, \omega, h(\omega)\xi)$$

für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

- (c) Für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $1 \leq i \leq j \leq p$  bildet die Abbildung  $h(\omega)$  die zufällige invariante Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  auf die direkte Summe  $E_i(\omega) \oplus \dots \oplus E_j(\omega)$  ab.

Im nicht hyperbolischen Fall sind also das nichtlineare zufällige dynamische System  $\varphi$  und das entkoppelte, teilweise lineare zufällige dynamische System  $\varphi^*$  topologisch äquivalent.

**Beweis:** Der Beweis kann analog zum Beweis des Satzes 3.2.7 geführt werden — diesmal verwendet man jedoch Satz 1.7.7 an Stelle von Satz 1.7.5. Wegen der speziellen Struktur der neuen Nichtlinearität  $\Psi^*$  sind die Oseledets-Räume  $E_i(\omega)$  auch invariant bezüglich  $\varphi^*$ .

Zu zeigen ist noch, daß  $\varphi^*$  tatsächlich wieder ein zufälliges dynamisches System ist. Dazu muß aber offensichtlich nur die Kozykleigenschaft der  $i$ -ten Komponente  $\varphi_i^*$  auf  $\mathbb{Z} \times \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^{d_i}$  nachgewiesen werden. Seien also  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi^i \in \mathbb{R}^{d_i}$  beliebig, aber fest. Setzt man abkürzend

$$\hat{\xi}^i := \varphi_i^*(m, \omega, \xi^i) \quad \text{und} \quad \hat{\omega} := \theta_m \omega,$$

so liefert die Invarianz von  $\mathcal{S}^{i,i}(\omega)$  unter Beachtung von

$$\varphi_i(m, \omega, \pi^{i,i}(\omega, \xi^i)) = \Phi_i(m, \omega)\xi^i + \Psi_i(m, \omega, \pi^{i,i}(\omega, \xi^i)) = \varphi_i^*(m, \omega, \xi^i)$$

zunächst

$$\begin{aligned}\varphi(m, \omega, \pi^{i,i}(\omega, \xi^i)) &= \pi^{i,i}(\theta_m \omega, \varphi_i(m, \omega, \pi^{i,i}(\omega, \xi^i))) = \\ &= \pi^{i,i}(\theta_m \omega, \varphi_i^*(m, \omega, \xi^i)) = \\ &= \pi^{i,i}(\hat{\omega}, \hat{\xi}^i),\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\varphi(n, \hat{\omega}, \pi^{i,i}(\hat{\omega}, \hat{\xi}^i)) &= \pi^{i,i}(\theta_n \hat{\omega}, \varphi_i^*(n, \hat{\omega}, \hat{\xi}^i)) = \\ &= \pi^{i,i}(\theta_n \hat{\omega}, \varphi_i^*(n, \theta_m \omega, \varphi_i^*(m, \omega, \xi^i))) = \\ &= (\dots, \underbrace{\varphi_i^*(n, \theta_m \omega, \varphi_i^*(m, \omega, \xi^i))}_{i\text{-te Stelle}}, \dots).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Andererseits impliziert die Kozykleigenschaft von  $\varphi$  die Identität

$$\begin{aligned}\varphi(n, \hat{\omega}, \pi^{i,i}(\hat{\omega}, \hat{\xi}^i)) &= \varphi(n, \theta_m \omega, \varphi(m, \omega, \pi^{i,i}(\omega, \xi^i))) = \\ &= \varphi(n + m, \omega, \pi^{i,i}(\omega, \xi^i)) = \\ &= (\dots, \underbrace{\varphi_i(n + m, \omega, \pi^{i,i}(\omega, \xi^i))}_{i\text{-te Stelle}}, \dots) = \\ &= (\dots, \underbrace{\varphi_i^*(n + m, \omega, \xi^i)}_{i\text{-te Stelle}}, \dots),\end{aligned}\tag{3.11}$$

und ein Vergleich der  $i$ -ten Komponenten von (3.10) und (3.11) liefert schließlich

$$\varphi_i^*(n + m, \omega, \xi^i) = \varphi_i^*(n, \theta_m \omega, \varphi_i^*(m, \omega, \xi^i)).$$

Damit ist alles gezeigt.  $\diamond$

**Bemerkung 3.2.9** Während die Komponenten  $\varphi_j^*$  mit  $j \neq i$  des in Satz 3.2.8 auftauchenden entkoppelten zufälligen dynamischen Systems  $\varphi^*$  linear sind, beschreibt die verbleibende nichtlineare Komponente  $\varphi_i^*$  gerade das Verhalten des zufälligen dynamischen Systems  $\varphi$  auf der zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,i}(\omega)$ , d.h. auf der zufälligen Zentrumsmannigfaltigkeit. Diese Aussage läßt sich dem obigen Beweis des Satzes 3.2.8 leicht entnehmen.  $\square$

Mit Satz 3.2.8 sind die Untersuchungen der diskreten zufälligen dynamischen Systeme vorerst abgeschlossen. Es hat sich gezeigt, daß — völlig analog zum deterministischen Fall — auch im zufälligen Fall das Verhalten einer hinreichend kleinen nichtlinearen Störung eines linearen zufälligen dynamischen Systems  $\Phi$  im wesentlichen durch das Verhalten von  $\Phi$  bestimmt wird. Die Tatsache, daß dabei *globale* Ergebnisse hergeleitet werden konnten, deutet jedoch bereits darauf hin, daß die Bedingung (D2) äußerst einschränkend ist. In Abschnitt 3.4 wird gezeigt werden, wie man dennoch zu Ergebnissen kommt, die für eine große Klasse von diskreten zufälligen dynamischen Systemen gelten. Diese Ergebnisse werden dann natürlich von *lokaler* Natur sein. Zuvor sollen aber im nächsten Abschnitt die kontinuierlichen zufälligen dynamischen Systeme behandelt werden.

### 3.3 Kontinuierliche zufällige dynamische Systeme

Nachdem im letzten Abschnitt die Ergebnisse des ersten Kapitels so erfolgreich auf diskrete zufällige dynamische Systeme angewandt werden konnten, wird man jetzt natürlich daran gehen, die Ergebnisse des zweiten Kapitels auf kontinuierliche zufällige dynamische Systeme anzuwenden. Bedient man sich dabei der Vorgehensweise des Abschnittes 3.2, so ist zunächst einmal der Zusammenhang zwischen den zufälligen Differentialgleichungen und den kontinuierlichen zufälligen dynamischen Systemen herzustellen. Es überrascht sicher nur wenig, daß auch im kontinuierlichen Fall eine spezielle Klasse nichtautonomer zufälliger Differentialgleichungen zufällige dynamische Systeme erzeugt, und zwar Gleichungen der Form

$$\dot{x} = f(\theta_t \omega, x), \quad (3.12)$$

wobei die meßbare Abbildung  $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  gewissen Bedingungen genügen muß. (Ein Beweis dieser Aussage findet sich in ARNOLD [2, Theorem 2.13].) Wendet man nun die Ergebnisse des letzten Kapitels auf derartige Differentialgleichungen an, so läßt sich wie in Abschnitt 3.2 zeigen, daß alle auftretenden Objekte — d.h. die zufälligen invarianten Mannigfaltigkeiten, die zufälligen Familien von Homöomorphismen, usw. . . — nicht von  $t$  und  $\omega$ , sondern nur von  $\theta_t \omega$  abhängen, und man erhält Resultate, die sich von denen des letzten Abschnittes im wesentlichen nur dadurch unterscheiden, daß die Zeitmenge  $\mathbb{Z}$  durch die Zeitmenge  $\mathbb{R}$  ersetzt wird. Damit könnte man diesen Abschnitt eigentlich abschließen. . .

Leider würden durch eine derartige Vorgehensweise viele interessante kontinuierliche zufällige dynamische Systeme außer acht gelassen werden. Während es nämlich im deterministischen Fall nur eine wichtige Art von *infinitesimalen Erzeugern* für dynamische Systeme gibt — und zwar autonome Differentialgleichungen — existieren im Fall der zufälligen dynamischen Systeme gleich zwei Arten: Nichtautonome zufällige Differentialgleichungen der Form (3.12), sowie autonome *stochastische Differentialgleichungen*. (Näheres dazu kann man in ARNOLD [2, Section 2.2, 2.3], ARNOLD, CRAUEL [4] und BOXLER [12] nachlesen.) Die Behandlung dieser stochastischen Differentialgleichungen ist jedoch nicht ganz unproblematisch. Der Grund dafür ist, daß beim Versuch der Übertragung der Beweistechniken des zweiten Kapitels Objekte entstehen (sogenannte “nicht-adaptierte stochastische Prozesse”), die im Rahmen der existierenden stochastischen Integrationstheorie, wie sie etwa in GIHMAN, SKOROHOD [16] oder KUNITA [31] enthalten ist, nicht weiterverarbeitet werden können<sup>9</sup>.

Um trotzdem auch für zufällige dynamische Systeme, die von gewissen stochastischen Differentialgleichungen erzeugt werden, Ergebnisse wie in Abschnitt 3.2 zu erhalten, soll im folgenden ein anderer Weg beschritten werden. In Anlehnung an IRWIN [27, p. 118] wird im vorliegenden Abschnitt der Fall der kontinuierlichen zufälligen dynamischen Systeme direkt auf den bereits behandelten diskreten Fall zurückgeführt<sup>10</sup>.

Sei dazu ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$  gegeben, sowie darüber ein meßbares kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  mit Fixpunkt 0, d.h. es gelte  $\varphi(t, \omega, 0) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$ . Weiter sei  $\Phi$  ein meßbares lineares kontinuierliches zufälliges dynamisches System auf dem  $\mathbb{R}^d$  über  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ , für das die

<sup>9</sup>An der Beseitigung dieses Mißstandes wird seit einiger Zeit gearbeitet, und die bislang von ARNOLD und IMKELLER [5] erhaltenen Ergebnisse deuten an, daß eine zufriedenstellende Lösung durchaus möglich ist.

<sup>10</sup>Dies ist auch der Grund dafür, daß in Definition 3.1.7 der Begriff der Quasibeschränktheit für  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  unter Verwendung der Abbildung  $\gamma^t$  definiert wurde — und nicht mittels der Abbildung  $e^{\gamma^t}$  aus Definition 2.2.1.

Aussagen der Sätze 3.1.3 und 3.1.5 gelten, und der "nichtlineare" Anteil  $\Psi$  von  $\varphi$  sei durch

$$\varphi(t, \omega, x) =: \Phi(t, \omega)x + \Psi(t, \omega, x) \quad (3.13)$$

definiert. Die Bedingungen, denen das zufällige dynamische System  $\varphi$  im folgenden genügen muß, werden wie in Abschnitt 3.2 getrennt für den linearen Anteil  $\Phi$  und den nichtlinearen Anteil  $\Psi$  formuliert. Zunächst zum linearen Anteil.

(K1) *Das lineare zufällige dynamische System  $\Phi$  sei in Blockdiagonalgestalt, d.h. es gelte*

$$\Phi(t, \omega) = \begin{pmatrix} \boxed{\Phi_1(t, \omega)} & & & 0 \\ & \boxed{\Phi_2(t, \omega)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\Phi_p(t, \omega)} \end{pmatrix},$$

bezüglich der Zerlegung  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p}$ . Dabei sollen für  $\Phi$  alle Aussagen des Satzes 3.1.9 gelten, d.h. der Lyapunov-Exponent  $\lambda_i$  besitzt gerade die Vielfachheit  $d_i$ , der  $i$ -te Oseledets-Raum ist gegeben durch

$$E_i(\omega) = \{0\} \times \dots \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d_i} \times \{0\} \times \dots \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d,$$

für  $i = 1, \dots, p$ , und es gibt eine zufällige Norm  $\|\cdot\|_\omega$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , so daß die Aussagen des Satzes 3.1.5 erfüllt sind.

Wie im Anschluß an die Voraussetzung (D1) im letzten Abschnitt induziert die zufällige Norm  $\|\cdot\|_\omega$  zufällige Normen auf den Räumen  $\mathbb{R}^{d_i}$  für  $i = 1, \dots, p$ . Wählt man jetzt die Konstante  $a > 0$  so, daß die Intervalle  $[\lambda_i - a, \lambda_i + a]$ ,  $i = 1, \dots, p$ , disjunkt sind, und fordert im hyperbolischen Fall wieder

$$0 \notin [\lambda_i - a, \lambda_i + a] \quad \text{für } i = 1, \dots, p,$$

dann erhält man mit

$$\alpha_{i,+} := e^{\lambda_i - a} \quad \text{und} \quad \alpha_{i,-} := e^{\lambda_i + a}$$

für  $i = 1, \dots, p$  zunächst

$$\infty > \alpha_{1,-} > \alpha_{1,+} > \alpha_{2,-} > \dots > \alpha_{p-1,+} > \alpha_{p,-} > \alpha_{p,+} > 0,$$

und Satz 3.1.5(c) impliziert die beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi_i(t, \omega)\|_{\omega, \theta_t \omega} &\leq \alpha_{i,+}^t \quad \text{für alle } t \leq 0, \\ \|\Phi_i(t, \omega)\|_{\omega, \theta_t \omega} &\leq \alpha_{i,-}^t \quad \text{für alle } t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit  $t \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$ . Ferner sei wieder eine positive Konstante  $\delta$  mit

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\alpha_{1,+} - \alpha_{2,-}}{2}, \dots, \frac{\alpha_{p-1,+} - \alpha_{p,-}}{2}, \alpha_{p,+} \right\}$$

beliebig gewählt, wobei im hyperbolischen Fall darüber hinaus noch

$$1 \notin (\alpha_{i,+} - \delta, \alpha_{i,-} + \delta) \quad \text{für } i = 1, \dots, p$$

gelte. Schließlich wird im folgenden die zufällige Norm  $\|\cdot\|_\omega$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  aus (K1) durch die äquivalente Norm

$$\|x\|_\omega = \|(x^1, \dots, x^p)\|_\omega := \|x^1\|_\omega + \dots + \|x^p\|_\omega$$

ersetzt, wobei  $x = (x^1, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p} = \mathbb{R}^d$  beliebig ist.

Zu guter Letzt sollen noch die Bedingungen an den nichtlinearen Anteil  $\Psi$  in (3.13) angegeben werden.

(K2) Für beliebige  $i = 1, \dots, p$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$  seien, unter Verwendung von

$$\Psi =: (\Psi_1, \dots, \Psi_p) : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p},$$

die Abschätzungen

$$\|\Psi_i(t, \omega, x) - \Psi_i(t, \omega, \bar{x})\|_{\theta_t \omega} \leq L \|x - \bar{x}\|_\omega$$

erfüllt, mit  $0 \leq L < L^*$  (wobei  $L^*$  wieder wie in Satz 1.7.5 gewählt wird), sowie ferner

$$\|\Psi_i(t, \omega, x)\|_{\theta_t \omega} \leq M,$$

mit einer reellen Konstanten  $M \geq 0$ .

Nachdem nun die Voraussetzungen spezifiziert sind, denen das meßbare kontinuierliche zufällige dynamische System  $\varphi$  (vermöge der Zerlegung (3.13)) genügen soll, wird zunächst Satz 3.2.3 auf den kontinuierlichen Fall übertragen.

**Satz 3.3.1** Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ , sowie darüber ein meßbares kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Fixpunkt 0. Darüber hinaus existiere ein meßbares lineares kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\Phi$ , so daß mit

$$\varphi(t, \omega, x) = \Phi(t, \omega)x + \Psi(t, \omega, x)$$

die Voraussetzungen (K1) und (K2) erfüllt sind. Dann gibt es zu jeder Wahl von  $1 \leq i \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$  eine zufällige Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega) \subset \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die zufällige Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega)$  läßt sich schreiben als

$$S^{i,j}(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^d : (x^{<i}, x^{>j}) = s^{i,j}(\omega, x^{i \leq j})\}$$

mit einer meßbaren Abbildung

$$s^{i,j} : \Omega \times \mathbb{R}^{d_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_j} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_{i-1}} \times \mathbb{R}^{d_{j+1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_p},$$

wobei die Abbildungen  $s^{i,j}(\omega, \cdot)$  für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  global Lipschitz-stetig sind, und die zugehörigen Lipschitzkonstanten für  $L \rightarrow 0$  ebenfalls gegen 0 konvergieren.

(b) Die zufällige Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega)$  ist tatsächlich eine zufällige invariante Mannigfaltigkeit, d.h. für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$  ist die Identität

$$\varphi(t, \omega)S^{i,j}(\omega) = S^{i,j}(\theta_t \omega)$$

erfüllt.

(c) Die zufällige invariante Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  läßt sich für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  dynamisch charakterisieren als

$$\mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \{ \xi \in \mathbb{R}^d : \varphi(\cdot, \omega, \xi) \text{ ist } \gamma_1^+ \text{- und } \gamma_2^- \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega \},$$

wobei

$$\gamma_1 \in \begin{cases} [\alpha_{1,-} + \delta, \infty) & \text{für } i = 1 \\ [\alpha_{i,-} + \delta, \alpha_{i-1,+} - \delta] & \text{für } i > 1 \end{cases}$$

und

$$\gamma_2 \in \begin{cases} [\alpha_{j+1,-} + \delta, \alpha_{j,+} - \delta] & \text{für } j < p \\ (0, \alpha_{p,+} - \delta] & \text{für } j = p \end{cases}$$

beliebig gewählt werden können.

Definiert man schließlich noch  $\mathcal{S}^{1,p}(\omega) := \mathbb{R}^d$  für beliebige  $\omega \in \Omega$ , so gelten die Aussagen (b) und (c) auch für  $\mathcal{S}^{1,p}(\omega)$ .

**Beweis:** Wie bereits erwähnt wurde, soll der Beweis des vorliegenden Satzes auf den in Satz 3.2.3 behandelten diskreten Fall zurückgeführt werden. Zum diesem Zweck betrachtet man zunächst die Einschränkung von  $\varphi$  auf die Menge  $\mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d$ , d.h. man läßt nur ganzzahlige Zeitpunkte zu. Es kann leicht verifiziert werden, daß diese Einschränkung wegen (K1) und (K2) den Voraussetzungen (D1) und (D2) des letzten Abschnittes genügt.

Seien nun  $1 \leq i \leq j \leq p$  mit  $(i, j) \neq (1, p)$  beliebig, aber fest gewählt. Dann garantiert der Satz 3.2.3 eine zufällige Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  mit den in (a) enthaltenen Eigenschaften. Ferner gilt die Identität

$$\varphi(k, \omega) \mathcal{S}^{i,j}(\omega) = \mathcal{S}^{i,j}(\theta_k \omega) \quad \text{für beliebige } k \in \mathbb{Z}, \omega \in \tilde{\Omega}, \quad (3.15)$$

und man erhält für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  die dynamische Charakterisierung

$$\xi \in \mathcal{S}^{i,j}(\omega) \Leftrightarrow \text{Die Mengen } \{ \gamma_1^{-k} \|\varphi(k, \omega, \xi)\|_{\theta_k \omega} : k \in \mathbb{Z}_0^+ \} \text{ und } \{ \gamma_2^{-k} \|\varphi(k, \omega, \xi)\|_{\theta_k \omega} : k \in \mathbb{Z}_0^- \} \text{ sind beschränkt,} \quad (3.16)$$

wobei  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  wie in (c) gewählt werden können. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Identität (3.15) für beliebige reelle Zeitpunkte gilt und die obige dynamische Charakterisierung durch die in (c) enthaltene Charakterisierung ersetzt werden kann.

