

Invariante Faserbündel und topologische Äquivalenz bei dynamischen Prozessen

Diplomarbeit
von
Thomas Wanner aus Augsburg

eingereicht
beim Institut für Mathematik
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Augsburg
Oktober 1991

Erstgutachter: Prof. Dr. Bernd Aulbach
Zweitgutachter: Prof. Dr. Hansjörg Kielhöfer

Bestätigung

Hiermit erkläre ich, daß diese Diplomarbeit selbständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Hilfsmittel erstellt wurde. Ich habe sie weder als Doktor-, Magister- oder Diplomarbeit bei einer anderen Universität oder Hochschule eingereicht.

Augsburg, den 7. Oktober 1991

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
Bemerkungen zur Notation	5
1 Kontinuierliche dynamische Prozesse	8
1.1 Grundlegende Definitionen und Ergebnisse	9
1.2 Quasibeschränkte Lösungen linearer Prozesse	15
1.3 Der Hauptsatz über invariante Faserbündel	25
1.4 Invariante Faserbündel durch Lösungen	34
1.5 Faserungen des erweiterten Phasenraumes	40
1.6 Das Reduktionsprinzip	47
1.7 Die Sätze von Hartman-Grobman	49
1.7.1 Vorbereitende Ergebnisse	49
1.7.2 Der klassische Satz von Hartman-Grobman	54
1.7.3 Der verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman	57
2 Diskrete dynamische Prozesse	62
2.1 Grundlegende Definitionen und Ergebnisse	63
2.2 Quasibeschränkte Lösungen linearer Prozesse	70
2.3 Der Hauptsatz über invariante Faserbündel	84
2.4 Invariante Faserbündel durch Lösungen	92
2.5 Faserungen des erweiterten Phasenraumes	99
2.6 Das Reduktionsprinzip	104
2.7 Die Sätze von Hartman-Grobman	106
2.7.1 Vorbereitende Ergebnisse	106
2.7.2 Der klassische Satz von Hartman-Grobman	111
2.7.3 Der verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman	116
A Hilfsmittel aus Analysis und Funktionalanalysis	119
A.1 Differential- und Integralrechnung in Banachräumen	119
A.2 Der Banachsche Fixpunktsatz und verwandte Ergebnisse	124
A.3 Asymptotisches Verhalten von Matrixfunktionen	128
A.3.1 Die Matrixexponentialfunktion	128
A.3.2 Matrixpotenzen	131
Literaturverzeichnis	134

Einleitung

Eine zentrale — wenn nicht gar die wichtigste — Methode der mathematischen Problembehandlung ist sicherlich die Reduktion schwerer bzw. ungelöster Probleme auf leichtere Probleme bzw. bekannte Tatsachen. Der *klassische Satz von Hartman-Grobman* ist ein Beispiel dieser Methode aus der Theorie der Differentialgleichungen. Er wurde in den sechziger Jahren unabhängig von HARTMAN [12] und GROBMAN [10] bewiesen und behandelt etwa das folgende Problem: Gegeben sei ein autonomes Differentialgleichungssystem

$$\boxed{\dot{x} = f(x)} \tag{0.1}$$

mit einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $f(0) = 0$. Neben (0.1) wird noch das lineare System

$$\boxed{\dot{x} = Df(0)x} \tag{0.2}$$

betrachtet, wobei $Df(0)$ die Jacobimatrix von f an der Stelle $x = 0$ bezeichnet. Dieses autonome lineare System kann vollständig gelöst werden, d.h. die Untersuchung des Lösungsverhaltens bereitet keine allzu großen Schwierigkeiten. Im Hinblick auf die eingangs erwähnte Methode ist es jetzt nur natürlich zu fragen, ob mit Hilfe des einfachen Systems (0.2) Aussagen zum Lösungsverhalten des komplizierten Systems (0.1) gemacht werden können. Der klassische Satz von Hartman-Grobman gibt unter gewissen Voraussetzungen eine positive Antwort:

Sind die Realteile aller Eigenwerte der Matrix $Df(0)$ von 0 verschieden, so existiert eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^N$ von 0 und ein Homöomorphismus $\mathcal{H} : V \rightarrow \mathcal{H}(V) \subset \mathbb{R}^N$ mit $\mathcal{H}(0) = 0$, der Lösungen von (0.1) auf Lösungen von (0.2) abbildet, solange sie in V verlaufen; entsprechend bildet die Umkehrabbildung \mathcal{H}^{-1} Lösungen von (0.2) in $\mathcal{H}(V)$ auf Lösungen von (0.1) ab.