Zum Nachweis der Invarianz seien  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in \mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  beliebig, aber fest gewählt. Dann gelten wegen (3.16) zunächst die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} c_{\omega, \xi}^{(1)} &:= \sup \{ \gamma_1^{-k} \|\varphi(k, \omega, \xi)\|_{\theta_k \omega} : k \in \mathbb{Z}_0^+ \} < \infty, \\ c_{\omega, \xi}^{(2)} &:= \sup \{ \gamma_2^{-k} \|\varphi(k, \omega, \xi)\|_{\theta_k \omega} : k \in \mathbb{Z}_0^- \} < \infty, \end{aligned}$$

mit  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  wie oben. Sei nun  $t \in [0, 1]$  beliebig, aber fest. Beachtet man die wegen (3.14) für alle  $\hat{\omega} \in \tilde{\Omega}$  gültige Abschätzung

$$\|\Phi(t, \hat{\omega})\|_{\hat{\omega}, \theta_t \hat{\omega}} \leq c^{(3)} := \max \{ \alpha_{1,-}, 1 \},$$

so erhält man unter Verwendung der Kozykeleigenschaft von  $\varphi$  und der Voraussetzung (K2) für beliebige  $k \in \mathbb{Z}_0^+$  die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|\varphi(k, \theta_t \omega, \varphi(t, \omega, \xi))\|_{\theta_k \theta_t \omega} &= \|\varphi(k+t, \omega, \xi)\|_{\theta_{k+t} \omega} = \|\varphi(t, \theta_k \omega, \varphi(k, \omega, \xi))\|_{\theta_t \theta_k \omega} \leq \\ &\leq \|\Phi(t, \theta_k \omega) \varphi(k, \omega, \xi)\|_{\theta_t \theta_k \omega} + \|\Psi(t, \theta_k \omega, \varphi(k, \omega, \xi))\|_{\theta_t \theta_k \omega} \leq \\ &\leq c^{(3)} \|\varphi(k, \omega, \xi)\|_{\theta_k \omega} + pL \|\varphi(k, \omega, \xi)\|_{\theta_k \omega} \leq \\ &\leq (c^{(3)} + pL) c_{\omega, \xi}^{(1)} \cdot \gamma_1^k, \end{aligned} \quad (3.17)$$

und analog für  $k \in \mathbb{Z}_0^-$

$$\|\varphi(k, \theta_t \omega, \varphi(t, \omega, \xi))\|_{\theta_k \theta_t \omega} \leq (c^{(3)} + pL) c_{\omega, \xi}^{(2)} \cdot \gamma_2^k. \quad (3.18)$$

Daraus folgt aber mit der in (3.16) enthaltenen dynamischen Charakterisierung sofort die Inklusion  $\varphi(t, \omega, \xi) \in \mathcal{S}^{i,j}(\theta_t \omega)$ , und mit (3.15) ferner

$$\varphi(\tau + t, \omega, \xi) = \varphi(\tau, \theta_t \omega, \varphi(t, \omega, \xi)) \in \mathcal{S}^{i,j}(\theta_\tau \theta_t \omega) = \mathcal{S}^{i,j}(\theta_{\tau+t} \omega),$$

für beliebige  $\tau \in \mathbb{Z}$  und  $t \in [0, 1]$ , d.h. es gilt

$$\varphi(t, \omega, \xi) \in \mathcal{S}^{i,j}(\theta_t \omega) \quad \text{für beliebige } t \in \mathbb{R}.$$

Wie im Beweis von Satz 3.2.3 läßt sich daraus aber leicht die in (b) geforderte Gleichheit ableiten.

Zum noch fehlenden Nachweis der in (c) enthaltenen dynamischen Charakterisierung von  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  genügt es offensichtlich zu zeigen, daß für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in \mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  die Mengen

$$\{\gamma_1^{-t} \|\varphi(t, \omega, \xi)\|_{\theta_t \omega} : t \in \mathbb{R}_0^+\} \quad \text{und} \quad \{\gamma_2^{-t} \|\varphi(t, \omega, \xi)\|_{\theta_t \omega} : t \in \mathbb{R}_0^-\}$$

beschränkt sind, mit  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  wie oben. Dies folgt jedoch leicht aus den Abschätzungen

$$\begin{aligned} \gamma_1^{-(k_1+t)} \|\varphi(k_1+t, \omega, \xi)\|_{\theta_{k_1+t} \omega} &\leq \max \left\{ \frac{1}{\gamma_1}, 1 \right\} \cdot (c^{(3)} + pL) c_{\omega, \xi}^{(1)}, \\ \gamma_2^{-(k_2+t)} \|\varphi(k_2+t, \omega, \xi)\|_{\theta_{k_2+t} \omega} &\leq \max \left\{ \frac{1}{\gamma_2}, 1 \right\} \cdot (c^{(3)} + pL) c_{\omega, \xi}^{(2)}, \end{aligned}$$

für beliebige  $k_1 \in \mathbb{Z}_0^+$ ,  $k_2 \in \mathbb{Z}^-$  und  $t \in [0, 1]$ , die unmittelbare Konsequenzen aus den Ungleichungen (3.17) und (3.18) sind.  $\diamond$

An dieser Stelle könnten analoge Bemerkungen wie im Anschluß an Satz 3.2.3 gemacht werden, d.h. man könnte die Oseledets-Mannigfaltigkeiten, die stabile zufällige Mannigfaltigkeit, usw. . . , definieren. Da dies jedoch fast wortwörtlich übernommen werden kann, soll darauf verzichtet werden.

Dagegen soll auf die Abschätzungen für  $\omega$ -Orbits  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$ , die in einer zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  verlaufen, noch näher eingegangen werden. Sei also  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$  ein  $\omega$ -Orbit, der in  $\mathcal{S}^{i,j}(\omega)$  enthalten ist. Dann zeigt der Beweis des letzten Satzes, daß die Anwendung von Korollar 1.4.6 die beiden Abschätzungen

$$\|\varphi(k, \omega, \xi)\|_{\theta_k \omega} \leq \frac{\delta - Lp}{\delta - 2Lp} \gamma_1^k \|\xi\|_\omega \quad \text{für beliebige } k \in \mathbb{Z}_0^+, \quad (3.19)$$

$$\|\varphi(k, \omega, \xi)\|_{\theta_k \omega} \leq \frac{\delta - Lp}{\delta - 2Lp} \gamma_2^k \|\xi\|_\omega \quad \text{für beliebige } k \in \mathbb{Z}_0^- \quad (3.20)$$

liefert, mit  $\gamma_1 \geq \alpha_{i,-} + \delta$  und  $0 < \gamma_2 \leq \alpha_{j,+} - \delta$ . Beachtet man nun die wegen (3.14) und (K2) für beliebige  $t \in [0, 1]$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\eta, \bar{\eta} \in \mathbb{R}^d$  gültige Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, \omega, \eta) - \varphi(t, \omega, \bar{\eta})\|_{\theta_t \omega} &\leq \|\Phi(t, \omega)\eta - \Phi(t, \omega)\bar{\eta}\|_{\theta_t \omega} + \|\Psi(t, \omega, \eta) - \Psi(t, \omega, \bar{\eta})\|_{\theta_t \omega} \leq \\ &\leq \|\Phi(t, \omega)\|_{\omega, \theta_t \omega} \|\eta - \bar{\eta}\|_{\omega} + pL \|\eta - \bar{\eta}\|_{\omega} \leq \\ &\leq (\max\{\alpha_{1,-}, 1\} + pL) \cdot \|\eta - \bar{\eta}\|_{\omega} =: \\ &=: C_{\varphi} \|\eta - \bar{\eta}\|_{\omega}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

so erhält man zunächst für beliebige  $t \in [0, 1]$  und  $\tau \in \mathbb{Z}$  die Abschätzung

$$\|\varphi(t + \tau, \omega, \xi)\|_{\theta_{t+\tau} \omega} = \|\varphi(t, \theta_{\tau} \omega, \varphi(\tau, \omega, \xi))\|_{\theta_t \theta_{\tau} \omega} \leq C_{\varphi} \|\varphi(\tau, \omega, \xi)\|_{\theta_{\tau} \omega}, \quad (3.22)$$

und mit (3.19) und (3.20) folgt leicht

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, \omega, \xi)\|_{\theta_t \omega} &\leq C_{\varphi} \max\{\gamma_1^{-1}, 1\} \frac{\delta - Lp}{\delta - 2Lp} \gamma_1^t \|\xi\|_{\omega} \quad \text{für beliebige } t \in \mathbb{R}_0^+, \\ \|\varphi(t, \omega, \xi)\|_{\theta_t \omega} &\leq C_{\varphi} \max\{\gamma_2^{-1}, 1\} \frac{\delta - Lp}{\delta - 2Lp} \gamma_2^t \|\xi\|_{\omega} \quad \text{für beliebige } t \in \mathbb{R}_0^-. \end{aligned}$$

Diese beiden Abschätzungen implizieren mit der Identität

$$\|\xi\|_{\omega} = \|\varphi(-t, \theta_t \omega, \varphi(t, \omega, \xi))\|_{\theta_{-t} \omega}$$

wie im Beweis von Korollar 1.3.2 schließlich

$$\frac{1}{C} \gamma_2^t \|\xi\|_{\omega} \leq \|\varphi(t, \omega, \xi)\|_{\theta_t \omega} \leq C \gamma_1^t \|\xi\|_{\omega} \quad \text{für beliebige } t \in \mathbb{R}_0^+, \quad (3.23)$$

sowie

$$\frac{1}{C} \gamma_1^t \|\xi\|_{\omega} \leq \|\varphi(t, \omega, \xi)\|_{\theta_t \omega} \leq C \gamma_2^t \|\xi\|_{\omega} \quad \text{für beliebige } t \in \mathbb{R}_0^-, \quad (3.24)$$

mit der Konstanten  $C := C_{\varphi} \cdot \max\{\gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}, 1\} \cdot \frac{\delta - Lp}{\delta - 2Lp}$  und  $\gamma_1, \gamma_2$  wie oben. Wie im letzten Abschnitt erhält man mit diesen Abschätzungen — unter Verwendung von Lemma 3.1.8 — auch Aussagen über das Wachstum von  $\|\varphi(t, \omega, \xi)\|$ .

Nach diesem Einschub soll als nächstes Satz 3.2.5 auf den kontinuierlichen Fall übertragen werden.

**Satz 3.3.2** *Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ , sowie darüber ein meßbares kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Fixpunkt 0. Darüber hinaus existiere ein meßbares lineares kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\Phi$ , so daß mit*

$$\boxed{\varphi(t, \omega, x) = \Phi(t, \omega)x + \Psi(t, \omega, x)}$$

die Voraussetzungen (K1) und (K2) erfüllt sind. Dann gibt es zu jedem  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  meßbare Abbildungen  $P^{\leq i}, P^{> i} : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , so daß für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  folgendes gilt:

(a) Die Abbildungen  $P^{\leq i}(\omega) := P^{\leq i}(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $P^{> i}(\omega) := P^{> i}(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sind stetig mit  $P^{\leq i}(\omega)0 = P^{> i}(\omega)0 = 0$  und erfüllen die Identitäten

$$\begin{aligned} P^{\leq i}(\omega)\mathbb{R}^d &= \mathcal{S}^{\leq i}(\omega), \\ P^{> i}(\omega)\mathbb{R}^d &= \mathcal{S}^{> i}(\omega). \end{aligned}$$

- (b) Die zufälligen Abbildungen  $P^{\leq i}(\omega)$  und  $P^{> i}(\omega)$  bilden  $\omega$ -Orbits von  $\varphi$  wieder auf  $\omega$ -Orbits von  $\varphi$  ab, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} P^{\leq i}(\theta_t \omega) \varphi(t, \omega, \xi) &= \varphi(t, \omega, P^{\leq i}(\omega) \xi), \\ P^{> i}(\theta_t \omega) \varphi(t, \omega, \xi) &= \varphi(t, \omega, P^{> i}(\omega) \xi), \end{aligned}$$

für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

- (c) Für beliebiges  $\xi_0 \in \mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  ist das Urbild  $P^{\leq i}(\omega)^{-1}(\xi_0) \subset \mathbb{R}^d$  der Graph einer global Lipschitz-stetigen Abbildung, deren Lipschitzkonstante für  $L \rightarrow 0$  gegen 0 konvergiert. Des weiteren erhält man die dynamische Charakterisierung

$$P^{\leq i}(\omega)^{-1}(\xi_0) = \{ \xi \in \mathbb{R}^d : \varphi(\cdot, \omega, \xi) - \varphi(\cdot, \omega, \xi_0) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega \},$$

für beliebiges  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ . Insbesondere gilt also  $P^{\leq i}(\omega) \xi_0 = \xi_0$ , sowie

$$P^{\leq i}(\omega)^{-1}(0) = \mathcal{S}^{> i}(\omega).$$

Für beliebiges  $\eta_0 \in \mathcal{S}^{> i}(\omega)$  ist das Urbild  $P^{> i}(\omega)^{-1}(\eta_0) \subset \mathbb{R}^d$  ebenfalls der Graph einer global Lipschitz-stetigen Abbildung, deren Lipschitzkonstante für  $L \rightarrow 0$  gegen 0 konvergiert, und man erhält die dynamische Charakterisierung

$$P^{> i}(\omega)^{-1}(\eta_0) = \{ \eta \in \mathbb{R}^d : \varphi(\cdot, \omega, \eta) - \varphi(\cdot, \omega, \eta_0) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt bezüglich } \omega \},$$

für beliebiges  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ . Insbesondere erhält man  $P^{> i}(\omega) \eta_0 = \eta_0$  und

$$P^{> i}(\omega)^{-1}(0) = \mathcal{S}^{\leq i}(\omega).$$

- (d) Für beliebige  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{S}^{> i}(\omega)$  und  $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$  gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|P^{\leq i}(\theta_t \omega) \varphi(t, \omega, \xi) - \varphi(t, \omega, \xi)\| &\leq K_{\omega, \xi}^{(1)} \cdot \beta_1^t \cdot \|\varphi(t, \omega, \xi)\| \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_0^+, \\ \|P^{> i}(\theta_t \omega) \varphi(t, \omega, \eta) - \varphi(t, \omega, \eta)\| &\leq K_{\omega, \eta}^{(2)} \cdot \beta_2^t \cdot \|\varphi(t, \omega, \eta)\| \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_0^-, \end{aligned}$$

mit gewissen Zahlen  $0 < \beta_1 < 1 < \beta_2$ , sowie Konstanten  $K_{\omega, \xi}^{(1)} \geq 0$  und  $K_{\omega, \eta}^{(2)} \geq 0$ .

**Beweis:** Auch dieser Beweis wird durch Anwendung des entsprechenden diskreten Ergebnisses geführt. Betrachtet man also wieder die Einschränkung von  $\varphi$  auf die Menge  $\mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d$ , so implizieren die Voraussetzungen (K1) und (K2) die Gültigkeit von (D1) und (D2) aus Abschnitt 3.2. Damit läßt sich Satz 3.2.5 anwenden und liefert für beliebiges  $i \in \{1, \dots, p-1\}$  zwei Abbildungen  $P^{\leq i}$  und  $P^{> i}$  — und es wird sich gleich zeigen, daß genau diese beiden Abbildungen bereits alle in Satz 3.3.2 geforderten Eigenschaften besitzen. Aus Symmetriegründen soll dies nur für die Abbildung  $P^{\leq i}$  nachgewiesen werden.

Offensichtlich besitzt  $P^{\leq i}$  die Eigenschaften aus (a). Was den Beweis von (b) angeht, so liefert Satz 3.2.5 die Gültigkeit von

$$P^{\leq i}(\theta_k \omega) \varphi(k, \omega, \xi) = \varphi(k, \omega, P^{\leq i}(\omega) \xi) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}, \omega \in \tilde{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (3.25)$$

Des weiteren ist für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  der Punkt  $P^{\leq i}(\omega) \xi$  der eindeutig bestimmte Punkt in  $\mathcal{S}^{\leq i}(\omega)$ , für den die Menge

$$\{ \gamma^{-k} \|\varphi(k, \omega, \xi) - \varphi(k, \omega, P^{\leq i}(\omega) \xi)\|_{\theta_k \omega} : k \in \mathbb{Z}_0^+ \} \quad (3.26)$$

beschränkt ist, mit  $\gamma \in [\alpha_{i+1,-} + \delta, \alpha_{i,+} - \delta]$ . Seien nun  $t \in [-1, 0]$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$  beliebig, aber fest gewählt. Ferner sei

$$P_t^{\leq i}(\omega) := \varphi(-t, \theta_t \omega) \circ P^{\leq i}(\theta_t \omega) \circ \varphi(t, \omega).$$

Dann gilt wegen Satz 3.2.5(a) und Satz 3.3.1(b) zunächst

$$\begin{aligned} P_t^{\leq i}(\omega) \mathbb{R}^d &= \varphi(-t, \theta_t \omega) P^{\leq i}(\theta_t \omega) \varphi(t, \omega) \mathbb{R}^d = \varphi(-t, \theta_t \omega) P^{\leq i}(\theta_t \omega) \mathbb{R}^d = \\ &= \varphi(-t, \theta_t \omega) \mathcal{S}^{\leq i}(\theta_t \omega) = \mathcal{S}^{\leq i}(\omega). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Für beliebiges  $\xi \in \mathbb{R}^d$  zeigt die Diskussion um (3.26), daß unter Verwendung der Abkürzungen

$$\hat{\omega} := \theta_t \omega \quad \text{und} \quad \hat{\xi} := \varphi(t, \omega, \xi)$$

die Menge

$$\{\gamma^{-k} \|\varphi(k, \hat{\omega}, \hat{\xi}) - \varphi(k, \hat{\omega}, P^{\leq i}(\hat{\omega})\hat{\xi})\|_{\theta_k \hat{\omega}} : k \in \mathbb{Z}_0^+\} \quad (3.28)$$

beschränkt ist, mit  $\gamma$  wie oben. Beachtet man schließlich noch die Abschätzung (3.21), so liefert die Beziehung

$$\begin{aligned} &\|\varphi(k, \omega, \xi) - \varphi(k, \omega, P_t^{\leq i}(\omega)\xi)\|_{\theta_k \omega} = \\ &= \|\varphi(k, \omega, \varphi(-t, \theta_t \omega, \varphi(t, \omega, \xi))) - \varphi(k, \omega, \varphi(-t, \theta_t \omega, P^{\leq i}(\theta_t \omega)\varphi(t, \omega, \xi)))\|_{\theta_k \omega} = \\ &= \|\varphi(-t, \theta_k \hat{\omega}, \varphi(k, \hat{\omega}, \hat{\xi})) - \varphi(-t, \theta_k \hat{\omega}, \varphi(k, \hat{\omega}, P^{\leq i}(\hat{\omega})\hat{\xi}))\|_{\theta_{-t} \theta_k \hat{\omega}} \leq \\ &\leq C_\varphi \|\varphi(k, \hat{\omega}, \hat{\xi}) - \varphi(k, \hat{\omega}, P^{\leq i}(\hat{\omega})\hat{\xi})\|_{\theta_k \hat{\omega}} \end{aligned}$$

zusammen mit (3.28) sofort die Beschränktheit der Menge

$$\{\gamma^{-k} \|\varphi(k, \omega, \xi) - \varphi(k, \omega, P_t^{\leq i}(\omega)\xi)\|_{\theta_k \omega} : k \in \mathbb{Z}_0^+\}.$$

Wegen (3.27) und der Diskussion um (3.26) heißt das aber gerade, daß die Identität  $P_t^{\leq i}(\omega)\xi = P^{\leq i}(\omega)\xi$  erfüllt ist, d.h. es gilt

$$P^{\leq i}(\theta_t \omega)\varphi(t, \omega, \xi) = \varphi(t, \omega, P^{\leq i}(\omega)\xi),$$

für beliebige  $t \in [-1, 0]$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Zusammen mit (3.25) folgt daraus schließlich

$$\begin{aligned} P^{\leq i}(\theta_{t+\tau} \omega) \circ \varphi(t + \tau, \omega) &= P^{\leq i}(\theta_t \theta_\tau \omega) \circ \varphi(t, \theta_\tau \omega) \circ \varphi(\tau, \omega) = \\ &= \varphi(t, \theta_\tau \omega) \circ P^{\leq i}(\theta_\tau \omega) \circ \varphi(\tau, \omega) = \\ &= \varphi(t, \theta_\tau \omega) \circ \varphi(\tau, \omega) \circ P^{\leq i}(\omega) = \\ &= \varphi(t + \tau, \omega) \circ P^{\leq i}(\omega) \end{aligned}$$

für beliebige  $\tau \in \mathbb{Z}$ ,  $t \in [-1, 0]$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$ , womit auch (b) bewiesen wäre.

Die Aussagen in (c) sind unmittelbare Folgerungen aus Satz 3.2.5(c), wobei die alternativen dynamischen Charakterisierungen wie im Beweis von Satz 3.3.1 hergeleitet werden können, unter Verwendung der Abschätzung (3.21). Schließlich folgen die in (d) enthaltenen Aussagen wie im Beweis von Satz 3.2.5(d), unter Verwendung der Abschätzungen (3.23) und (3.24).  $\diamond$

**Bemerkung 3.3.3** Völlig analog zu Bemerkung 3.2.6 läßt sich die Gültigkeit der Identitäten

$$P^{\leq \ell}(\omega)S^{i,j}(\omega) = S^{i,\ell}(\omega)$$

für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $1 \leq i \leq \ell \leq j \leq p$  mit  $\ell < p$ , sowie

$$P^{> \ell-1}(\omega)S^{i,j}(\omega) = S^{\ell,j}(\omega)$$

für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $1 \leq i \leq \ell \leq j \leq p$  mit  $\ell > 1$  nachweisen.  $\square$

Satz 3.3.2 zeigt, daß auch für kontinuierliche zufällige dynamische Systeme das Konzept der *asymptotischen Phasen* existiert. Des weiteren nähern sich gegen 0 konvergierende  $\omega$ -Orbits  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$ , die "zwischen" zwei Oseledets-Mannigfaltigkeiten verlaufen, auch im kontinuierlichen Fall genau einer davon tangential an.

Zum Abschluß dieses Abschnittes sollen noch die Sätze von Hartman-Grobman übertragen werden. Den Anfang macht wieder der klassische Satz von Hartman-Grobman, der die vollständige Linearisierung eines gegebenen zufälligen dynamischen Systems garantiert, sofern der lineare Anteil hyperbolisch ist.

**Satz 3.3.4** Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ , sowie darüber ein meßbares kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Fixpunkt 0. Darüber hinaus existiere ein meßbares lineares kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\Phi$ , so daß mit

$$\varphi(t, \omega, x) = \Phi(t, \omega)x + \Psi(t, \omega, x)$$

die Voraussetzungen (K1) und (K2) erfüllt sind. Ist dann  $\Phi$  hyperbolisch, d.h. sind alle Lyapunov-Exponenten von 0 verschieden, so existiert eine meßbare Abbildung  $h : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Für beliebiges  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $h(\omega) := h(\omega, \cdot)$  ein Homöomorphismus auf dem  $\mathbb{R}^d$  mit  $h(\omega)0 = 0$ , und die Abbildung  $h(\cdot)^{-1}(\cdot) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist meßbar.
- (b) Für jedes  $\omega \in \tilde{\Omega}$  bildet die Abbildung  $h(\omega)$  beliebige  $\omega$ -Orbits von  $\varphi$  auf entsprechende  $\omega$ -Orbits des linearen zufälligen dynamischen Systems  $\Phi$  ab, d.h. es gilt

$$\varphi(t, \omega, \xi) = h(\theta_t \omega)^{-1} \Phi(t, \omega) h(\omega) \xi$$

für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

- (c) Für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $1 \leq i \leq j \leq p$  bildet die Abbildung  $h(\omega)$  die zufällige invariante Mannigfaltigkeit  $S^{i,j}(\omega)$  auf die direkte Summe  $E_i(\omega) \oplus \dots \oplus E_j(\omega)$  ab.

Im hyperbolischen Fall sind also das nichtlineare zufällige dynamische System  $\varphi$  und das lineare zufällige dynamische System  $\Phi$  topologisch äquivalent.

**Beweis:** Wie schon in den Beweisen der beiden letzten Sätze wird zunächst das zufällige dynamische System  $\varphi$  auf die Menge  $\mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d$  eingeschränkt. Unter Verwendung von (K1) und (K2) erkennt man dann leicht, daß der diskrete Satz 3.2.7 auf diese Einschränkung angewandt werden kann — und der liefert eine Abbildung  $h$  mit den in (a) und (c) geforderten Eigenschaften.

Was den Nachweis von (b) angeht, so muß man allerdings die “Feinstruktur” des Beweises von Satz 1.7.5 berücksichtigen, aus dem ja der diskrete Satz 3.2.7 abgeleitet wurde. Dazu definiert man zunächst das entkoppelte zufällige dynamische System  $\varphi^*$  durch

$$\varphi^*(t, \omega, \xi) := (\varphi_1^*(t, \omega, \xi^1), \dots, \varphi_p^*(t, \omega, \xi^p)),$$

für beliebige  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , wobei die  $i$ -te Komponente  $\varphi_i^*$  für  $i = 1, \dots, p$  als

$$\varphi_i^*(t, \omega, \xi^i) := \Phi_i(t, \omega)\xi^i + \Psi_i^*(t, \omega, \xi^i)$$

festgelegt ist, mit

$$\Psi_i^*(t, \omega, \xi^i) := \Psi_i(t, \omega, \pi^{i,i}(\omega, \xi^i)).$$

Daß  $\varphi^*$  tatsächlich ein zufälliges dynamisches System ist, folgt dabei völlig analog zum Beweis des Satzes 3.2.8.

Beim Beweis von Satz 3.2.7 (beziehungsweise Satz 1.7.5) wurde als nächstes gezeigt, daß die diskreten Einschränkungen von  $\varphi$  und  $\varphi^*$  topologisch äquivalent sind, vermöge eines zufälligen Homöomorphismus  $E(\omega)$ . Beachtet man nun die in Lemma 1.6.1 für den in Satz 1.6.3 benötigten Induktionsschritt angegebene Definition von  $E(\omega)$ , so impliziert Satz 3.3.2(b) sofort die Gültigkeit von

$$E(\theta_t \omega) \circ \varphi(t, \omega) = \varphi^*(t, \omega) \circ E(\omega)$$

für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$ .

Der letzte Schritt beim Beweis der Sätze 3.2.7 beziehungsweise 1.7.5 bestand darin, daß die  $p$  Komponenten von  $\varphi^*$  durch eine Anwendung von Lemma 1.7.3 linearisiert wurden — und zum vollständigen Beweis des vorliegenden Satzes muß nur noch gezeigt werden, daß die dabei auftretenden zufälligen Homöomorphismen nicht nur die auf  $\mathbb{Z}$  eingeschränkten, sondern bereits die ganzen  $\omega$ -Orbits von  $\varphi^*$  auf  $\omega$ -Orbits von  $\Phi$  abbilden.

Sei also  $i \in \{1, \dots, p\}$  beliebig, aber fest, und sei  $K_i(\omega)$  die von Lemma 1.7.3 und Satz 3.2.7 garantierte Abbildung, die  $\varphi_i^*$  linearisiert. Dann gilt für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi^i \in \mathbb{R}^{d_i}$  die Identität

$$K_i(\theta_k \omega) \varphi_i^*(k, \omega, \xi^i) = \Phi_i(k, \omega) K_i(\omega) \xi^i, \quad (3.29)$$

und für jede Wahl von  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi^i \in \mathbb{R}^{d_i}$  ist  $K_i(\omega) \xi^i$  der eindeutig bestimmte Punkt im  $\mathbb{R}^{d_i}$ , für den die Menge

$$\{|\Phi_i(k, \omega) K_i(\omega) \xi^i - \varphi_i^*(k, \omega, \xi^i)|_{\theta_k \omega} : k \in \mathbb{Z}\} \quad (3.30)$$

beschränkt ist. Seien nun  $t \in [-1, 0]$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$  beliebig, aber fest. Definiert man dann

$$K_{i,t}(\omega) := \Phi_i(-t, \theta_t \omega) \circ K_i(\theta_t \omega) \circ \varphi_i^*(t, \omega),$$

so erhält man für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\xi^i \in \mathbb{R}^{d_i}$  unter Verwendung der Abkürzungen

$$\hat{\omega} := \theta_t \omega \quad \text{und} \quad \hat{\xi}^i := \varphi_i^*(t, \omega, \xi^i)$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 & \|\Phi_i(k, \omega)K_{i,t}(\omega)\xi^i - \varphi_i^*(k, \omega, \xi^i)\|_{\theta_k\omega} = \\
 & = \|\Phi_i(k, \omega)\Phi_i(-t, \theta_t\omega)K_i(\theta_t\omega)\varphi_i^*(t, \omega, \xi^i) - \varphi_i^*(k-t, \theta_t\omega, \varphi_i^*(t, \omega, \xi^i))\|_{\theta_k\omega} = \\
 & = \|\Phi_i(k-t, \hat{\omega})K_i(\hat{\omega})\hat{\xi}^i - \varphi_i^*(k-t, \hat{\omega}, \hat{\xi}^i)\|_{\theta_k\omega} = \\
 & = \|\Phi_i(-t, \theta_k\hat{\omega})\Phi_i(k, \hat{\omega})K_i(\hat{\omega})\hat{\xi}^i - \varphi_i^*(-t, \theta_k\hat{\omega}, \varphi_i^*(k, \hat{\omega}, \hat{\xi}^i))\|_{\theta_k\omega} \leq \\
 & \leq \|\Phi_i(-t, \theta_k\hat{\omega})(\Phi_i(k, \hat{\omega})K_i(\hat{\omega})\hat{\xi}^i - \varphi_i^*(k, \hat{\omega}, \hat{\xi}^i))\|_{\theta_{-t}\theta_k\hat{\omega}} + \\
 & \quad + \underbrace{\|(\Phi_i(-t, \theta_k\hat{\omega}) - \varphi_i^*(-t, \theta_k\hat{\omega}, \cdot))\varphi_i^*(k, \hat{\omega}, \hat{\xi}^i)\|_{\theta_{-t}\theta_k\hat{\omega}}}_{= -\Psi_i^*(-t, \theta_k\hat{\omega}, \cdot)} \leq \\
 & \leq \max\{\alpha_i, -, 1\} \cdot \|\Phi_i(k, \hat{\omega})K_i(\hat{\omega})\hat{\xi}^i - \varphi_i^*(k, \hat{\omega}, \hat{\xi}^i)\|_{\theta_k\hat{\omega}} + M,
 \end{aligned}$$

wobei außerdem (3.14) und (K2) verwendet wurden, und die Diskussion um (3.30) impliziert die Beschränktheit der Menge

$$\{\|\Phi_i(k, \omega)K_{i,t}(\omega)\xi^i - \varphi_i^*(k, \omega, \xi^i)\|_{\theta_k\omega} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Wegen der bereits oben erwähnten Eindeutigkeit von  $K_i(\omega)\xi^i$  gilt schließlich die Beziehung  $K_{i,t}(\omega)\xi^i = K_i(\omega)\xi^i$ , und somit

$$K_i(\theta_t\omega) \circ \varphi_i^*(t, \omega) = \Phi_i(t, \omega) \circ K_i(\omega) \quad \text{für alle } t \in [-1, 0], \omega \in \tilde{\Omega}.$$

Wie im Beweis von Satz 3.3.2 kann nun abschließend mittels (3.29) auf die Gültigkeit der letzten Identität für alle  $t \in \mathbb{R}$  geschlossen werden. Damit ist alles gezeigt.  $\diamond$

Völlig analog läßt sich auch der verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman auf den kontinuierlichen Fall übertragen. Wieder erreicht man im nicht hyperbolischen Fall im allgemeinen nur eine teilweise Linearisierung.

**Satz 3.3.5** *Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ , sowie darüber ein meßbares kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Fixpunkt 0. Darüber hinaus existiere ein meßbares lineares kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\Phi$ , so daß mit*

$$\varphi(t, \omega, x) = \Phi(t, \omega)x + \Psi(t, \omega, x)$$

die Voraussetzungen (K1) und (K2) erfüllt sind. Gibt es dann ein  $i \in \{1, \dots, p\}$  mit  $\lambda_i = 0$ , d.h. ist das lineare zufällige dynamische System  $\Phi$  nicht hyperbolisch, so existiert eine meßbare Abbildung  $h : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Für beliebiges  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $h(\omega) := h(\omega, \cdot)$  ein Homöomorphismus auf dem  $\mathbb{R}^d$  mit  $h(\omega)0 = 0$ , und die Abbildung  $h(\cdot)^{-1}(\cdot) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist meßbar.
- (b) Für jedes  $\omega \in \tilde{\Omega}$  bildet die Abbildung  $h(\omega)$  beliebige  $\omega$ -Orbits von  $\varphi$  auf entsprechende  $\omega$ -Orbits des zufälligen dynamischen Systems  $\varphi^*(t, \omega, \xi) := \Phi(t, \omega)\xi + \Psi^*(t, \omega, \xi)$  ab, wobei die neue Nichtlinearität  $\Psi^*$  durch

$$\Psi^*(t, \omega, \xi) := (0, \dots, 0, \underbrace{\Psi_i(t, \omega, \pi^{i,i}(\omega, \xi^i))}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$$

definiert wird. Mit anderen Worten: Es gilt

$$\varphi(t, \omega, \xi) = h(\theta_t \omega)^{-1} \varphi^*(t, \omega, h(\omega) \xi)$$

für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

- (c) Für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $1 \leq i \leq j \leq p$  bildet die Abbildung  $h(\omega)$  die zufällige invariante Mannigfaltigkeit  $S^{i:j}(\omega)$  auf die direkte Summe  $E_i(\omega) \oplus \dots \oplus E_j(\omega)$  ab.

Im nicht hyperbolischen Fall sind also das nichtlineare zufällige dynamische System  $\varphi$  und das entkoppelte, teilweise lineare zufällige dynamische System  $\varphi^*$  topologisch äquivalent.

**Beweis:** Der Beweis kann analog zum Beweis des Satzes 3.3.4 geführt werden.  $\diamond$

Wie im diskreten Fall beschreibt auch jetzt die  $i$ -te Komponente  $\varphi_i^*$  von  $\varphi^*$  — die ja die einzige nichtlineare Komponente von  $\varphi^*$  ist — das Verhalten von  $\varphi$  auf der zufälligen Zentrumsmannigfaltigkeit  $S^{i:i}(\omega)$ .

Mit diesem Ergebnis ist die Herleitung *globaler Ergebnisse* für zufällige dynamische Systeme beendet. Im nächsten Abschnitt soll noch kurz auf *lokale Ergebnisse* eingegangen werden.

### 3.4 Lokale Ergebnisse

Bislang standen in dieser Arbeit stets globale Ergebnisse im Mittelpunkt des Interesses. Der Preis, den man dafür zu zahlen hat, ist natürlich groß: Die nichtlineare Störung des gegebenen linearen zufälligen dynamischen Systems mußte global Lipschitz-stetig sein, mit hinreichend kleiner Lipschitzkonstante. Für Anwendungen sind derartige Ergebnisse deshalb relativ nutzlos, denn nur in den seltensten Fällen wird das betrachtete zufällige dynamische System den benötigten Voraussetzungen genügen<sup>11</sup>.

Weicht man jedoch von der Forderung nach globalen Ergebnissen ab und begnügt sich mit lokalen Ergebnissen, so ist es — wie auch im deterministischen Fall — möglich, eine hinreichend große Klasse zufälliger dynamischer Systeme zu behandeln. Die dabei angewandte Vorgehensweise dürfte hinreichend bekannt sein: Ausgehend von einem gegebenen zufälligen dynamischen System  $\varphi$  mit Fixpunkt 0 (dies kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets annehmen) wird ein neues zufälliges dynamisches System  $\tilde{\varphi}$  konstruiert, das in einer zufälligen Nullumgebung mit  $\varphi$  übereinstimmt und darüber hinaus den gewünschten globalen Voraussetzungen genügt — und die globalen Resultate für  $\tilde{\varphi}$  liefern unmittelbar lokale Resultate für  $\varphi$ .

Die Konstruktion von  $\tilde{\varphi}$  soll zunächst für den diskreten Fall durchgeführt werden. Dazu wird das folgende Lemma benötigt.

**Lemma 3.4.1** Gegeben seien ein beliebiger Maßraum  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ , sowie eine meßbare Abbildung  $f : \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , so daß für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  die Abbildung  $f(\omega, \cdot)$  stetig ist mit  $f(\omega, 0) = 0$  und die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\|f(\omega, x) - f(\omega, y)\|}{\|x - y\|} = 0 \quad (3.31)$$

<sup>11</sup>Erschwerend kommt noch hinzu, daß die globale Lipschitzbedingung unter Verwendung von zufälligen Normen formuliert wurde.

gilt. Ferner sei  $\|\cdot\|_\omega$  eine zufällige Norm auf dem  $\mathbb{R}^d$ , die den Aussagen des Satzes 3.1.5(b) genügt, und  $L > 0$  eine beliebige Konstante. Dann gibt es meßbare Abbildungen  $\varrho: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $\tilde{f}: \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Definiert man eine zufällige Nullumgebung durch  $U(\omega) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < \varrho(\omega)\}$ , so ist die Identität

$$f(\omega, x) = \tilde{f}(\omega, x) \quad \text{für beliebige } \omega \in \tilde{\Omega} \quad \text{und } x \in U(\omega)$$

erfüllt.

- (b) Für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $x, y \in \mathbb{R}^d$  gelten die beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(\omega, x) - \tilde{f}(\omega, y)\|_{\theta_1, \omega} &\leq L\|x - y\|_\omega, \\ \|\tilde{f}(\omega, x)\|_{\theta_1, \omega} &\leq 1. \end{aligned}$$

**Beweis:** Sei  $B := B_1: \tilde{\Omega} \rightarrow [1, \infty)$  die meßbare Abbildung aus Satz 3.1.5(b) für  $\varepsilon = 1$ . Definiert man dann eine meßbare Abbildung  $L^*: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^+$  durch

$$L^*(\omega) := \frac{L}{eB(\omega)^2},$$

so ist wegen (3.31) und der vorausgesetzten Stetigkeit von  $f(\omega, \cdot)$  die Definition

$$\varrho^*(\omega) := \max\{\varepsilon \in (0, 1] : \|f(\omega, x) - f(\omega, y)\| \leq L^*(\omega)\|x - y\| \text{ für alle } \|x\| \leq \varepsilon, \|y\| \leq \varepsilon\}$$

zulässig, d.h. die angegebene Menge ist nicht leer und das Maximum existiert tatsächlich. Ferner erhält man für beliebige  $\alpha \in [0, 1]$  wegen der Meßbarkeit von  $f$  und  $L^*$  die Identität

$$\begin{aligned} \{\omega \in \tilde{\Omega} : \varrho^*(\omega) \geq \alpha\} &= \{\omega \in \tilde{\Omega} : \|f(\omega, x) - f(\omega, y)\| \leq L^*(\omega)\|x - y\| \\ &\quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|x\| \leq \alpha, \|y\| \leq \alpha\} = \\ &= \bigcap_{x, y \in \mathbb{Q}^d, \|x\| \leq \alpha, \|y\| \leq \alpha} \left\{ \omega \in \tilde{\Omega} : \frac{\|f(\omega, x) - f(\omega, y)\|}{L^*(\omega)} \leq \|x - y\| \right\} \in \tilde{\mathcal{F}}, \end{aligned}$$

d.h. die Abbildung  $\varrho^*: \tilde{\Omega} \rightarrow (0, 1]$  ist meßbar (vergleiche BAUER [11, p. 58]). Schließlich sei für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$

$$\varrho(\omega) := \min \left\{ \varrho^*(\omega), \frac{B(\omega)}{L} \right\} > 0,$$

und für  $\varepsilon > 0$  sei  $r_\varepsilon: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  die durch

$$r_\varepsilon(x) := \begin{cases} x & \text{für } \|x\| \leq \varepsilon \\ \frac{\varepsilon}{\|x\|}x & \text{für } \|x\| > \varepsilon \end{cases}$$

definierte radiale Retraktion, die bekanntlich global Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 1 ist. Definiert man jetzt die Abbildung  $\tilde{f}: \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mittels

$$\tilde{f}(\omega, x) := f(\omega, r_{\varrho(\omega)}(x)) \quad \text{für beliebige } \omega \in \tilde{\Omega}, x \in \mathbb{R}^d,$$

so ist  $\tilde{f}$  offensichtlich meßbar<sup>12</sup> und erfüllt (a). Darüber hinaus gelten für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $x, y \in \mathbb{R}^d$  auf Grund von Satz 3.1.5(b) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(\omega, x) - \tilde{f}(\omega, y)\|_{\theta_1\omega} &\leq B(\theta_1\omega) \|f(\omega, r_{\varrho(\omega)}(x)) - f(\omega, r_{\varrho(\omega)}(y))\| \leq \\ &\leq eB(\omega)L^*(\omega) \|r_{\varrho(\omega)}(x) - r_{\varrho(\omega)}(y)\| \leq \\ &\leq eB(\omega) \frac{L}{eB(\omega)^2} \|x - y\| \leq \\ &\leq L \|x - y\|_{\omega} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(\omega, x)\|_{\theta_1\omega} &\leq B(\theta_1\omega) \|f(\omega, r_{\varrho(\omega)}(x))\| \leq eB(\omega)L^*(\omega) \|r_{\varrho(\omega)}(x)\| \leq \\ &\leq \frac{L}{B(\omega)} \varrho(\omega) \leq 1. \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.  $\diamond$

Mit dem soeben bewiesenen Lemma kann als nächstes das zu Beginn dieses Abschnittes erwähnte diskrete zufällige dynamische System  $\tilde{\varphi}$  konstruiert werden.