Bekanntlich nennt man in dieser Situation die Systeme (0.1) und (0.2) *topologisch äquivalent*. (Siehe Abbildung 0.1.)

In den siebziger Jahren wurde das obige Ergebnis erweitert: der *verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman* macht Aussagen zur topologischen Äquivalenz des gegebenen Systems (0.1) zu einem einfacheren System, falls die Jacobimatrix $Df(0)$ auch Eigenwerte auf der imaginären Achse besitzt. Das "einfachere System" muß nun jedoch nicht mehr linear sein.

Parallel zur Theorie der autonomen Differentialgleichungen bzw. der *kontinuierlichen dynamischen Systeme* entwickelte sich in den vergangenen Jahrzehnten eine Theorie der autonomen Differenzgleichungen bzw. der *diskreten dynamischen Systeme*. In dieser Theorie wird das Verhalten von Punktfolgen im \mathbb{R}^N untersucht, die durch iterierte Anwendung einer Abbildung $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ entstehen. Bereits HARTMAN [12] bewies den klassischen Satz von Hartman-Grobman für autonome Differenzgleichungen, und auch der verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman wurde mittlerweile übertragen.

Zweifelsohne ist der verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman ein sehr wichtiges und mächtiges Hilfsmittel zur Untersuchung kontinuierlicher bzw. diskreter dynamischer Systeme.

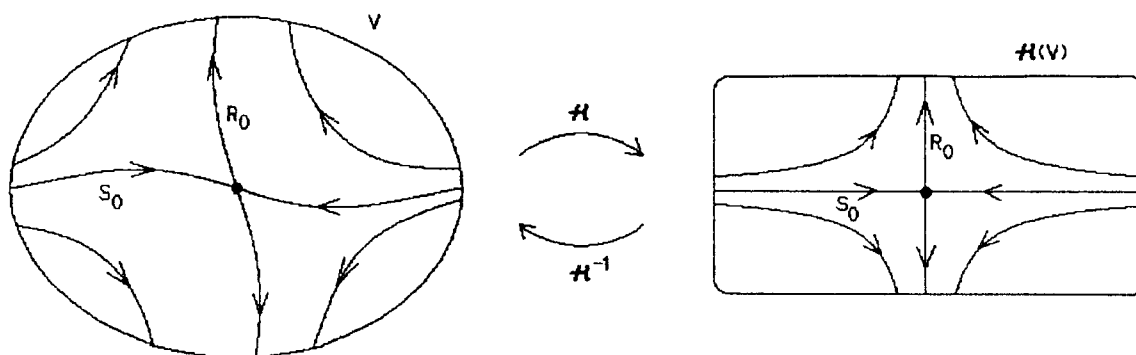


Abbildung 0.1: Der klassische Satz von Hartman-Grobman

Es ist deshalb erstaunlich, daß er in den einschlägigen Lehrbüchern meist nur erwähnt wird — wie etwa in AMANN [1, pp. 272f]. Der Grund dafür ist vermutlich der relativ lange und technische Beweis, der zum Beispiel in den Arbeiten von HILGER [13] und PALMER [24] zu finden ist.

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein neuer Beweis des verallgemeinerten Satzes von Hartman-Grobman angegeben werden, der zwar nicht wesentlich kürzer, aber (hoffentlich) anschaulicher und leichter verständlich als die bisherigen Beweise ist. Dabei soll nicht eine lokale Version für autonome Differential- bzw. Differenzgleichungen bewiesen werden, sondern ein globales Resultat für nichtautonome Differential- bzw. Differenzgleichungen, die im folgenden unter dem Begriff (*kontinuierliche bzw. diskrete*) *dynamische Prozesse* zusammengefaßt werden. Zwei Gründe rechtfertigen diese Vorgehensweise:

- Die Beschränkung auf globale topologische Äquivalenz ist keine wirkliche Restriktion, da mittels “cut-off”-Funktionen leicht lokale Ergebnisse hergeleitet werden können. Dies wurde etwa in der Vorlesung AULBACH [4] demonstriert.
- Der Beweis des Ergebnisses für den nichtautonomen Fall liefert natürlich das gewünschte Ergebnis auch für den autonomen Spezialfall.

So weit, so gut. Es ist jedoch zu befürchten, daß die Behandlung nichtautonomer Differential- bzw. Differenzgleichungen einen nicht zu vertretenden beweistechnischen Mehraufwand verursacht! Erstaunlicherweise ist genau das Gegenteil der Fall. Dies wird klarer, wenn man sich die Struktur des Beweises ansieht.

Ausgangspunkt für den Beweis sind *invariante Faserbündel*. Um diesen Begriff näher zu erläutern sei noch einmal an den eingangs erwähnten klassischen Satz von Hartman-Grobman erinnert. Betrachtet man die in Abbildung 0.1 skizzierten Phasenportraits der autonomen Differentialgleichungen (0.1) und (0.2), so erkennt man im Phasenraum \mathbb{R}^N je zwei Mannigfaltigkeiten S_0 und R_0 durch die Ruhelage 0, die mit einem Punkt stets die ganze Trajektorie durch diesen Punkt enthalten — sogenannte invariante Mannigfaltigkeiten im Phasenraum. Bei der geometrischen Veranschaulichung nichtautonomer Differentialgleichungen tritt an die Stelle des Phasenraums der (um die Zeitkomponente ergänzte) erweiterte Phasenraum; die invarianten Mannigfaltigkeiten in diesem erweiterten Phasenraum werden in der Literatur häufig als “Integralmannigfaltigkeiten” bezeichnet. (Man vergleiche dazu etwa HALE [11, pp. 229ff] oder KNOBLOCH, KAPPEL [20, pp. 224ff].) Bedingt durch die diskrete Zeit bei nichtautonomen Differenzgleichungen macht dieser Begriff jedoch nur im kontinuierlichen Fall Sinn — weswegen die

Integralmannigfaltigkeiten mit ihren diskreten Analoga unter dem Begriff *invariante Faserbündel* zusammengefaßt werden.

Zunächst wird ein allgemeiner Existenzsatz über invariante Faserbündel bei dynamischen Prozessen bewiesen. Der Satz, der aus entsprechenden Ergebnissen der Vorlesungen AULBACH [4] und AULBACH [5] hervorgegangen ist, ist für sich genommen bereits ein wichtiges und anwendungsreiches Resultat: In der Vorlesung AULBACH [4] wurde gezeigt, daß mit seiner Hilfe die Existenz von Hierarchien invarianter Mannigfaltigkeiten (vergleiche AULBACH [3]), sowie die Existenz der klassischen fünf invarianten Mannigfaltigkeiten (vergleiche KELLEY [17]) leicht gefolgert werden kann.

Der Beweis dieses Satzes ist der einzige lange und technische Beweis auf dem Weg zum verallgemeinerten Satz von Hartman-Grobman. Die restlichen Schritte sind relativ einfach und anschaulich:

- Die nichtautonome Formulierung des eben erwähnten Satzes ermöglicht es, mit Hilfe der Differential- bzw. der Differenzgleichung der gestörten Bewegung invariante Faserbündel durch Lösungen zu konstruieren. Im Rahmen einer rein autonomen Theorie wäre dies unmöglich!
- Eine einfache Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes liefert hieraus sofort invariante Faserungen des erweiterten Phasenraumes, die wieder nur im Rahmen einer nichtautonomen Theorie existieren.
- Diese Faserungen implizieren schließlich unmittelbar den verallgemeinerten Satz von Hartman-Grobman, und als “Nebenprodukt” auch das Reduktionsprinzip.

Der geometrische Zugang mittels Faserungen ist der Arbeit KIRCHGRABER, PALMER [19] entnommen, die aber mit einer asymmetrischen Faserung arbeitet: die horizontale Faserung beinhaltet eine Linearisierung, die vertikale dagegen nicht. Darüberhinaus wird in dieser Arbeit nur der autonome Fall behandelt. Trotz dieser Einschränkung kommen die beiden Autoren beim kontinuierlichen Fall jedoch nicht umhin, Hilfsergebnisse über nichtautonome Differentialgleichungen zu beweisen — vielleicht ist der nichtautonome Zugang doch der natürlichere.