**Satz 3.4.2** Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ , sowie darüber ein stetiges diskretes zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Fixpunkt 0. Darüber hinaus existiere ein lineares diskretes zufälliges dynamisches System  $\Phi$ , das der Voraussetzung (D1) vom Beginn des Abschnittes 3.2 genüge, und der mittels

$$\boxed{\varphi(k, \omega, x) = \Phi(k, \omega)x + \Psi(k, \omega, x)} \quad (3.32)$$

definierte nichtlineare Anteil  $\Psi$  erfülle für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  (mit  $\tilde{\Omega}$  wie in (D1) beziehungsweise in Satz 3.1.5) die Beziehung

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\|\Psi(1, \omega, x) - \Psi(1, \omega, y)\|}{\|x - y\|} = 0. \quad (3.33)$$

Dann gibt es eine meßbare Abbildung  $\varrho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  und ein stetiges diskretes zufälliges dynamisches System

$$\boxed{\tilde{\varphi}(k, \omega, x) = \Phi(k, \omega)x + \tilde{\Psi}(k, \omega, x)}$$

über  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ , das den Voraussetzungen (D1), (D2) vom Beginn des Abschnittes 3.2 genügt mit

$$\boxed{\varphi(k, \omega, x) = \tilde{\varphi}(k, \omega, x)} \quad (3.34)$$

für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$ ,  $x \in U(\omega)$  und  $k \in I_{\max}(\omega, x) := \{k_{\min}(\omega, x), \dots, k_{\max}(\omega, x)\}$ , wobei  $U(\omega)$  wie in Lemma 3.4.1(a) definiert ist, und

$$\begin{aligned} k_{\min}(\omega, x) &:= \inf\{k \in \mathbb{Z}_0^- : \varphi(k, \omega, x) \in U(\theta_k\omega) \text{ für alle } \kappa = k, \dots, 0\} \leq 0, \\ k_{\max}(\omega, x) &:= \sup\{k \in \mathbb{Z}_0^+ : \varphi(k, \omega, x) \in U(\theta_k\omega) \text{ für alle } \kappa = 0, \dots, k\} \geq 0 \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Man überzeugt sich leicht, daß die Abbildung  $r_{\varrho}(\cdot) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  meßbar ist.

gesetzt wird. Ferner gelten für jedes  $\omega \in \tilde{\Omega}$  die beiden Grenzwertaussagen

$$\lim_{x \rightarrow 0} k_{\min}(\omega, x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} k_{\max}(\omega, x) = \infty. \quad (3.35)$$

Diese beiden letzten Beziehungen implizieren insbesondere, daß zu jeder Wahl von  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $N \in \mathbb{N}$  eine Nullumgebung  $U_N(\omega) \subset \mathbb{R}^d$  existiert, so daß die Gleichheit in (3.34) für beliebige  $k \in \{-N, \dots, N\}$  und  $x \in U_N(\omega)$  erfüllt ist.

**Beweis:** Gemäß Lemma 3.2.1 ist  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$  gerade die Lösung des Anfangswertproblems

$$x_{k+1} = A(\theta_k \omega) x_k + f(\theta_k \omega, x_k) \quad , \quad x_0 = \xi, \quad (3.36)$$

mit  $A(\omega) := \Phi(1, \omega)$  und  $f(\omega, x) := \Psi(1, \omega, x)$ . Weiter erhält man, da  $\Phi$  der Voraussetzung (D1) genügt, die Abschätzung

$$\|A(\omega)^{-1}\|_{\theta_1 \omega, \omega} \leq \frac{1}{\alpha_{p,+}}, \quad (3.37)$$

für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$ . Sei nun  $L > 0$  wie in (D2) gewählt. Zur Konstruktion einer geeigneten Abbildung  $\tilde{f}$  wendet man zunächst Lemma 3.4.1 auf  $f|_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d}$  an, und setzt danach die dadurch entstehende Abbildung auf  $(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \times \mathbb{R}^d$  durch 0 fort. Des weiteren sei  $\varrho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  die von diesem Lemma garantierte, auf  $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$  konstant fortgesetzte Abbildung<sup>13</sup>. Definiert man dann für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $y \in \mathbb{R}^d$  einen Operator  $T_{\omega, y} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  durch

$$T_{\omega, y}(x) := A(\omega)^{-1} y - A(\omega)^{-1} \tilde{f}(\omega, x),$$

so folgt wie im Beweis von Lemma 1.2.6 (unter Verwendung von (3.37) und der Tatsache, daß  $L$  wie in (D2) gewählt wurde), daß das Anfangswertproblem

$$x_{k+1} = A(\theta_k \omega) x_k + \tilde{f}(\theta_k \omega, x_k) \quad , \quad x_0 = \xi \quad (3.38)$$

für jede Wahl von  $\omega \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  eine auf ganz  $\mathbb{Z}$  definierte, eindeutig bestimmte Lösung  $\tilde{\varphi}(\cdot, \omega, \xi)$  besitzt, und wegen Lemma A.1.1 und des gleichmäßigen Kontraktionsprinzips ist die Abbildung  $\tilde{\varphi}$  meßbar, sowie stetig bezüglich der letzten Variablen. Ferner folgt aus Lemma 3.2.1 sofort, daß  $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z} \times \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein stetiges diskretes zufälliges dynamisches System ist, und Lemma 3.4.1(a) zeigt unmittelbar, daß für beliebiges  $\omega \in \tilde{\Omega}$  die  $\omega$ -Lösungen von (3.36) und (3.38) auf  $I_{\max}(\omega, \xi)$  übereinstimmen. Definiert man schließlich den nichtlinearen Anteil  $\tilde{\Psi}$  wie in der Formulierung des Satzes, so liefert Lemma 3.4.1(b) unter Beachtung der Identität

$$\tilde{\Psi}(1, \omega, x) = \tilde{\varphi}(1, \omega, x) - \Phi(1, \omega) x = \tilde{f}(\omega, x)$$

die Gültigkeit von (D2). Zum vollständigen Beweis des Satzes 3.4.2 müssen also nur noch die in (3.35) enthaltenen Beziehungen verifiziert werden. Aus Symmetriegründen soll nur der zweite Grenzwert berechnet werden. Seien dazu  $n \in \mathbb{N}$  und  $\omega \in \tilde{\Omega}$  beliebig, aber fest. Dann existiert wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Abbildungen  $\varphi(k, \omega, \cdot)$  — unter Beachtung von  $\varphi(k, \omega, 0) = 0$  — ein  $\varepsilon > 0$ , so daß für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|x\| < \varepsilon$  und alle  $\kappa = 0, \dots, n$  die Abschätzungen

$$\|\varphi(\kappa, \omega, x)\| < \varrho(\theta_\kappa \omega)$$

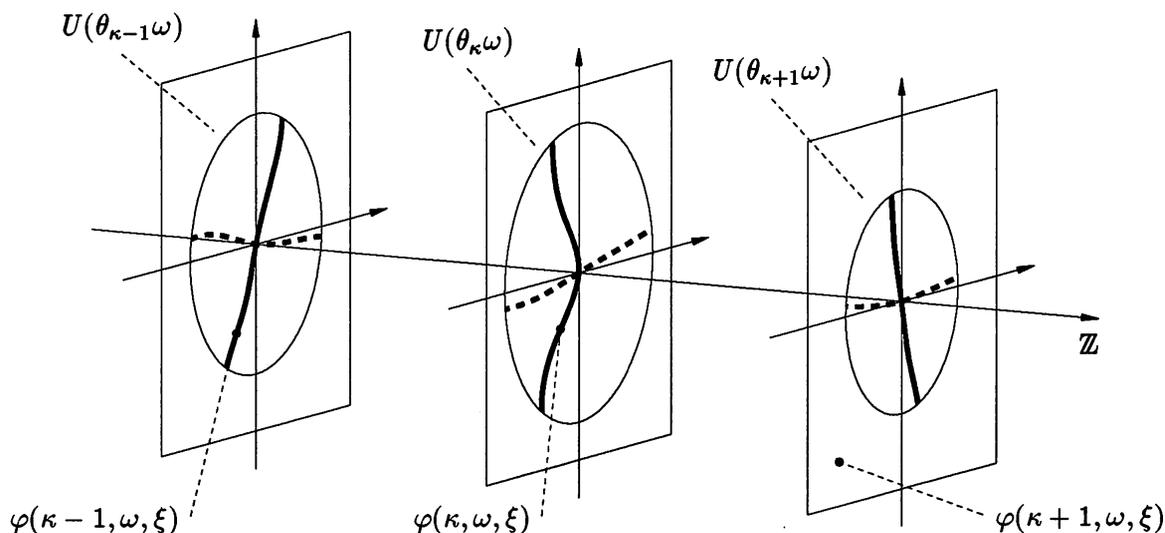


Abbildung 3.10: Lokale zufällige invariante Mannigfaltigkeiten

erfüllt sind, d.h. für beliebige  $x \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|x\| < \varepsilon$  gilt  $k_{\max}(\omega, x) \geq n$ . Daraus folgt bereits die Behauptung.  $\diamond$

Mit dem soeben bewiesenen Satz können nun leicht lokale Ergebnisse für stetige diskrete zufällige dynamische Systeme  $\varphi$  hergeleitet werden, deren nichtlinearer Anteil die in Satz 3.4.2 angegebene Grenzwertbeziehung erfüllt<sup>14</sup>. Man wendet dazu einfach die Resultate des Abschnittes 3.2 auf das neue zufällige dynamische System  $\tilde{\varphi}$  an, und überträgt die ‐auf  $U(\omega)$  eingeschränkten‐ Aussagen auf das gegebene zufällige dynamische System  $\varphi$ . Genauer heißt dies etwa, daß ein  $\omega$ -Orbit  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$  nur so lange in der (lokalen) zufälligen invarianten Mannigfaltigkeit  $\tilde{\mathcal{S}}^{i,j}(\omega) \cap U(\omega)$  verläuft<sup>15</sup>, bis er die zufällige Umgebung  $U(\omega)$  verläßt, d.h. die Inklusion

$$\varphi(k, \omega, \xi) \in \tilde{\mathcal{S}}^{i,j}(\theta_k \omega) \cap U(\theta_k \omega)$$

gilt für alle  $k \in I_{\max}(\omega, \xi)$ . (Man vergleiche dazu auch Abbildung 3.10. In der dortigen Situation ist  $\kappa = k_{\max}(\omega, \xi) < \infty$ .) Analog gilt im Satz von Hartman-Grobman die Identität

$$\varphi(k, \omega, \xi) = h(\theta_k \omega)^{-1} \Phi(k, \omega) h(\omega) \xi$$

im allgemeinen nur für  $k \in I_{\max}(\omega, \xi)$ , mit  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $\xi \in U(\omega)$  — und die in (3.35) enthaltenen Beziehungen zeigen, daß das Gültigkeitsintervall  $I_{\max}(\omega, \xi)$  um so größer wird, je näher  $\xi$  bei 0 liegt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß für stetige diskrete zufällige dynamische Systeme  $\varphi$  der Form (3.32) mit Fixpunkt 0, deren linearer Anteil  $\Phi$  den Voraussetzungen des multiplikativen Ergodensatzes 3.1.3, und deren nichtlinearer Anteil  $\Psi$  der Grenzwertbeziehung (3.33)

<sup>13</sup> Damit sind die Abbildungen  $\varrho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $\tilde{f}: \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  offensichtlich meßbar.

<sup>14</sup> Ist das betrachtete zufällige dynamische System etwa differenzierbar von der Klasse  $C^1$ , so ist diese Bedingung trivialerweise erfüllt, sofern nur das lineare zufällige dynamische System als  $\Phi(k, \omega) := D\varphi(k, \omega, 0)$  gewählt wird. Dabei bezeichnet  $D\varphi(k, \omega, 0)$  die Jacobi-Matrix der Abbildung  $\varphi(k, \omega)$  im Ursprung.

<sup>15</sup> Dabei sei  $\tilde{\mathcal{S}}^{i,j}(\omega)$  eine von Satz 3.2.3 garantierte globale zufällige invariante Mannigfaltigkeit für das zufällige dynamische System  $\tilde{\varphi}$ .

genügt, eine zufriedenstellende lokale Linearisierungstheorie zur Verfügung steht. Man transformiert  $\varphi$  zunächst unter Beachtung des Satzes 3.1.9 in ein neues zufälliges dynamisches System  $\varphi^*$ , dessen linearer Anteil in Blockdiagonalgestalt vorliegt, und dessen nichtlinearer Anteil offensichtlich ebenfalls der Beziehung (3.33) genügt. Anschließend erhält man mittels Satz 3.4.2 die gewünschten lokalen Ergebnisse für  $\varphi^*$ , die dann durch Rücktransformation leicht auf  $\varphi$  übertragen werden können<sup>16</sup>.

So einfach ist die Situation im kontinuierlichen Fall dagegen leider nicht. Betrachtet man nämlich noch einmal den Beweis des letzten Satzes, so fällt auf, daß zur Konstruktion des neuen zufälligen dynamischen Systems  $\tilde{\varphi}$  zunächst der nichtlineare Anteil des entsprechenden Erzeugers — d.h. der zufälligen Differenzgleichung (3.36) — abgeschnitten wurde, und mit dem so entstandenen neuen Erzeuger wurde schließlich  $\tilde{\varphi}$  generiert. Es ist somit nicht allzu überraschend, daß auch im kontinuierlichen Fall das neue zufällige dynamische System  $\tilde{\varphi}$  durch eine Manipulation am zugehörigen infinitesimalen Erzeuger generiert werden muß<sup>17</sup>. Wie bereits zu Beginn des Abschnittes 3.3 erwähnt wurde, gibt es im kontinuierlichen Fall aber zwei Arten derartiger Erzeuger — stochastische und zufällige Differentialgleichungen. Und wieder sind es die stochastischen Differentialgleichungen, die mit den üblichen Techniken nicht behandelt werden können. Schneidet man nämlich den nichtlinearen Anteil einer  $\varphi$  erzeugenden stochastischen Differentialgleichung ähnlich wie in Lemma 3.4.1 ab, so entstehen durch die Verwendung (nicht-adaptierter!) zufälliger Normen Objekte, die im Rahmen der existierenden stochastischen Integrationstheorie nicht weiter verwendbar sind.

Dagegen ist die Lage bei den zufälligen Differentialgleichungen angenehmer — und ihnen ist der Rest dieses Abschnittes gewidmet. Zunächst sollen Bedingungen angegeben werden, unter denen eine zufällige Differentialgleichung ein stetiges beziehungsweise sogar differenzierbares zufälliges dynamisches System erzeugt. Dieses Resultat ist den Arbeiten ARNOLD [2, 3] entnommen, in denen auch weitere Ergebnisse zum Zusammenhang zwischen zufälligen dynamischen Systemen und zufälligen Differentialgleichungen enthalten sind.

**Satz 3.4.3** *Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$  ein beliebiges ergodisches metrisches dynamisches System und  $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine meßbare Abbildung, die eine der beiden folgenden Eigenschaften besitzt:*

- (a)  *$f(\omega, \cdot)$  ist stetig für beliebige  $\omega \in \Omega$ , und für jede kompakte Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^d$  ist die Inklusion*

$$\|f(\omega, \cdot)\|_{0,1;K} := \sup_{x \in K} \|f(\omega, x)\| + \sup_{x, y \in K, x \neq y} \frac{\|f(\omega, x) - f(\omega, y)\|}{\|x - y\|} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

*erfüllt.*

- (b)  *$f(\omega, \cdot)$  ist für beliebiges  $\omega \in \Omega$  stetig differenzierbar, und für jede kompakte Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^d$  ist die Inklusion*

$$\|f(\omega, \cdot)\|_{1,0;K} := \sup_{x \in K} \|f(\omega, x)\| + \sum_{i=1}^d \sup_{x \in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\omega, x) \right\| \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

*erfüllt.*

<sup>16</sup>Diese Vorgehensweise wird im abschließenden Abschnitt 3.5 noch etwas genauer ausgeführt. Man vergleiche dazu auch Satz 3.5.1.

<sup>17</sup>Ideal wäre natürlich, wenn man das neue System  $\tilde{\varphi}$  direkt, d.h. ohne Rückgriff auf einen infinitesimalen Erzeuger konstruieren könnte. Es ist jedoch zur Zeit — selbst im deterministischen Fall — noch nicht klar, wie dies geschehen sollte.

Des weiteren gelte die Abschätzung

$$\|f(\omega, x)\| \leq a(\omega)\|x\| + b(\omega)$$

für beliebige  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ , mit  $a, b \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Dann gibt es eine  $\theta_t$ -invariante Menge  $\hat{\Omega} \in \mathcal{F}$  mit  $\mathbb{P}(\hat{\Omega}) = 1$ , so daß — nachdem man  $f$  außerhalb von  $\hat{\Omega}$  mittels  $f(\omega, \cdot) := 0$  undefiniert hat — die maximale Lösung  $\varphi(t, \omega, x)$  des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(\theta_t \omega, x) \quad , \quad x(0) = x$$

entweder ein

- (a) stetiges zufälliges dynamisches System, oder ein
- (b) differenzierbares zufälliges dynamisches System der Klasse  $C^1$

auf dem  $\mathbb{R}^d$  über  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$  erzeugt.

**Beweis:** Der Beweis dieses Satzes kann in ARNOLD [2, Theorem 2.15] gefunden werden.  $\diamond$

Nach diesen Vorbereitungen soll nun ein kontinuierliches Analogon zu Satz 3.4.2 formuliert und bewiesen werden — und die auf der Hand liegende Vorgehensweise wäre natürlich, von dem gegebenen zufälligen dynamischen System  $\varphi$  zu der erzeugenden zufälligen Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(\theta_t \omega)x + f(\theta_t \omega, x) \tag{3.39}$$

überzugehen, den nichtlinearen Anteil  $f$  des Erzeugers mittels Lemma 3.4.1 abzuschneiden, um damit schließlich das gewünschte zufällige dynamische System  $\tilde{\varphi}$  zu konstruieren. Dabei ergibt sich jedoch das folgende Problem. Die beiden zufälligen dynamischen Systeme  $\varphi$  und  $\tilde{\varphi}$  stimmen gemäß Konstruktion nur auf der zufälligen Nullumgebung  $U(\omega)$  überein, d.h. die Identität

$$\varphi(t, \omega, x) = \tilde{\varphi}(t, \omega, x)$$

gilt nur für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$ ,  $x \in U(\omega)$  und  $t \in I_{\max}(\omega, x) := (t_{\min}(\omega, x), t_{\max}(\omega, x))$ , mit

$$\begin{aligned} t_{\min}(\omega, x) &:= \inf\{t \in \mathbb{R}_0^- : \|\varphi(\tau, \omega, x)\| < \varrho(\theta_\tau \omega) \text{ für alle } t \leq \tau \leq 0\} \leq 0, \\ t_{\max}(\omega, x) &:= \sup\{t \in \mathbb{R}_0^+ : \|\varphi(\tau, \omega, x)\| < \varrho(\theta_\tau \omega) \text{ für alle } 0 \leq \tau \leq t\} \geq 0. \end{aligned}$$

Dabei zeigt die in Lemma 3.4.1 angegebene Konstruktion von  $\varrho(\omega)$ , daß die Abbildung  $f(\omega, \cdot)$  für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  auf der Menge  $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq \varrho(\omega)\}$  global Lipschitz-stetig ist, mit der von  $\omega$  unabhängigen Lipschitzkonstanten  $L^{18}$ . Im vorliegenden kontinuierlichen Fall wäre es dann aber durchaus möglich, daß für ein gewisses  $\omega \in \tilde{\Omega}$  die Identität

$$\inf_{-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon} \varrho(\theta_t \omega) = 0 \quad \text{für beliebige } \varepsilon > 0$$

<sup>18</sup>Gemäß dem Beweis von Lemma 3.4.1 ist die Ungleichung  $0 < \varrho(\omega) \leq \varrho^*(\omega)$  erfüllt, wobei  $\varrho^*(\omega)$  für jede Wahl von  $\omega \in \tilde{\Omega}$  das maximale  $\varepsilon \in (0, 1]$  ist, für das die Abbildung  $f(\omega, \cdot)$  auf der Umgebung  $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq \varepsilon\}$  global Lipschitz-stetig ist, mit der Lipschitzkonstanten  $\frac{L}{\varepsilon B(\omega)^2}$ . Wegen  $\frac{L}{\varepsilon B(\omega)^2} < L$  folgt daraus die Behauptung.

gilt<sup>19</sup>, d.h. jeder  $\omega$ -Orbit  $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$  würde sofort die zufällige Umgebung  $U(\omega)$  verlassen — und da man in der Praxis nicht ohne weiteres überprüfen kann, für welche  $\omega$  diese Situation eintritt, wären die so erhaltenen “lokalen Ergebnisse” für das zufällige dynamische System  $\varphi$  ziemlich nutzlos.

Glücklicherweise läßt sich dieses Problem relativ leicht aus der Welt schaffen. Der entscheidende Schritt in diese Richtung ist das nun folgende Lemma, das die in Lemma 3.4.1 angegebene Abschneidetechnik in geeigneter Weise verfeinert. Im Gegensatz zur dortigen Vorgehensweise wird nun die in Lemma 3.4.1(b) auftauchende, von  $\omega$  unabhängige Lipschitzkonstante  $L$  durch eine von  $\omega$  abhängige Lipschitzkonstante  $L(\omega)$  ersetzt, die “im Mittel” hinreichend klein ist.

**Lemma 3.4.4** *Gegeben seien ein metrisches dynamisches System  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ , sowie eine meßbare Abbildung  $f : \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , so daß für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  die Abbildung  $f(\omega, \cdot)$  stetig ist mit  $f(\omega, 0) = 0$ , die Grenzwertbeziehung*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\|f(\omega, x) - f(\omega, y)\|}{\|x - y\|} = 0 \tag{3.40}$$

gilt, und für ein  $c > 0$  die Inklusion

$$\sup_{\|x\| \leq c, \|y\| \leq c, x \neq y} \frac{\|f(\omega, x) - f(\omega, y)\|}{\|x - y\|} \in L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}) \tag{3.41}$$

erfüllt ist. Des weiteren sei  $\|\cdot\|_\omega$  eine zufällige Norm auf dem  $\mathbb{R}^d$ , die den Aussagen des Satzes 3.1.5(b) genügt, und  $L_0 > 0$  sei eine beliebige Konstante. Dann gibt es meßbare Abbildungen  $\varrho : \tilde{\Omega} \rightarrow (0, c]$ ,  $L : \tilde{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  und  $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , sowie eine  $\theta_t$ -invariante Menge  $\hat{\Omega} \in \tilde{\mathcal{F}}$  mit  $\tilde{\mathbb{P}}(\hat{\Omega}) = 1$ , so daß folgendes gilt:

(a) *Definiert man eine zufällige Nullumgebung durch  $U(\omega) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < \varrho(\omega)\}$ , so ist die Identität*

$$f(\omega, x) = \tilde{f}(\omega, x) \quad \text{für beliebige } \omega \in \hat{\Omega} \quad \text{und } x \in U(\omega)$$

*erfüllt, und für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega} \setminus \hat{\Omega}$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt  $\tilde{f}(\omega, x) = 0$ .*

(b) *Für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $x, y \in \mathbb{R}^d$  gelten die beiden Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(\omega, x) - \tilde{f}(\omega, y)\|_\omega &\leq L(\omega)\|x - y\|_\omega, \\ \|\tilde{f}(\omega, x)\|_\omega &\leq L(\omega)c, \end{aligned}$$

---

<sup>19</sup>Gilt etwa zum Beispiel  $f(\theta_t \omega, x) = g(t, x)$  mit  $g(t, x) := \frac{tx^2}{t^2+x^2}$  für beliebige  $(t, x) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  und  $g(0, 0) := 0$ , so liefert die Definition

$$\begin{aligned} \tilde{q}(t) &:= \max\{\varepsilon \in (0, 1] : |g(t, x) - g(t, y)| \leq L|x - y| \text{ für alle } |x| \leq \varepsilon, |y| \leq \varepsilon\} = \\ &= \max\{\varepsilon \in (0, 1] : \left|\frac{\partial g}{\partial x}(t, x)\right| \leq L \text{ für alle } |x| \leq \varepsilon\} \end{aligned}$$

für jede Wahl von  $L \in (0, \frac{9}{8\sqrt{3}})$ , unter Beachtung der Identität  $\frac{\partial g}{\partial x}(t, \frac{t}{\sqrt{3}}) = \frac{9}{8\sqrt{3}}$ , sofort die Ungleichung

$$\varrho(\theta_t \omega) \leq \tilde{q}(t) < \frac{|t|}{\sqrt{3}},$$

für beliebige  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

wobei darüber hinaus

$$\int_0^1 L(\theta_s \omega) ds \leq L_0$$

erfüllt ist.

(c) Für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$  gilt die Abschätzung

$$\inf_{a \leq t \leq b} \varrho(\theta_t \omega) > 0,$$

d.h. die Abbildung  $\varrho(\theta \cdot \omega)$  ist lokal von der 0 wegbeschränkt.

**Beweis:** Definiert man die Abbildung  $L^* : \tilde{\Omega} \times (0, c] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$  durch

$$L^*(\omega, \varepsilon) := \sup_{\|x\| \leq \varepsilon, \|y\| \leq \varepsilon, x \neq y} \frac{\|f(\omega, x) - f(\omega, y)\|}{\|x - y\|},$$

so überzeugt man sich leicht, daß  $L^*$  meßbar<sup>20</sup> und die Abbildung  $L^*(\omega, \cdot)$  monoton wachsend ist, für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$ . Des weiteren implizieren die Voraussetzungen (3.40) und (3.41) die Gültigkeit von

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L^*(\omega, \varepsilon) = 0 \quad \text{für beliebige } \omega \in \tilde{\Omega}, \quad (3.42)$$

sowie

$$L^*(\cdot, \varepsilon) \in L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}) \quad \text{für beliebige } \varepsilon \in (0, c].$$

Diese letzte Inklusion liefert — unter Verwendung von Lemma 2.14 in ARNOLD [2] — eine  $\theta_t$ -invariante Menge  $\hat{\Omega} \in \tilde{\mathcal{F}}$  mit  $\tilde{\mathbb{P}}(\hat{\Omega}) = 1$ , so daß die Abbildung  $L^*(\theta \cdot \omega, \varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$  für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $\varepsilon \in (0, c]$  lokal integrierbar ist.

Sei nun  $B := B_1 : \tilde{\Omega} \rightarrow [1, \infty)$  die meßbare Abbildung aus Satz 3.1.5(b). Dann ist die Abbildung  $B(\theta \cdot \omega)$  lokal beschränkt, und somit läßt sich mittels

$$L^{**}(\omega, \varepsilon) := \int_0^1 B(\theta_s \omega)^2 L^*(\theta_s \omega, \varepsilon) ds < \infty$$

eine meßbare Abbildung  $L^{**} : \hat{\Omega} \times (0, c] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definieren<sup>21</sup>, die die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

(i) Die Abbildung  $L^{**}(\omega, \cdot)$  ist monoton wachsend mit  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L^{**}(\omega, \varepsilon) = 0$ , für jede beliebige Wahl von  $\omega \in \hat{\Omega}$ .

(ii) Für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $\varepsilon \in (0, c]$  ist die Abbildung  $L^{**}(\theta \cdot \omega, \varepsilon)$  stetig.

<sup>20</sup> Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Abbildungen  $f(\omega, \cdot)$  genügt es offensichtlich, in der obigen Definition von  $L^*(\omega, \varepsilon)$  die Elemente  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{Q}^d$  zu wählen. Ist dann  $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$  eine Abzählung der Menge  $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^d : x \neq y\}$ , und definiert man meßbare Abbildungen  $L_n^* : \tilde{\Omega} \times (0, c] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  durch

$$L_n^*(\omega, \varepsilon) := \frac{\|f(\omega, x_n) - f(\omega, y_n)\|}{\|x_n - y_n\|} \cdot \chi_{\overline{B_\varepsilon(0)}}(x_n) \cdot \chi_{\overline{B_\varepsilon(0)}}(y_n),$$

so gilt abschließend  $L^*(\omega, \varepsilon) = \sup_{n \in \mathbb{N}} L_n^*(\omega, \varepsilon)$ , d.h. die Abbildung  $L^*$  ist meßbar.

<sup>21</sup> Die Meßbarkeit der Abbildung  $L^{**}$  ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 23.6 in BAUER [11].

Zum Beweis von (i) ist nur anzumerken, daß die Monotonie der Abbildung  $L^{**}(\omega, \cdot)$  eine unmittelbare Folgerung aus der bereits erwähnten Monotonie von  $L^*(\omega, \cdot)$  ist, und wegen

$$B(\theta_s \omega)^2 L^*(\theta_s \omega, \varepsilon) \leq B(\theta_s \omega)^2 L^*(\theta_s \omega, c) \quad \text{für alle } s \in [0, 1], \varepsilon \in (0, c]$$

und der lokalen Integrierbarkeit der Abbildung  $B(\theta_s \omega)^2 L^*(\theta_s \omega, c)$  folgt die geforderte Grenzwertbeziehung aus (3.42) und dem Satz von Lebesgue.

Die in (ii) behauptete Stetigkeit der Abbildung  $L^{**}(\theta_s \omega, \varepsilon)$  ist eine leichte Konsequenz aus der für beliebige  $t, s \in \mathbb{R}$  mit  $s \leq t < s + 1$  gültigen Identität

$$\begin{aligned} L^{**}(\theta_t \omega, \varepsilon) - L^{**}(\theta_s \omega, \varepsilon) &= \int_0^1 B(\theta_{\tau+t} \omega)^2 L^*(\theta_{\tau+t} \omega, \varepsilon) d\tau - \int_0^1 B(\theta_{\tau+s} \omega)^2 L^*(\theta_{\tau+s} \omega, \varepsilon) d\tau = \\ &= \int_t^{t+1} B(\theta_\tau \omega)^2 L^*(\theta_\tau \omega, \varepsilon) d\tau - \int_s^{s+1} B(\theta_\tau \omega)^2 L^*(\theta_\tau \omega, \varepsilon) d\tau = \\ &= \int_{s+1}^{t+1} B(\theta_\tau \omega)^2 L^*(\theta_\tau \omega, \varepsilon) d\tau - \int_s^t B(\theta_\tau \omega)^2 L^*(\theta_\tau \omega, \varepsilon) d\tau, \end{aligned}$$

da die rechte Seite für  $t - s \rightarrow 0$  offensichtlich gegen 0 konvergiert.

Nach diesen Vorbereitungen kann nun damit begonnen werden, die in der Formulierung des Lemmas erwähnte Abbildung  $\varrho$  zu konstruieren. Zu diesem Zweck muß zunächst noch eine meßbare Hilfsfunktion  $\varrho^* : \hat{\Omega} \rightarrow (0, c]$  durch

$$\varrho^*(\omega) := \sup\{\varepsilon \in (0, c] : L^{**}(\omega, \varepsilon) \leq L_0\}$$

definiert werden<sup>22</sup>, die die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

(iii) Für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$  ist die Ungleichung

$$\inf_{a \leq t \leq b} \varrho^*(\theta_t \omega) > 0$$

erfüllt.

(iv) Für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$  ist die Abbildung  $\varrho^*(\theta_s \omega)$  nach oben halbstetig auf  $\mathbb{R}$ .

Was den Beweis der Eigenschaft (iii) angeht, so existiert zunächst wegen der aus dem Satz von Lebesgue und (3.42) folgenden Grenzwertbeziehung

$$\int_a^{b+1} B(\theta_s \omega)^2 L^*(\theta_s \omega, \varepsilon) ds \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

ein  $\varepsilon_0 > 0$  mit  $\int_a^{b+1} B(\theta_s \omega)^2 L^*(\theta_s \omega, \varepsilon_0) ds \leq L_0$ , und damit gilt für beliebige  $t \in [a, b]$  die Abschätzung

$$L^{**}(\theta_t \omega, \varepsilon_0) = \int_t^{t+1} B(\theta_s \omega)^2 L^*(\theta_s \omega, \varepsilon_0) ds \leq \int_a^{b+1} B(\theta_s \omega)^2 L^*(\theta_s \omega, \varepsilon_0) ds \leq L_0.$$

<sup>22</sup> Wegen (i) ist die in der Definition von  $\varrho^*(\omega)$  auftauchende Menge nicht leer, und die Meßbarkeit der Abbildung  $\varrho^*$  folgt leicht aus der für beliebige  $\varepsilon \in (0, c]$  gültigen Identität

$$\{\omega \in \hat{\Omega} : \varrho^*(\omega) \geq \varepsilon\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \{\omega \in \hat{\Omega} : L^{**}(\omega, \frac{\varepsilon(n-1)}{n}) \leq L_0\} \in \mathcal{F},$$

unter Beachtung der Meßbarkeit von  $L^{**}(\cdot, \frac{\varepsilon(n-1)}{n})$ .

Dies impliziert aber schließlich für beliebige  $t \in [a, b]$  die Ungleichung  $\varrho^*(\theta_t \omega) \geq \varepsilon_0 > 0$ , womit die Aussage (iii) bereits bewiesen wäre.

Zum Beweis von (iv) seien o.B.d.A. zwei reelle Zahlen  $t, r \in \mathbb{R}$  mit  $\varrho^*(\theta_t \omega) < r \leq c$  gegeben. Ist nun  $\varepsilon \in (\varrho^*(\theta_t \omega), r)$  beliebig, aber fest, so gilt unter Beachtung der Definition von  $\varrho^*$  die Ungleichung  $L^{**}(\theta_t \omega, \varepsilon) > L_0$ . Wegen (ii) existiert dann aber eine Umgebung  $U$  von  $t$ , so daß für alle  $s \in U$  die Ungleichung  $L^{**}(\theta_s \omega, \varepsilon) > L_0$  erfüllt ist, und dies impliziert abschließend  $\varrho^*(\theta_s \omega) \leq \varepsilon < r$  für alle  $s \in U$ . Damit ist auch (iv) bewiesen.

Jetzt sind endlich alle Ergebnisse vorhanden, um die gesuchte Abbildung  $\varrho$  auf  $\hat{\Omega}$  durch

$$\varrho(\omega) := \frac{1}{2} \cdot \inf_{-1 \leq t \leq 0} \varrho^*(\theta_t \omega) > 0$$

definieren zu können. Zunächst soll die Meßbarkeit von  $\varrho$  verifiziert werden. Sei dazu  $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$  eine Abzählung der Menge  $[-1, 0] \cap \mathbb{Q}$ . Wegen der für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$  gültigen Identität

$$\varrho(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \inf_{n \in \mathbb{N}} \varrho^*(\theta_{t_n} \omega),$$

die eine leichte Folgerung aus (iv) ist<sup>23</sup>, ist  $\varrho$  das Infimum der abzählbar vielen meßbaren Abbildungen  $\varrho_n : \hat{\Omega} \rightarrow (0, c]$ , mit  $\varrho_n(\omega) := \frac{1}{2} \varrho^*(\theta_{t_n} \omega)$  — und somit meßbar.

Als nächstes soll die in (c) geforderte Abschätzung bewiesen werden. Gemäß (iii) existiert ein  $\varrho_0 > 0$  mit  $\varrho^*(\theta_t \omega) \geq \varrho_0$  für beliebige  $t \in [a - 1, b]$ . Dann ist aber für beliebige  $s \in [-1, 0]$  und  $t \in [a, b]$  die Abschätzung

$$\varrho^*(\theta_s \theta_t \omega) \geq \varrho_0$$

erfüllt, d.h. es gilt  $\varrho(\theta_t \omega) = \frac{1}{2} \inf_{-1 \leq s \leq 0} \varrho^*(\theta_s \theta_t \omega) \geq \frac{1}{2} \varrho_0 > 0$  für jedes  $t \in [a, b]$ , und gerade das war zu zeigen.

Zum Abschluß des Beweises von Lemma 3.4.4 müssen nur noch die in (a) und (b) enthaltenen Aussagen verifiziert werden. Sei dazu

$$\tilde{f}(\omega, x) := f(\omega, r_{\varrho(\omega)}(x)) \quad \text{für beliebige } \omega \in \hat{\Omega}, x \in \mathbb{R}^d,$$

mit der radialen Retraktion  $r_\varepsilon$  aus dem Beweis des Lemmas 3.4.1, und ferner

$$L(\omega) := B(\omega)^2 L^*(\omega, \varrho(\omega)) \quad \text{für beliebige } \omega \in \hat{\Omega}.$$

Dann sind die Abbildungen  $\tilde{f} : \hat{\Omega} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $L : \hat{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$  offensichtlich meßbar, und die in (a) enthaltenen Aussagen sind erfüllt, sofern man  $\tilde{f}$  auf  $(\hat{\Omega} \setminus \hat{\Omega}) \times \mathbb{R}^d$  durch 0, und die Abbildungen  $L$  und  $\varrho$  auf  $\hat{\Omega} \setminus \hat{\Omega}$  konstant fortsetzt.

Es bleibt also nur noch der Nachweis von (b). Zunächst implizieren die Definitionen von  $\tilde{f}$  und  $L^*$  die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(\omega, x) - \tilde{f}(\omega, y)\| &= \|f(\omega, r_{\varrho(\omega)}(x)) - f(\omega, r_{\varrho(\omega)}(y))\| \leq \\ &\leq L^*(\omega, \varrho(\omega)) \|r_{\varrho(\omega)}(x) - r_{\varrho(\omega)}(y)\| \leq \\ &\leq L^*(\omega, \varrho(\omega)) \|x - y\|, \end{aligned}$$

<sup>23</sup>Offensichtlich gilt  $2\varrho(\omega) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \varrho^*(\theta_{t_n} \omega) =: m$ . Angenommen, für ein  $\omega \in \hat{\Omega}$  gilt sogar die strenge Ungleichung. Dann existiert ein  $t \in [-1, 0] \setminus \mathbb{Q}$  mit  $\varrho^*(\theta_t \omega) < m$ , und (iv) liefert nun sofort ein  $t^* \in [-1, 0] \cap \mathbb{Q}$  in der Nähe von  $t$ , für das  $\varrho^*(\theta_{t^*} \omega) < m$  gilt — im Widerspruch zur Definition von  $m$ .

für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , und unter Beachtung von Satz 3.1.5(b) folgen daraus sofort die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(\omega, x) - \tilde{f}(\omega, y)\|_\omega &\leq B(\omega) \|f(\omega, r_{\varrho(\omega)}(x)) - f(\omega, r_{\varrho(\omega)}(y))\| \leq \\ &\leq B(\omega) L^*(\omega, \varrho(\omega)) \|x - y\| \leq \\ &\leq L(\omega) \|x - y\|_\omega \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(\omega, x)\|_\omega &\leq B(\omega) \|f(\omega, r_{\varrho(\omega)}(x))\| \leq B(\omega) L^*(\omega, \varrho(\omega)) \|r_{\varrho(\omega)}(x)\| \leq \\ &\leq L(\omega) c, \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Abschätzung die Beziehungen  $B(\omega) \geq 1$  und  $\|r_{\varrho(\omega)}(x)\| \leq \varrho(\omega) \leq c$  verwendet wurden.