Der Beweis des verallgemeinerten Satzes von Hartman-Grobman für dynamische Prozesse wird in der vorliegenden Arbeit zweigleisig durchgeführt: Im ersten Kapitel werden kontinuierliche dynamische Prozesse, d.h. nichtautonome Differentialgleichungen in beliebigen Banachräumen behandelt; im zweiten Kapitel werden diese Ergebnisse auf den diskreten Fall übertragen. Dabei werden der Hauptsatz über invariante Faserbündel und das Reduktionsprinzip für nichtautonome Differenzgleichungen mit nicht notwendigerweise invertierbarer rechter Seite bewiesen — Ergebnisse, die in dieser Form in der Literatur noch nicht behandelt wurden.

Desweiteren wurde besonderer Wert darauf gelegt, daß alle im Rahmen dieser Arbeit benötigten Aussagen entweder explizit bewiesen oder zumindest angegeben werden. So sind im Anhang grundlegende Aussagen zur Differential- und Integralrechnung in Banachräumen, zu Fixpunktsätzen und zum asymptotischen Verhalten von Matrixfunktionen enthalten.

Bemerkungen zur Notation

Zunächst sollen die in dieser Arbeit benötigten Bezeichnungen zusammengestellt werden. Die Zahlmengen und Zahlkörper werden wie üblich bezeichnet:

\mathbb{N}	Die natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$.
\mathbb{N}_0	Die natürlichen Zahlen mit der 0.
\mathbb{Z}	Die ganzen Zahlen.
\mathbb{R}	Die reellen Zahlen.
\mathbb{R}^+	Die positiven reellen Zahlen.
\mathbb{R}_0^+	Die nichtnegativen reellen Zahlen.
\mathbb{C}	Die komplexen Zahlen.
\mathbb{K}	Einer der beiden Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Für beliebiges $x \in \mathbb{K}$ ist $|x| \in \mathbb{R}_0^+$ der gewöhnliche Betrag reeller ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. komplexer ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Zahlen.

Sind M_1, \dots, M_n , $n \in \mathbb{N}$, metrische Räume mit Abstandsfunktionen $d_i : M_i \times M_i \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $i = 1, \dots, n$, so wird das Kreuzprodukt $M = M_1 \times \dots \times M_n$ ebenfalls zum metrischen Raum, wenn man die Abstandsfunktion d durch

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^n d_i(x^{(i)}, y^{(i)}) \quad \text{für beliebige } x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \in M$$

definiert. In diesem Fall ist eine Folge $(x_k)_{k=1}^\infty$ mit $x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)}) \in M$ genau dann konvergent in M , wenn die Folgen $(x_k^{(i)})_{k=1}^\infty$ für alle $i = 1, \dots, n$ in M_i konvergent sind (vergleiche DIEUDONNÉ [8, pp. 75–78]). Im Rahmen dieser Arbeit ist ein metrischer Raum M_i stets eine Teilmenge von \mathbb{R} oder \mathbb{Z} mit Abstandsfunktion $d_i(x, y) = |x - y|$, oder ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$ und Abstandsfunktion $d_i(x, y) = \|x - y\|$.

Banachräume werden durch kalligraphische Buchstaben dargestellt, etwa $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{P}, \dots$. Ohne weitere Spezifikation kann ein Banachraum sowohl reell, als auch komplex sein. Ist jedoch im folgenden innerhalb einer Aussage von mehreren Banachräumen die Rede, so wird stillschweigend angenommen, daß es sich um Räume über ein und demselben Körper handelt. Die Dimension der Räume kann endlich oder unendlich sein, $\|\cdot\|$ bezeichnet die Norm in dem jeweils betrachteten Banachraum. Ist $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathcal{X}$ ein Element eines Banachraumes \mathcal{X} , so ist die offene Kugel um x_0 mit Radius ε als