Abschließend liefert die Definition von  $\varrho(\theta_s \omega)$  für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$ ,  $s \in [0, 1]$  und  $\tau \in [-1, 0]$  die Abschätzung

$$\varrho(\theta_s \omega) \leq \frac{1}{2} \varrho^*(\theta_\tau \theta_s \omega),$$

woraus mit  $\tau = -s$  die Ungleichung

$$\varrho(\theta_s \omega) \leq \frac{1}{2} \varrho^*(\omega) \quad \text{für beliebige } \omega \in \hat{\Omega}, s \in [0, 1]$$

folgt — und unter Beachtung der Monotonie von  $L^*(\omega, \cdot)$  und der Definition von  $\varrho^*$  folgt hieraus die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_0^1 L(\theta_s \omega) ds &= \int_0^1 B(\theta_s \omega)^2 L^*(\theta_s \omega, \varrho(\theta_s \omega)) ds \leq \\ &\leq \int_0^1 B(\theta_s \omega)^2 L^*(\theta_s \omega, \underbrace{\frac{1}{2} \varrho^*(\omega)}_{< \varrho^*(\omega)}) ds \leq L_0, \end{aligned}$$

für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$ . Damit ist alles bewiesen.  $\diamond$

Mit diesem Lemma kann nun das kontinuierliche Analogon zu Satz 3.4.2 bewiesen werden, und zwar für zufällige dynamische Systeme, die von einer zufälligen Differentialgleichung erzeugt werden.

**Satz 3.4.5** *Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ , sowie darüber ein stetiges kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\varphi$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , mit Fixpunkt 0, das von der zufälligen Differentialgleichung*

$$\boxed{\dot{x} = A(\theta_t \omega)x + f(\theta_t \omega, x)} \quad (3.43)$$

erzeugt wird. Dabei gelte  $A \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $f$  erfülle die in Satz 3.4.3 genannten Voraussetzungen (entweder (a) oder (b)), mit  $A : \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^d)$ ,  $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , und es gelte die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\|f(\omega, x) - f(\omega, y)\|}{\|x - y\|} = 0,$$

wie auch  $f(\omega, 0) = 0$  für beliebige  $\omega \in \Omega$ . Des weiteren genüge der von  $\dot{x} = A(\theta_t \omega)x$  erzeugte lineare Anteil  $\Phi$  von  $\varphi$  der Voraussetzung (K1) vom Beginn des Abschnittes 3.3. Dann gibt es eine  $\theta_t$ -invariante Menge  $\hat{\Omega} \in \mathcal{F}$  mit  $\mathbb{P}(\hat{\Omega}) = 1$ , sowie eine meßbare Abbildung  $\varrho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  und ein stetiges kontinuierliches zufälliges dynamisches System

$$\boxed{\tilde{\varphi}(t, \omega, x) = \Phi(t, \omega)x + \tilde{\Psi}(t, \omega, x)}$$

über  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ , das den beiden Voraussetzungen (K1) und (K2) vom Beginn des Abschnittes 3.3 genügt mit

$$\boxed{\varphi(t, \omega, x) = \tilde{\varphi}(t, \omega, x)} \quad (3.44)$$

für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$ ,  $x \in U(\omega)$  und  $t \in I_{\max}(\omega, x) := (t_{\min}(\omega, x), t_{\max}(\omega, x))$ , wobei  $U(\omega)$  wie in Lemma 3.4.4(a) definiert ist, und

$$\begin{aligned} t_{\min}(\omega, x) &:= \inf\{t \in \mathbb{R}_0^- : \varphi(\tau, \omega, x) \in U(\theta_\tau \omega) \text{ für alle } t \leq \tau \leq 0\} \leq 0, \\ t_{\max}(\omega, x) &:= \sup\{t \in \mathbb{R}_0^+ : \varphi(\tau, \omega, x) \in U(\theta_\tau \omega) \text{ für alle } 0 \leq \tau \leq t\} \geq 0 \end{aligned}$$

gesetzt wird. Ferner gelten für jedes  $\omega \in \hat{\Omega}$  die beiden Grenzwertaussagen

$$\lim_{x \rightarrow 0} t_{\min}(\omega, x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} t_{\max}(\omega, x) = \infty. \quad (3.45)$$

Diese beiden letzten Beziehungen implizieren insbesondere, daß zu jeder Wahl von  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $T \in \mathbb{R}^+$  eine Nullumgebung  $U_T(\omega) \subset \mathbb{R}^d$  existiert, so daß die Gleichheit in (3.44) für beliebige  $t \in (-T, T)$  und  $x \in U_T(\omega)$  erfüllt ist.

**Beweis:** Da der lineare Anteil  $\Phi$  des gegebenen zufälligen dynamischen Systems  $\varphi$  der Voraussetzung (K1) genügt, gibt es eine zufällige Norm  $\|\cdot\|_\omega$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ , sowie eine (ohne Beschränkung der Allgemeinheit positive) Konstante  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ , so daß für beliebige  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $t \in \mathbb{R}_0^+$  die Abschätzung

$$\|\Phi(t, \omega)\|_{|\omega, \theta_t \omega} \leq e^{\gamma t} \quad (3.46)$$

erfüllt ist<sup>24</sup>. Sei nun  $L_0 > 0$  so klein gewählt, daß die positive Konstante

$$e^\gamma (L_0 + L_0^2 e^{L_0}) > 0$$

der in (K2) geforderten Annahme genügt,  $\tilde{f}$  sei die zu  $L_0$  und  $f|_{\hat{\Omega} \times \mathbb{R}^d}$  korrespondierende Abbildung aus Lemma 3.4.4, die auf  $(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \times \mathbb{R}^d$  durch 0 fortgesetzt wird, und  $\varrho$  beziehungsweise  $L$  seien die dazu gehörenden Abbildungen, die auf  $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$  konstant fortgesetzt werden.

Man überzeugt sich leicht, daß dann die Abbildung  $A(\cdot) \cdot + \tilde{f}(\cdot, \cdot)$  allen Voraussetzungen des Satzes 3.4.3(a) genügt, d.h. diese Abbildung erzeugt ein stetiges kontinuierliches zufälliges dynamisches System  $\tilde{\varphi}$ <sup>25</sup>. Ferner erhält man wegen Lemma 3.4.4(a) sofort die Identität

$$\varphi(t, \omega, x) = \tilde{\varphi}(t, \omega, x) \quad \text{für beliebige } \omega \in \hat{\Omega}, x \in U(\omega), t \in I_{\max}(\omega, x).$$

<sup>24</sup>Genauer gesagt läßt sich  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  beliebig mit  $\gamma \geq \ln \alpha_{1,-}$  wählen.

<sup>25</sup>Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist dabei keine weitere Umdefinierung von  $\tilde{f}$  nötig — andernfalls geht man zu einem kleineren  $\hat{\Omega}$  über.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß der nichtlineare Anteil  $\tilde{\Psi}$  des neuen zufälligen dynamischen Systems  $\tilde{\varphi}$  die Bedingungen aus (K2) erfüllt, mit  $\hat{\Omega}$  an Stelle von  $\tilde{\Omega}$ . Sei dazu  $\tilde{\Phi}(t, s, \omega)$  die Übergangsabbildung der linearen zufälligen Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(\theta_t \omega)x .$$

Es läßt sich zeigen (man vergleiche dazu ARNOLD [2, Theorem 2.13]), daß dann die Identität  $\tilde{\Phi}(t, s, \omega) = \Phi(t - s, \theta_s \omega)$  gilt, die zusammen mit (3.46) die Abschätzung

$$\|\tilde{\Phi}(t, s, \omega)\|_{\theta_s \omega, \theta_t \omega} \leq e^{\gamma(t-s)} \quad \text{für beliebige } t \geq s, \omega \in \hat{\Omega} \quad (3.47)$$

impliziert. Da  $\tilde{\varphi}(\cdot, \omega, x)$  die globale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = A(\theta_t \omega)x + \tilde{f}(\theta_t \omega, x) \quad , \quad x(0) = x$$

ist, liefert die Formel der Variation der Konstanten (2.9) zunächst

$$\tilde{\varphi}(t, \omega, x) = \tilde{\Phi}(t, 0, \omega)x + \int_0^t \tilde{\Phi}(t, s, \omega) \tilde{f}(\theta_s \omega, \tilde{\varphi}(s, \omega, x)) ds ,$$

und damit schließlich

$$\tilde{\Psi}(t, \omega, x) = \int_0^t \tilde{\Phi}(t, s, \omega) \tilde{f}(\theta_s \omega, \tilde{\Phi}(s, 0, \omega)x + \tilde{\Psi}(s, \omega, x)) ds , \quad (3.48)$$

für beliebige  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ . Zusammen mit den letzten beiden Ungleichungen in Lemma 3.4.4(b) (etwa für  $c = 1$ ) und (3.47) ergibt diese Identität die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Psi}(t, \omega, x)\|_{\theta_t \omega} &\leq \int_0^t \|\tilde{\Phi}(t, s, \omega)\|_{\theta_s \omega, \theta_t \omega} \|\tilde{f}(\theta_s \omega, \tilde{\Phi}(s, 0, \omega)x + \tilde{\Psi}(s, \omega, x))\|_{\theta_s \omega} ds \leq \\ &\leq \int_0^t e^{\gamma(t-s)} L(\theta_s \omega) ds \leq e^{\gamma} \int_0^1 L(\theta_s \omega) ds \leq L_0 e^{\gamma} , \end{aligned}$$

für beliebige  $t \in [0, 1]$ ,  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ , d.h.  $\tilde{\Psi}$  erfüllt die in (K2) geforderte Beschränktheitsvoraussetzung. Des weiteren liefern die erste Ungleichung in Lemma 3.4.4(b), (3.47) und (3.48) für beliebige  $t \in [0, 1]$ ,  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Psi}(t, \omega, x) - \tilde{\Psi}(t, \omega, \bar{x})\|_{\theta_t \omega} &\leq \int_0^t \|\tilde{\Phi}(t, s, \omega)\|_{\theta_s \omega, \theta_t \omega} \|\tilde{f}(\theta_s \omega, \tilde{\Phi}(s, 0, \omega)x + \tilde{\Psi}(s, \omega, x)) - \\ &\quad - \tilde{f}(\theta_s \omega, \tilde{\Phi}(s, 0, \omega)\bar{x} + \tilde{\Psi}(s, \omega, \bar{x}))\|_{\theta_s \omega} ds \leq \\ &\leq \int_0^t e^{\gamma(t-s)} L(\theta_s \omega) (\|\tilde{\Phi}(s, 0, \omega)(x - \bar{x})\|_{\theta_s \omega} + \\ &\quad + \|\tilde{\Psi}(s, \omega, x) - \tilde{\Psi}(s, \omega, \bar{x})\|_{\theta_s \omega}) ds . \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Abkürzung  $\nu(t) := e^{-\gamma t} \|\tilde{\Psi}(t, \omega, x) - \tilde{\Psi}(t, \omega, \bar{x})\|_{\theta_t \omega}$  läßt sich die letzte Ungleichung folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} \nu(t) &\leq \int_0^t e^{-\gamma s} L(\theta_s \omega) \|\tilde{\Phi}(s, 0, \omega)\|_{\omega, \theta_s \omega} \|x - \bar{x}\|_{\omega} ds + \int_0^t L(\theta_s \omega) \nu(s) ds \leq \\ &\leq \|x - \bar{x}\|_{\omega} \int_0^t e^{-\gamma s} e^{\gamma s} L(\theta_s \omega) ds + \int_0^t L(\theta_s \omega) \nu(s) ds = \\ &= \|x - \bar{x}\|_{\omega} \int_0^t L(\theta_s \omega) ds + \int_0^t L(\theta_s \omega) \nu(s) ds . \end{aligned}$$

Eine Anwendung des Gronwall-Lemmas 2.1.2 impliziert nun zunächst die Abschätzung

$$\begin{aligned} \nu(t) &\leq \|x - \bar{x}\|_\omega \int_0^t L(\theta_s \omega) ds + \int_0^t \left( \|x - \bar{x}\|_\omega \int_0^s L(\theta_\sigma \omega) d\sigma \right) L(\theta_s \omega) e^{\int_s^t L(\theta_\sigma \omega) d\sigma} ds \leq \\ &\leq \left( L_0 + \int_0^t L_0 L(\theta_s \omega) e^{L_0 s} ds \right) \|x - \bar{x}\|_\omega \leq \\ &\leq (L_0 + L_0^2 e^{L_0}) \|x - \bar{x}\|_\omega, \end{aligned}$$

für beliebige  $t \in [0, 1]$ ,  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$ , und daraus folgt schließlich

$$\|\tilde{\Psi}(t, \omega, x) - \tilde{\Psi}(t, \omega, \bar{x})\|_{\theta_t \omega} = e^{\gamma t} \nu(t) \leq e^{\gamma} (L_0 + L_0^2 e^{L_0}) \|x - \bar{x}\|_\omega,$$

für beliebige  $t \in [0, 1]$ ,  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$  — und die zu Beginn dieses Beweises getroffene Wahl von  $L_0$  zeigt, daß  $\tilde{\Psi}$  tatsächlich den in (K2) geforderten Bedingungen genügt.

Zum vollständigen Beweis des Satzes müssen also nur noch die in (3.45) enthaltenen Grenzwertbeziehungen nachgeprüft werden. Seien dazu  $\omega \in \hat{\Omega}$  und  $T \in \mathbb{R}^+$  beliebig, aber fest. Gemäß Lemma 3.4.4(c) gilt dann zunächst

$$\varrho_0 := \inf_{t \in [-T, T]} \varrho(\theta_t \omega) > 0.$$

Des weiteren existiert wegen der Stetigkeit von  $\varphi(\cdot, \omega, \cdot)$  — unter Beachtung von  $\varphi(\cdot, \omega, 0) \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}$  — ein  $\varepsilon > 0$ , so daß für alle  $\xi \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|\xi\| < \varepsilon$  die Abschätzung

$$\|\varphi(t, \omega, \xi)\| < \varrho_0 \leq \varrho(\theta_t \omega) \quad \text{für jedes } t \in [-T, T]$$

erfüllt ist, d.h. für beliebige  $\xi \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|\xi\| < \varepsilon$  gilt  $t_{\min}(\omega, \xi) \leq -T$  und  $t_{\max}(\omega, \xi) \geq T$ . Damit ist alles bewiesen.  $\diamond$

Mit dem soeben bewiesenen Satz 3.4.5 ist es nun auch im kontinuierlichen Fall problemlos möglich, lokale Ergebnisse für zufällige dynamische Systeme, die von einer zufälligen Differentialgleichung erzeugt werden, zu erhalten.

Den Abschluß dieses Abschnittes bildet die folgende Bemerkung zur Blockdiagonalisierung linearer kontinuierlicher zufälliger dynamischer Systeme, die von einer linearen zufälligen Differentialgleichung erzeugt werden.

**Bemerkung 3.4.6** Der obige Satz 3.4.5 liefert lokale Ergebnisse für diejenigen zufälligen dynamischen Systeme, die von einer zufälligen Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = A(\theta_t \omega)x + f(\theta_t \omega, x)$$

erzeugt werden. Dabei wurde stets vorausgesetzt, daß das von  $\dot{x} = A(\theta_t \omega)x$  erzeugte lineare zufällige dynamische System  $\Phi$  in Blockdiagonalgestalt vorliegt, d.h. die Matrix  $A(\omega)$  muß Blockdiagonalgestalt besitzen. Während es jedoch im deterministischen Fall — wie auch im zu Beginn dieses Abschnittes behandelten diskreten zufälligen Fall — möglich ist, für jedes beliebige  $A$  die erforderliche Blockdiagonalgestalt mittels einer geeigneten Transformation herbeizuführen, bereitet dies im Fall der zufälligen Differentialgleichungen Probleme. Auf Grund von Satz 3.1.9 ist es zwar möglich, das zufällige dynamische System  $\Phi$  in ein lineares zufälliges

dynamisches System  $\Phi^*$  mit Blockdiagonalgestalt zu transformieren, doch im allgemeinen wird  $\Phi^*$  nicht mehr von einer zufälligen Differentialgleichung herrühren<sup>26</sup>. In gewissen Situationen ist die Entkopplung dennoch möglich, etwa falls

- $A$  von  $\omega$  unabhängig ist,
- $A(\theta_t\omega)$  periodisch in  $t$  ist, beziehungsweise
- das Lyapunov-Spektrum von  $\Phi$  einfach ist, d.h. falls  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$  gilt.

Näheres dazu kann man den beiden Arbeiten ARNOLD, XU [6, 7] entnehmen.  $\square$

### 3.5 Parameterabhängige zufällige dynamische Systeme

In diesem letzten Abschnitt des dritten Kapitels soll noch kurz auf Familien  $\varphi^\alpha$  zufälliger dynamischer Systeme eingegangen werden, d.h. auf zufällige dynamische Systeme, die von einem Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  abhängen. Genauer gesagt soll der (verallgemeinerte) Satz von Hartman-Grobman für derartige Familien formuliert und bewiesen werden. Die dabei zur Anwendung kommende Technik ist im deterministischen Fall, wie er etwa in RUELLE [36] behandelt wird, hinlänglich bekannt. Zur Herstellung der in den vergangenen Abschnitten behandelten Situation wird ein neues zufälliges dynamisches System  $\hat{\varphi}$  auf dem — um den Parameterraum  $\mathbb{R}^m$  erweiterten — Zustandsraum  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  mittels

$$\hat{\varphi}(t, \omega, (x, \alpha)) := (\varphi^\alpha(t, \omega, x), \alpha) \quad \text{für beliebige } t \in \mathbb{T}, \omega \in \Omega, (x, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$$

definiert. Auf dieses System lassen sich nun alle Ergebnisse dieser Arbeit anwenden — und speziell bei der Anwendung des (lokalen) verallgemeinerten Satzes von Hartman-Grobman erhält man das folgende Resultat.

**Satz 3.5.1** *Gegeben sei ein ergodisches metrisches dynamisches System  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}})$ , mit der Zeitmenge  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , sowie darüber eine Familie  $\varphi^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ , differenzierbarer zufälliger dynamischer Systeme der Klasse  $C^1$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  mit Fixpunkt  $0$ , die im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  von zufälligen Differentialgleichungen erzeugt sein sollen. Für beliebige  $t \in \mathbb{T}$  und  $\omega \in \Omega$  sei die Abbildung  $(x, \alpha) \mapsto \varphi^\alpha(t, \omega, x)$  von der Klasse  $C^1$  und die partiellen Ableitungen seien stetig bezüglich  $(t, x, \alpha)$ . Des weiteren bezeichne  $\Phi(t, \omega) := D\varphi^0(t, \omega, 0)$  die Jacobi-Matrix der Abbildung  $\varphi^0(t, \omega)$  im Ursprung und das lineare zufällige dynamische System  $\Phi$  genüge den Voraussetzungen des multiplikativen Ergodensatzes 3.1.3. Dann wird durch*

$$\hat{\varphi}(t, \omega, (x, \alpha)) := (\varphi^\alpha(t, \omega, x), \alpha)$$

für beliebige  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\omega \in \Omega$  und  $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ , ein differenzierbares zufälliges dynamisches System auf dem Raum  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  definiert, mit Fixpunkt  $(0, 0)$  und Linearisierung

$$\hat{\Phi}(t, \omega) := D\hat{\varphi}(t, \omega, (0, 0)) = \begin{pmatrix} \Phi(t, \omega) & 0 \\ 0 & id_{\mathbb{R}^m} \end{pmatrix}$$

<sup>26</sup> Wegen der in Satz 3.1.9 auftretenden Abbildung  $P(\theta_t\omega)$ , die ja nur meßbar ist, ist die Abbildung  $\Phi^*(\cdot, \omega)x$  nur in Ausnahmefällen absolutstetig.

wobei im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  noch vorausgesetzt sei, daß  $\hat{\Phi}$  blockdiagonalisierbar im Sinne von Bemerkung 3.4.6 ist. Dann gilt der folgende lokale Satz von Hartman-Grobman:

Es existieren eine  $\theta_t$ -invariante Menge  $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$  mit  $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$  und eine meßbare Abbildung  $h : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ , so daß die Abbildung  $h(\omega) := h(\omega, \cdot)$  für beliebige  $\omega \in \tilde{\Omega}$  ein Homöomorphismus auf dem  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  ist, und daß zu jeder Wahl von  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $T > 0$  eine Umgebung  $U_T(\omega)$  von  $(0, 0)$  existiert mit

$$\hat{\varphi}(t, \omega, (x, \alpha)) = h(\theta_t \omega)^{-1} \hat{\varphi}^*(t, \omega, h(\omega)(x, \alpha))$$

für beliebige  $(x, \alpha) \in U_T(\omega)$  und  $t \in \mathbb{T}$  mit  $|t| \leq T$ . Dabei bezeichnet  $\hat{\varphi}^*$  ein neues zufälliges dynamisches System auf dem  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ , das auf dem stabilen beziehungsweise instabilen Oseledets-Raum  $E^s(\omega) \times \{0\}$  beziehungsweise  $E^u(\omega) \times \{0\}$  mit  $\hat{\Phi}$  übereinstimmt<sup>27</sup>, und das auf dem zentralen Oseledets-Raum  $E^c(\omega) \times \mathbb{R}^m$  noch einen nichtlinearen Anteil enthält<sup>28</sup>, der das Verhalten auf der mindestens  $m$ -dimensionalen zufälligen Zentrumsmannigfaltigkeit von  $\hat{\varphi}$  beschreibt.

**Beweis:** Zum Beweis des Satzes müssen die Ergebnisse dieser Arbeit nur in geeigneter Weise kombiniert werden. Zunächst existiert wegen Satz 3.1.9 (im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ) beziehungsweise wegen Bemerkung 3.4.6 (im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ) eine meßbare Abbildung  $\hat{P} : \Omega \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$ , so daß durch

$$\tilde{\varphi}(t, \omega, (x, \alpha)) := \hat{P}(\theta_t \omega) \hat{\varphi}(t, \omega, \hat{P}(\omega)^{-1}(x, \alpha))$$

ein zufälliges dynamisches System auf dem  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  definiert wird, dessen linearer Anteil in Blockdiagonalgestalt vorliegt, und das allen Voraussetzungen des Satzes 3.4.2 (im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ) beziehungsweise des Satzes 3.4.5 (im Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ) genügt. In Verbindung mit dem verallgemeinerten Satz von Hartman-Grobman (Satz 3.2.8 beziehungsweise Satz 3.3.5) erhält man damit die Existenz von  $\tilde{\Omega}$  — wie auch einen zufälligen Homöomorphismus  $\tilde{h}(\omega)$ , so daß zu jeder Wahl von  $\omega \in \tilde{\Omega}$  und  $T > 0$  eine Umgebung  $\tilde{U}_T(\omega)$  von  $(0, 0)$  existiert, mit

$$\tilde{\varphi}(t, \omega, (x, \alpha)) = \tilde{h}(\theta_t \omega)^{-1} \tilde{\varphi}^*(t, \omega, \tilde{h}(\omega)(x, \alpha))$$

für beliebige  $(x, \alpha) \in \tilde{U}_T(\omega)$  und  $t \in [-T, T] \cap \mathbb{T}$ , mit einem neuen zufälligen dynamischen System  $\tilde{\varphi}^*$ , das entkoppelt und teilweise linear ist. Definiert man abschließend  $U_T(\omega) := \hat{P}(\omega)^{-1} \tilde{U}_T(\omega)$ ,

$$h(\omega) := \hat{P}(\omega)^{-1} \circ \tilde{h}(\omega) \circ \hat{P}(\omega)$$

und

$$\hat{\varphi}^*(t, \omega, (x, \alpha)) := \hat{P}(\theta_t \omega)^{-1} \tilde{\varphi}^*(t, \omega, \hat{P}(\omega)(x, \alpha)),$$

so folgen leicht die gewünschten Aussagen bezüglich  $\hat{\varphi}$ . Damit ist alles gezeigt.  $\diamond$

Der soeben bewiesene Satz 3.5.1 findet im Fall  $m = 1$  in der Arbeit ARNOLD, XU [8] Verwendung, in der gezeigt wird, daß das Verschwinden eines Lyapunov-Exponenten notwendig ist für die stochastische Bifurkation von einem Fixpunkt.

<sup>27</sup>Dabei bezeichnet  $E^s(\omega)$  den stabilen Oseledets-Raum von  $\Phi$ , d.h. die direkte Summe  $E_1(\omega) \oplus \dots \oplus E_p(\omega)$ , sofern etwa  $\lambda_{i-1} \geq 0 > \lambda_i$  gilt. Entsprechend ist  $E^u(\omega)$  der instabile Oseledets-Raum von  $\Phi$ , d.h. die direkte Summe der Oseledets-Räume zu positiven Lyapunov-Exponenten.

<sup>28</sup>Verschwindet etwa der  $j$ -te Lyapunov-Exponent von  $\Phi$ , so ist  $E^c(\omega) = E_j(\omega)$  — andernfalls gilt  $E^c(\omega) = \{0\}$ .

# Anhang A

## Hilfsmittel

### A.1 Fixpunktsätze und Meßbarkeit

In diesem Abschnitt sollen einige einfache Fixpunktsätze zusammengestellt werden, die im Verlauf der vorliegenden Arbeit mehrfach Verwendung finden. Den Anfang macht das folgende Lemma, das gewissermaßen ein “meßbares Analogon” zum allgemein bekannten gleichmäßigen Kontraktionsprinzip ist (man vergleiche etwa [41, p. 125]). Es zeigt, daß der vom Banachschen Fixpunktsatz garantierte, eindeutig bestimmte Fixpunkt einer parameterabhängigen Kontraktion meßbar von diesem Parameter abhängt, sofern dies auf die Kontraktion zutrifft.

**Lemma A.1.1** *Sei  $(A, \mathcal{A})$  ein beliebiger Meßraum und  $T : \mathbb{R}^d \times A \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine meßbare Abbildung, so daß  $T(\cdot, a)$  für jedes  $a \in A$  eine Kontraktion auf dem  $\mathbb{R}^d$  ist, bezüglich einer Norm  $\|\cdot\|_a$ . Bezeichnet dann  $t(a) \in \mathbb{R}^d$  den eindeutig bestimmten Fixpunkt von  $T(\cdot, a)$ , für  $a \in A$ , so ist die Abbildung  $t : A \rightarrow \mathbb{R}^d$  meßbar.*

**Beweis:** Definiert man rekursiv  $x_0(a) := 0$  für  $a \in A$  und  $x_{n+1}(a) := T(x_n(a), a)$  für beliebige  $a \in A$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ , so sind die Abbildungen  $x_n : A \rightarrow \mathbb{R}^d$  gemäß der obigen Voraussetzungen für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  meßbar. Des weiteren liefert der Banachsche Fixpunktsatz, unter Berücksichtigung der Äquivalenz aller Normen auf dem  $\mathbb{R}^d$ , für beliebige  $a \in A$  die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(a) = t(a).$$

Damit ist aber  $t$  als punktweiser Grenzwert einer Folge meßbarer Abbildungen ebenfalls meßbar.  $\diamond$

Gegenstand des nächsten Lemmas sind parameterabhängige Kontraktionen auf gewissen Funktionenräumen. Auch hier soll wieder die meßbare Abhängigkeit des vom Banachschen Fixpunktsatz garantierten Fixpunktes untersucht werden.

**Lemma A.1.2**  *$(A, \mathcal{A})$  und  $(P, \mathcal{P})$  seien beliebige Meßräume. Ferner sei eine Familie von Banachräumen  $B_p \subset \{\nu : A \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \nu \text{ ist meßbar}\}^1$ ,  $p \in P$ , gegeben, mit stetiger Auswertungsabbildung*

$$\left\{ \begin{array}{l} B_p \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \nu \mapsto \nu(a) \end{array} \right\},$$

---

<sup>1</sup>Wie bereits im ersten Lemma dieses Abschnittes wird im allgemeinen jeder Banachraum  $B_p$  mit einer eigenen Norm  $\|\cdot\|_p$  ausgestattet sein.

für alle  $p \in P$  und  $a \in A$ . Schließlich sei  $T_p : B_p \rightarrow B_p$ ,  $p \in P$ , eine Abbildungsfamilie, die den folgenden beiden Bedingungen genügt:

- (i) Für jedes  $p \in P$  ist die Abbildung  $T_p$  eine Kontraktion auf  $B_p$ .
- (ii) Für jede meßbare Abbildung  $\mu : A \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\mu(\cdot, p) \in B_p$  für alle  $p \in P$  ist die durch  $\hat{\mu}(a, p) := (T_p \mu(\cdot, p))(a)$  definierte Abbildung  $\hat{\mu} : A \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  ebenfalls meßbar.

Bezeichnet dann  $\nu^*(\cdot, p) \in B_p$  den eindeutig bestimmten Fixpunkt von  $T_p$ ,  $p \in P$ , so ist die Abbildung  $\nu^* : A \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  meßbar.

**Beweis:** Definiert man rekursiv mittels

$$\begin{aligned} \nu_0(a, p) &:= 0 && \text{für alle } a \in A, p \in P, \\ \nu_{n+1}(a, p) &:= (T_p \nu_n(\cdot, p))(a) && \text{für alle } a \in A, p \in P, n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

eine Folge von Abbildungen  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , so liefert (ii) für beliebige  $n \in \mathbb{N}_0$  die Meßbarkeit von  $\nu_n : A \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$ , sowie die Beziehung  $\nu_n(\cdot, p) \in B_p$  für alle  $p \in P$ . Darüber hinaus implizieren die Voraussetzung (i) und der Banachsche Fixpunktsatz für jedes  $p \in P$  die Identität

$$\nu^*(\cdot, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(\cdot, p) \quad \text{in } B_p.$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Auswertungsabbildungen gilt nun für beliebige  $a \in A$  und  $p \in P$  die Beziehung

$$\nu^*(a, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(a, p) \quad \text{in } \mathbb{R}^d,$$

d.h.  $\nu^*$  ist der punktweise Grenzwert einer Folge meßbarer Abbildungen — und somit selbst meßbar.  $\diamond$

Auch das nun folgende letzte Lemma dieses Abschnittes behandelt eine ähnliche Situation wie oben, untersucht aber die stetige Abhängigkeit von den Argumenten  $(a, p) \in A \times P$ .

**Lemma A.1.3** Seien  $A$  und  $P$  beliebige metrische Räume. Ferner sei ein Banachraum  $B \subset \{\nu : A \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \nu \text{ ist stetig}\}$  gegeben, so daß für alle  $\nu \in B$  und  $a \in A$  die Abschätzung

$$\|\nu(a)\| \leq c(a)\|\nu\|$$

erfüllt ist, mit einer lokal beschränkten Abbildung  $c : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Schließlich sei  $T_p : B \rightarrow B$ ,  $p \in P$ , eine Abbildungsfamilie, die den folgenden beiden Bedingungen genügt:

- (i) Für beliebige  $p \in P$  und  $\nu_1, \nu_2 \in B$  gilt die Abschätzung

$$\|T_p \nu_1 - T_p \nu_2\| \leq C \|\nu_1 - \nu_2\|,$$

wobei die reelle Konstante  $0 \leq C < 1$  unabhängig von  $p \in P$  ist. Mit anderen Worten: Die Abbildung  $T_p$  ist eine Kontraktion auf  $B$ , gleichmäßig in  $p \in P$ .

- (ii) Für jede stetige Abbildung  $\mu : A \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit

- $\mu(\cdot, p) \in B$  für alle  $p \in P$ ,
- $\{\|\mu(\cdot, p)\| : p \in P\}$  ist beschränkt,

gilt für die durch  $\hat{\mu}(a, p) := (T_p \mu(\cdot, p))(a)$  definierte Abbildung  $\hat{\mu} : A \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$ :

- $\hat{\mu}$  ist stetig,
- $\{\|\hat{\mu}(\cdot, p)\| : p \in P\}$  ist beschränkt.

Bezeichnet dann  $\nu^*(\cdot, p)$  den eindeutig bestimmten Fixpunkt der Kontraktion  $T_p$  für  $p \in P$ , so ist die Abbildung  $\nu^* : A \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig.

**Beweis:** Sei  $X$  der Vektorraum aller stetigen Abbildungen  $\mu : A \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

- $\mu(\cdot, p) \in B$  für alle  $p \in P$ ,
- die Menge  $\{\|\mu(\cdot, p)\| : p \in P\}$  ist beschränkt.

Es läßt sich leicht zeigen, daß  $X$  durch die Definition

$$\|\mu\| := \sup\{\|\mu(\cdot, p)\| : p \in P\} \quad , \quad \mu \in X$$

zum Banachraum wird<sup>2</sup>. Definiert man nun eine Abbildung  $T$  durch

$$(T\mu)(a, p) := (T_p \mu(\cdot, p))(a) \quad \text{für } a \in A, p \in P,$$

für beliebiges  $\mu \in X$ , dann ist gemäß der Voraussetzung (ii) die Abbildung  $T\mu$  für jedes  $\mu \in X$  in  $X$  enthalten, d.h. es gilt  $T : X \rightarrow X$ . Seien nun  $\mu_1, \mu_2 \in X$  beliebig. Dann liefert zunächst die Voraussetzung (i) für alle  $p \in P$  die Abschätzung

$$\|(T\mu_1)(\cdot, p) - (T\mu_2)(\cdot, p)\| \leq C\|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\| \leq C\|\mu_1 - \mu_2\|,$$

und weiter

$$\|T\mu_1 - T\mu_2\| \leq C\|\mu_1 - \mu_2\|.$$

Wegen  $0 \leq C < 1$  ist die Abbildung  $T$  eine Kontraktion auf  $X$  — mithin besitzt sie einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\mu^*$ . Gemäß Konstruktion der Abbildung  $T$  gilt aber für beliebiges  $p \in P$  die Identität  $\mu^*(\cdot, p) = T_p \mu^*(\cdot, p)$ , und somit  $\mu^* = \nu^*$ . Damit ist alles gezeigt.  $\diamond$

<sup>2</sup>Offensichtlich ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $X$ . Zum noch fehlenden Nachweis der Vollständigkeit von  $X$  sei  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Cauchy-Folge in  $X$ . Wegen der für beliebige  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $p \in P$  gültigen Beziehung

$$\|\mu_m(\cdot, p) - \mu_n(\cdot, p)\| \leq \|\mu_m - \mu_n\|$$

ist zunächst  $(\mu_n(\cdot, p))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $B$ , für jedes  $p \in P$ . Unter Verwendung der vorausgesetzten Vollständigkeit von  $B$  läßt sich dann mittels

$$\mu(\cdot, p) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\cdot, p) \in B$$

eine Abbildung  $\mu : A \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\mu(\cdot, p) \in B$  für  $p \in P$  definieren — und man verifiziert sofort, daß die Menge  $\{\|\mu(\cdot, p)\| : p \in P\}$  beschränkt ist. Unter Beachtung der für beliebige  $a \in A, p \in P$  und  $n, m \in \mathbb{N}$  gültigen Abschätzung

$$\|\mu_m(a, p) - \mu_n(a, p)\| \leq c(a)\|\mu_m(\cdot, p) - \mu_n(\cdot, p)\| \leq c(a)\|\mu_m - \mu_n\|$$

erkennt man abschließend leicht, daß zu beliebigem  $a_0 \in A$  eine Umgebung  $U \subset A$  existiert, so daß die Funktionenfolge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $U \times P$  gleichmäßig konvergiert — und somit ist  $\mu$  stetig.

## A.2 Ein Existenzsatz für zufällige Differentialgleichungen

Um die vorliegende Arbeit in sich möglichst geschlossen zu halten, soll in diesem zweiten Abschnitt des Anhangs ein globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz für parameterabhängige zufällige Differentialgleichungen bewiesen werden, der auf alle im zweiten Kapitel auftauchenden Gleichungen angewandt werden kann. Der Beweis orientiert sich dabei an einem entsprechenden Ergebnis der Arbeit [41, pp. 10ff].

**Satz A.2.1** *Gegeben seien ein nichtleeres Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , ein metrischer Raum  $P$ , sowie ein Meßraum  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Weiter seien  $f : I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $\ell, \ell_0 : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  meßbare Abbildungen, so daß für beliebige  $t \in I$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$  und  $p \in P$  die Abschätzungen*

$$\|f(t, \omega, x, p) - f(t, \omega, y, p)\| \leq \ell(t, \omega) \|x - y\| \quad (\text{A.1})$$

$$\|f(t, \omega, 0, p)\| \leq \ell_0(t, \omega) \quad (\text{A.2})$$

erfüllt sind<sup>3</sup>, die Abbildungen  $\ell(\cdot, \omega)$  und  $\ell_0(\cdot, \omega)$  lokal integrierbar sind, und die Abbildung  $f(t, \omega, x, \cdot)$  stetig ist. Dann besitzt die parameterabhängige zufällige Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, \omega, x, p) \quad (\text{A.3})$$

für beliebiges  $(\tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P$  genau eine Lösung  $\lambda(\cdot; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0) : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die der Anfangsbedingung  $x(\tau_0) = \xi_0$  genügt, zu den Parameterwerten  $\omega_0$  und  $p_0$ . Darüber hinaus ist die Abbildung  $\lambda : I \times I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$  meßbar und für beliebiges  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $\lambda(\cdot; \cdot, \omega, \cdot, \cdot)$  stetig.

**Beweis:** Offensichtlich genügt es, den Spezialfall eines kompakten Intervalles  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  zu betrachten. Sei nun  $X := C(I, \mathbb{R}^d)$  der Banachraum aller stetigen Abbildungen  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ , versehen mit der üblichen Norm  $\|\mu\| := \max\{\|\mu(t)\| : t \in I\}$ . Ferner sei die Abbildung

$$T : X \times I \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times P \rightarrow X$$

definiert durch

$$T(\mu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(t) := \xi_0 + \int_{\tau_0}^t f(s, \omega_0, \mu(s), p_0) ds,$$

für beliebige  $t \in I$ . Zunächst soll gezeigt werden, daß für beliebige  $\mu, \nu \in X$ ,  $t, \tau_0 \in I$ ,  $\omega_0 \in \Omega$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $p_0 \in P$  und  $n \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$\|T^n(\mu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(t) - T^n(\nu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(t)\| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_{\tau_0}^t \ell(s, \omega_0) ds \right|^n \|\mu - \nu\| \quad (\text{A.4})$$

erfüllt ist, wobei  $T^n(\cdot, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)$  die  $n$ -te Iterierte des Operators  $T(\cdot, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)$  bezeichnet (man vergleiche dazu [41, p. 126]).

<sup>3</sup>Die Aussagen des Satzes bleiben natürlich auch dann noch richtig, wenn diese Abschätzungen nur für Lebesgue-fast alle  $t \in I$  gelten.

<sup>4</sup>Die Existenz des Integrals folgt unter Beachtung der für beliebige  $s \in I$  gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f(s, \omega_0, \mu(s), p_0)\| &\leq \|f(s, \omega_0, \mu(s), p_0) - f(s, \omega_0, 0, p_0)\| + \|f(s, \omega_0, 0, p_0)\| \leq \\ &\leq \ell(s, \omega_0) \cdot \|\mu\| + \ell_0(s, \omega_0) \end{aligned}$$

unmittelbar aus der vorausgesetzten lokalen Integrierbarkeit von  $\ell(\cdot, \omega_0)$  und  $\ell_0(\cdot, \omega_0)$ .

Der Beweis dieser Abschätzung erfolgt durch vollständige Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  erhält man unter Verwendung von (A.1) leicht

$$\begin{aligned} & \|T(\mu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(t) - T(\nu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(t)\| \leq \\ & \leq \left| \int_{\tau_0}^t \|f(s, \omega_0, \mu(s), p_0) - f(s, \omega_0, \nu(s), p_0)\| ds \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\tau_0}^t \ell(s, \omega_0) \|\mu(s) - \nu(s)\| ds \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\tau_0}^t \ell(s, \omega_0) ds \right| \cdot \|\mu - \nu\|. \end{aligned}$$

Sei also (A.4) für  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen. Dann folgt für  $n + 1$  unter Verwendung von (A.1) zunächst die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|T^{n+1}(\mu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(t) - T^{n+1}(\nu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(t)\| = \\ & = \|T(T^n(\mu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0), \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(t) - T(T^n(\nu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0), \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(t)\| \leq \\ & \leq \left| \int_{\tau_0}^t \ell(s, \omega_0) \|T^n(\mu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(s) - T^n(\nu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(s)\| ds \right| \leq \\ & \leq \|\mu - \nu\| \cdot \left| \int_{\tau_0}^t \ell(s, \omega_0) \cdot \frac{1}{n!} \left| \int_{\tau_0}^s \ell(\sigma, \omega_0) d\sigma \right|^n ds \right|, \end{aligned}$$

und unter Beachtung der Identität

$$\left| \int_{\tau_0}^t \ell(s, \omega_0) \cdot \frac{1}{n!} \left| \int_{\tau_0}^s \ell(\sigma, \omega_0) d\sigma \right|^n ds \right| = \frac{1}{(n+1)!} \left| \int_{\tau_0}^t \ell(s, \omega_0) ds \right|^{n+1},$$

die eine leichte Folgerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für absolutstetige Funktionen ist (man vergleiche dazu etwa WALTER [40, Satz 9.23]), erhält man sofort die Gültigkeit der Abschätzung (A.4) für  $n + 1$ .

Sei nun  $\omega_0 \in \Omega$  beliebig, aber fest. Es soll gezeigt werden, daß dann die Abbildung  $T(\cdot, \cdot, \omega_0, \cdot, \cdot)$  stetig ist. Zunächst genügt es wegen der aus (A.4) für beliebige  $\mu, \nu \in X$  und  $(\tau, \xi, p) \in I \times \mathbb{R}^d \times P$  folgenden Abschätzung

$$\|T(\mu, \tau, \omega_0, \xi, p) - T(\nu, \tau, \omega_0, \xi, p)\| \leq \int_a^b \ell(s, \omega_0) ds \cdot \|\mu - \nu\|$$

offensichtlich, die Stetigkeit der Abbildung  $T(\mu_0, \cdot, \omega_0, \cdot, \cdot)$  für beliebiges  $\mu_0 \in X$  nachzuweisen (man vergleiche dazu auch Lemma A.2.5 in der Arbeit [41]). Diese folgt jedoch unter Beachtung der für beliebige  $t \in I$  und  $(\tau, \xi, p), (\tau_0, \xi_0, p_0) \in I \times \mathbb{R}^d \times P$  gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|T(\mu_0, \tau, \omega_0, \xi, p)(t) - T(\mu_0, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)(t)\| = \\ & = \left\| \xi + \int_{\tau}^t f(s, \omega_0, \mu_0(s), p) ds - \xi_0 - \int_{\tau_0}^t f(s, \omega_0, \mu_0(s), p_0) ds \right\| \leq \\ & \leq \|\xi - \xi_0\| + \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \|f(s, \omega_0, \mu_0(s), p_0)\| ds \right| + \\ & \quad + \left| \int_{\tau}^t \|f(s, \omega_0, \mu_0(s), p) - f(s, \omega_0, \mu_0(s), p_0)\| ds \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \|\xi - \xi_0\| + \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \|f(s, \omega_0, \mu_0(s), p_0)\| ds \right| + \\ + \int_a^b \|f(s, \omega_0, \mu_0(s), p) - f(s, \omega_0, \mu_0(s), p_0)\| ds$$

unmittelbar aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue (vergleiche BAUER [11, Satz 15.6])<sup>5</sup>, denn danach konvergieren für  $\tau \rightarrow \tau_0$  beziehungsweise  $p \rightarrow p_0$  die beiden Integrale gegen 0.

Jetzt läßt sich der Beweis des Satzes schnell zu Ende führen. Dazu wählt man zunächst die natürliche Zahl  $n$  so groß, daß die Ungleichung

$$\frac{1}{n!} \left( \int_a^b \ell(s, \omega_0) ds \right)^n < 1$$

erfüllt ist, und beachtet die wegen (A.4) für beliebige  $\mu, \nu \in X$  und  $(\tau_0, \xi_0, p_0) \in I \times \mathbb{R}^d \times P$  gültige Abschätzung

$$\|T^n(\mu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0) - T^n(\nu, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)\| \leq \underbrace{\frac{1}{n!} \left( \int_a^b \ell(s, \omega_0) ds \right)^n}_{<1} \cdot \|\mu - \nu\|,$$

so liefert das gleichmäßige Kontraktionsprinzip für jede Wahl von  $(\tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)$  einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\lambda(\cdot; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)$  von  $T^n(\cdot, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)$ , der somit natürlich auch der eindeutig bestimmte Fixpunkt von  $T(\cdot, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)$  ist (vergleiche Satz A.2.4 in [41]). Darüber hinaus ist die Abbildung

$$\begin{cases} I \times \mathbb{R}^d \times P & \rightarrow & X \\ (\tau_0, \xi_0, p_0) & \mapsto & \lambda(\cdot; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0) \end{cases}$$

für beliebiges  $\omega_0 \in \Omega$  stetig, und dies liefert mit

$$\begin{aligned} & \|\lambda(t; \tau, \omega_0, \xi, p) - \lambda(t_0; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)\| \leq \\ & \leq \|\lambda(t; \tau, \omega_0, \xi, p) - \lambda(t; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)\| + \|\lambda(t; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0) - \lambda(t_0; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)\| \leq \\ & \leq \|\lambda(\cdot; \tau, \omega_0, \xi, p) - \lambda(\cdot; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)\| + \|\lambda(t; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0) - \lambda(t_0; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)\| \end{aligned}$$

auch die Stetigkeit der Abbildung

$$\begin{cases} I \times I \times \mathbb{R}^d \times P & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ (t, \tau_0, \xi_0, p_0) & \mapsto & \lambda(t; \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0) \end{cases}$$

für beliebiges  $\omega_0 \in \Omega$ . Da eine Funktion  $\mu \in X$  offensichtlich genau dann Fixpunkt von  $T(\cdot, \tau_0, \omega_0, \xi_0, p_0)$  ist, wenn sie eine Lösung der Differentialgleichung (A.3) zu den Parameterwerten  $\omega_0$  und  $p_0$  ist und der Anfangsbedingung  $\mu(\tau_0) = \xi_0$  genügt, fehlt zum vollständigen Beweis des Satzes nur noch der Nachweis der Meßbarkeit von  $\lambda$ . Dies folgt jedoch leicht aus Lemma A.1.2, denn induktiv läßt sich unter Verwendung des Satzes 23.6 aus BAUER [11] zeigen, daß  $T^n$  die Voraussetzungen des Lemmas A.1.2 erfüllt.  $\diamond$

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch ein Lemma bewiesen werden, das im Beweis des Satzes 2.3.1 Verwendung findet.

<sup>5</sup>Die dazu benötigten integrierbaren Majoranten für die jeweiligen Integranden sind gemäß (A.1) und (A.2) durch  $\ell(\cdot, \omega_0)\|\mu_0(\cdot)\| + \ell_0(\cdot, \omega_0)$  beziehungsweise durch  $2\ell(\cdot, \omega_0)\|\mu_0(\cdot)\| + 2\ell_0(\cdot, \omega_0)$  gegeben.

**Lemma A.2.2** Gegeben sei eine parameterabhängige zufällige Differentialgleichung

$$\boxed{\dot{x} = f(t, \omega, x, p)} \tag{A.5}$$

die den Voraussetzungen des Satzes A.2.1 genügt, und  $\lambda$  sei die von diesem Satz garantierte allgemeine Lösung von (A.5). Des weiteren seien  $\tau_0 \in I$  und  $\omega \in \Omega$  beliebig, aber fest gewählt, und die Abbildung  $\mu_0 : P \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante  $M \geq 0$  mit

$$\|\mu_0(p)\| \leq M \quad \text{für beliebige } p \in P.$$

Dann gibt es zu jeder Wahl von  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß für beliebige  $\tau \in I$  mit  $|\tau - \tau_0| < \delta$  und beliebige  $p \in P$  die Abschätzung

$$\|\lambda(\tau; \tau_0, \omega, \mu_0(p), p) - \mu_0(p)\| < \varepsilon$$

erfüllt ist, d.h. es gilt

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \lambda(\tau; \tau_0, \omega, \mu_0(p), p) = \mu_0(p) \quad \text{gleichmäßig bezüglich } p \in P.$$

**Beweis:** Sei abkürzend  $\mu(t, p) := \lambda(t; \tau_0, \omega, \mu_0(p), p)$ . Dann liefert die für beliebige  $\tau \in I$  und  $p \in P$  gültige Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mu(\tau, p)\| &\leq \|\mu_0(p)\| + \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \|f(s, \omega, \mu(s, p), p)\| ds \right| \leq \\ &\leq M + \left| \int_{\tau_0}^{\tau} (\ell(s, \omega) \|\mu(s, p)\| + \ell_0(s, \omega)) ds \right| \leq \\ &\leq M + \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \ell_0(s, \omega) ds \right| + \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \ell(s, \omega) \|\mu(s, p)\| ds \right| \end{aligned}$$

zusammen mit dem Gronwall-Lemma 2.1.2 die Ungleichung

$$\|\mu(\tau, p)\| \leq M + \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \ell_0(s, \omega) ds \right| + \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \left( M + \left| \int_{\tau_0}^{\sigma} \ell_0(s, \omega) ds \right| \right) \ell(\sigma, \omega) e^{\left| \int_{\tau_0}^{\sigma} \ell(u, \omega) du \right|} d\sigma \right|,$$

d.h. es existiert eine Konstante  $C \geq 0$ , so daß

$$\|\mu(\tau, p)\| \leq C \quad \text{für beliebige } \tau \in I \text{ mit } |\tau - \tau_0| \leq 1 \text{ und beliebige } p \in P$$

gilt. Damit erhält man für beliebige  $\tau \in I$  mit  $|\tau - \tau_0| \leq 1$  und  $p \in P$  zunächst die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\mu(\tau, p) - \mu_0(p)\| &\leq \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \|f(s, \omega, \mu(s, p), p)\| ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \ell_0(s, \omega) ds \right| + C \cdot \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \ell(s, \omega) ds \right|, \end{aligned}$$

und daraus folgt schließlich — da die rechte Seite nicht mehr von  $p$  abhängt und für  $\tau \rightarrow \tau_0$  gegen 0 konvergiert — unmittelbar die Behauptung des Lemmas.  $\diamond$

# Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen, natürliche Zahlen inklusive 0
$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_0^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}_0^-$	ganze Zahlen, ganze Zahlen $> 0, \geq 0, < 0, \leq 0$
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-$	reelle Zahlen, reelle Zahlen $> 0, \geq 0, < 0, \leq 0$
$\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{R}}^+, \overline{\mathbb{R}}_0^+, \overline{\mathbb{R}}^-, \overline{\mathbb{R}}_0^-$	erweiterte reelle Zahlengerade, d.h. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \dots$
$\mathbb{R}^d$	$d$ -dimensionaler euklidischer Raum
$\mathbb{R}^{d \times d}$	Raum der $d \times d$ -Matrizen mit reellen Einträgen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$\mathbb{T}$	$\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$ (Zeitmenge)
$\overline{B}_\varepsilon(x)$	abgeschlossene $\varepsilon$ -Umgebung des Punktes $x$ in einem Banachraum $X$ , d.h. $\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X : \ y - x\  \leq \varepsilon\}$
$\text{id}_X$	identische Abbildung auf $X$
$\chi_A$	charakteristische Funktion der Menge $A \subset X$ , d.h. es gilt $\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$ , und $\chi_A(x) = 0$ für $x \notin A$
$L(\mathbb{R}^d)$	Menge der linearen Abbildungen auf dem $\mathbb{R}^d$
$\text{GL}(\mathbb{R}^d)$	Gruppe der linearen Isomorphismen auf dem $\mathbb{R}^d$
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum mit Ereignisraum $\Omega$ , $\sigma$ -Algebra $\mathcal{F}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$
$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	$p$ -fach integrierbare Abbildungen von $\Omega$ nach $\mathbb{R}^d$
$C(X, Y)$	stetige Abbildungen von $X$ nach $Y$ , mit beliebigen topologischen Räumen $X$ und $Y$
$f \circ g$	Komposition zweier Abbildungen $f$ und $g$ , d.h. $(f \circ g)(x) := f(g(x))$
$\dot{\lambda}(t)$	Ableitung der Funktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ im Punkt $t \in I$ , mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$
$Df(x_0)$	Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ im Punkt $x_0$
$\ln^+$	positiver Anteil des natürlichen Logarithmus, d.h. es gilt $\ln^+ x := \max\{0, \ln x\}$
$\diamond$	Ende eines Beweises
$\square$	Ende einer Bemerkung

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Zur Definition der topologischen Äquivalenz . . . . .	10
1.2	Zufällige invariante Unterraumbündel . . . . .	23
1.3	Zufällige invariante Faserbündel . . . . .	26
1.4	Zur Teilung des Spektrums $\sigma(A)$ von $A$ . . . . .	32
1.5	Die Abbildung $\pi^{i,j}$ in der Faser $k = \kappa$ . . . . .	40
1.6	Zufällige invariante Faserbündel durch die Lösung $\mu = \lambda(\cdot; \kappa_0, \omega, \xi_0)$ . . . . .	42
1.7	Die Phasenabbildungen . . . . .	44
1.8	Zu Lemma 1.6.1(a) . . . . .	49
2.1	Zufällige invariante Mannigfaltigkeiten . . . . .	80
2.2	Zur Teilung des Spektrums $\sigma(A)$ von $A$ . . . . .	87
2.3	Zufällige invariante Mannigfaltigkeiten durch eine $\omega$ -Lösung $\mu$ . . . . .	93
3.1	Die Zustandsentwicklung bei einem dynamischen System . . . . .	107
3.2	Die Zustandsentwicklung bei einem zufälligen dynamischen System . . . . .	109
3.3	Der von $\varphi$ erzeugte Schiefproduktfluß $\Theta$ . . . . .	110
3.4	Zur Wahl der Konstanten $\alpha_{i,+}$ , $\alpha_{i,-}$ und $\delta$ im hyperbolischen Fall . . . . .	120
3.5	Zufällige invariante Mannigfaltigkeiten . . . . .	122
3.6	Wachstumsverhalten von $\varphi(\cdot, \omega, \xi)$ in der stabilen zufälligen Mannigfaltigkeit . . . . .	124
3.7	Lösungsverhalten eines deterministischen linearen Beispiels . . . . .	125
3.8	Zur asymptotischen Annäherung an $\mathcal{S}^{i,\ell}(\omega)$ . . . . .	129
3.9	Der Satz von Hartman-Grobman für diskrete zufällige dynamische Systeme . . . . .	130
3.10	Lokale zufällige invariante Mannigfaltigkeiten . . . . .	148

# Literaturverzeichnis

- [1] H. Amann, *Ordinary Differential Equations*. De Gruyter, Berlin – New York (1990).
- [2] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*. In Vorbereitung.
- [3] L. Arnold, *Generation of Random Dynamical Systems*. Report Nr. 280, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen (1993).
- [4] L. Arnold, H. Crauel, *Random dynamical systems*, in L. Arnold, H. Crauel, J.-P. Eckmann (eds.), *Lyapunov Exponents*. Lecture Notes in Mathematics 1486, Springer, Berlin – Heidelberg (1991).
- [5] L. Arnold, P. Imkeller, *Anticipative problems in multiplicative ergodic theory*. Preprint, Universität Bremen (1993).
- [6] L. Arnold, K.-D. Xu, *Normal forms for random differential equations*. Report Nr. 256, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen (1991).
- [7] L. Arnold, K.-D. Xu, *Simultaneous normal form and center manifold reduction for random differential equations*. Report Nr. 259, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen (1991).
- [8] L. Arnold, K.-D. Xu, *Invariant measures for random dynamical systems and a necessary condition for stochastic bifurcation from a fixed point*. Report Nr. 283, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen (1993).
- [9] B. Aulbach, *A reduction principle for nonautonomous differential equations*. Archiv der Mathematik **39** (1982), 217–232.
- [10] B. Aulbach, *Hierarchies of invariant manifolds*. Journal of the Nigerian Mathematical Society **6** (1987), 71–89.
- [11] H. Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*. De Gruyter, Berlin – New York (1990).
- [12] P. Boxler, *A stochastic version of center manifold theory*. Probability Theory and Related Fields **83** (1989), 509–545.
- [13] H. Bunke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern*. Akademie-Verlag, Berlin (1972).
- [14] A. Carverhill, *Flows of stochastic dynamical systems: ergodic theory*. Stochastics **14** (1985), 273–317.

- [15] S. Dahlke, *Invariante Mannigfaltigkeiten für Produkte zufälliger Diffeomorphismen*. Dissertation, Universität Bremen (1989).
- [16] I. I. Gihman, A. V. Skorohod, *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York (1972).
- [17] D. M. Grobman, *Homeomorphisms of systems of differential equations*. Doklady Akademii Nauk SSSR **128** (1959), 880.
- [18] D. M. Grobman, *The topological classification of the vicinity of a singular point in  $n$ -dimensional space*. Mathematics of the USSR – Sbornik **56** (1962), 77–94.
- [19] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*. Robert E. Krieger, Malabar, Florida (1980).
- [20] P. Hartman, *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*. Proceedings of the American Mathematical Society **11** (1960), 610–620.
- [21] P. Hartman, *On the local linearization of differential equations*. Proceedings of the American Mathematical Society **14** (1963), 568–573.
- [22] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*. Birkhäuser, Boston – Basel – Stuttgart (1982).
- [23] R. Z. Hasminskii, *Stochastic Stability of Differential Equations*. Sijthoff and Noordhoff, Alphen (1980).
- [24] S. Hilger, *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*. Dissertation, Universität Würzburg (1988).
- [25] S. Hilger, *Generalized theorem of Hartman-Grobman on measure chains*. Preprint (1992).
- [26] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds*. Lecture Notes in Mathematics 583, Springer, Berlin – Heidelberg – New York (1977).
- [27] M. C. Irwin, *Smooth Dynamical Systems*. Academic Press, London (1980).
- [28] A. Kelley, *The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds*. Journal of Differential Equations **3** (1967), 546–570.
- [29] A. Kelley, *Stability of the center-stable manifold*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **18** (1967), 336–344.
- [30] U. Kirchgraber, K. J. Palmer, *Geometry in the Neighborhood of Invariant Manifolds of Maps and Flows and Linearization*. Longman Scientific and Technical, London (1990).
- [31] H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [32] V. I. Oseledets, *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*. Transactions of the Moscow Mathematical Society **19** (1968), 197–231.
- [33] K. J. Palmer, *A generalization of Hartman's linearization theorem*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **41** (1973), 753–758.

- [34] K. J. Palmer, *Linearization near an integral manifold*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **51** (1975), 243–255.
- [35] V. A. Pliss, *Principal reduction in the theory of stability of motion*. Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematika **28** (1964), 1297–1324 (Russisch).
- [36] D. Ruelle, *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*. Academic Press, San Diego – London (1989).
- [37] G. R. Sell, *The structure of a flow in the vicinity of an almost periodic motion*. Journal of Differential Equations **27** (1978), 359–393.
- [38] A. N. Shoshitaishvili, *Bifurcations of topological type at singular points of parametrized vector fields*. Functional Analysis and its Applications **6** (1972), 169–170.
- [39] A. N. Shoshitaishvili, *Bifurcations of topological type at singular points of parametrized vector fields*. Tr. Semin. I. G. Petrovskii **1** (1975), 279–309 (Russisch).
- [40] W. Walter, *Analysis II*. Springer, Berlin – Heidelberg (1990).
- [41] Th. Wanner, *Invariante Faserbündel und topologische Äquivalenz bei dynamischen Prozessen*. Diplomarbeit, Universität Augsburg (1991).

## Lebenslauf

Name:		Thomas Wanner
Geboren am:		19. Juli 1967 in Augsburg
Staatsangehörigkeit:		deutsch
Schulbildung:	1973–1977 1977–1986 1986 (Mai)	Volksschule Elisenstraße, Augsburg Holbein-Gymnasium, Augsburg Abitur
Grundwehrdienst:	1986–1987	Bundeswehr
Studium:	1987–1991 1991 (Oktober) 1991–1993	Studium der Mathematik an der Universität Augsburg Diplom-Hauptprüfung Stipendiat am Graduiertenkolleg “Mathema- tik — Analyse, Optimierung und Steuerung komplexer Systeme” der Universität Augsburg
Berufstätigkeit:	seit 1993 (September)	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl von Prof. Dr. Hansjörg Kielhöfer, Universität Augsburg