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| < \varepsilon\},$$

und die abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius ε als

$$\overline{B_\varepsilon(x_0)} := \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

definiert. Die wichtigsten Klassen von Abbildungen zwischen Banachräumen werden folgendermaßen abgekürzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) & \text{ Lineare, stetige Operatoren von } \mathcal{X} \text{ nach } \mathcal{Y}. \\ \mathcal{L}(\mathcal{X}) & \text{ Lineare, stetige Operatoren von } \mathcal{X} \text{ nach } \mathcal{X}. \\ \mathcal{GL}(\mathcal{X}) & \text{ Stetige Isomorphismen von } \mathcal{X} \text{ auf } \mathcal{X}. \end{aligned}$$

$\text{id} \in \mathcal{GL}(\mathcal{X})$ bezeichnet die identische Abbildung. Definiert man für beliebige $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ die Operatornorm $\|L\|$ durch

$$\|L\| := \sup\{\|Lx\| : \|x\| \leq 1\} = \inf\{c \in \mathbb{R}_0^+ : \|Lx\| \leq c\|x\| \text{ für alle } x \in \mathcal{X}\},$$

so ist der Raum $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ mit dieser Operatornorm (die natürlich von den in \mathcal{X} und \mathcal{Y} gewählten Normen abhängt) ein Banachraum. Ferner gilt für beliebige $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ und $x \in \mathcal{X}$ (vergleiche etwa YOSIDA [29, pp. 42ff]):

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \quad \text{und} \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

Von besonderem Interesse sind die endlichdimensionalen Banachräume \mathbb{K}^N , $N \in \mathbb{N}$, mit den ℓ^p -Normen $|\cdot|_p$, $p \in [1, \infty]$. Für $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{K}^N$ gilt bekanntlich

$$|x|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}$$

und

$$|x|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^N |x_i|^p} \quad \text{für } p \in [1, \infty).$$

Wählt man in \mathbb{K}^N die Basis $\{e_i : i = 1, \dots, N\}$ mit den Einheitsvektoren $e_i := (\delta_{1i}, \dots, \delta_{Ni})$, wobei δ_{ij} wie üblich das Kronecker-Symbol bezeichnet, kann man in allgemein bekannter Weise den Raum $\mathcal{L}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^N)$ mit dem Raum $\mathbb{K}^{N \times N}$ der $N \times N$ -Matrizen über dem Körper \mathbb{K} identifizieren. Die Einheitsmatrix wird dabei durchwegs mit id bezeichnet, ohne explizite Angabe der Dimension. Für beliebiges $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ sei

$$\begin{aligned} \sigma(A) & := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda \text{id}) = 0\} && \text{das Spektrum von } A, \\ \sigma_{\min}^r(A) & := \min\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} && \text{der kleinste Eigenwertrealteil,} \\ \sigma_{\max}^r(A) & := \max\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} && \text{der größte Eigenwertrealteil,} \\ \sigma_{\min}^b(A) & := \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} && \text{der kleinste Eigenwertbetrag und} \\ \sigma_{\max}^b(A) & := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} && \text{der größte Eigenwertbetrag von } A. \end{aligned}$$

Die Norm einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{K}^{N \times N}$ sei die von der im \mathbb{K}^N gewählten Vektornorm induzierte Matrixnorm, d.h.

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{K}^N\}.$$

Diese Norm stimmt mit der oben definierten Operatornorm der linearen Abbildung A überein. Im endlichdimensionalen Fall sind vor allem die von den ℓ^p -Normen induzierten Matrixnormen

von Interesse. Speziell für $p \in \{1, 2, \infty\}$ erhält man bekanntlich:

$$|A|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^N |a_{ij}| : i = 1 \dots N\right\} \quad (\text{Zeilensummennorm})$$

$$|A|_1 = \max\left\{\sum_{i=1}^N |a_{ij}| : j = 1 \dots N\right\} \quad (\text{Spaltensummennorm})$$

$$|A|_2 = \sqrt{\sigma_{\max}^b(\bar{A}^T A)} \quad (\text{Spektralnrm})$$

Die bei der Spektralnrm auftretende Matrix \bar{A} ist die zu A konjugierte Matrix, d.h. $\bar{A} := (\bar{a}_{ij})_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Sind schließlich für $i = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, die Matrizen $A_i \in \mathbb{K}^{N_i \times N_i}$, $N_i \in \mathbb{N}$, gegeben, so bezeichnet

$$\text{diag}(A_1, \dots, A_k) := \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

die $N \times N$ -Matrix, $N = \sum_{i=1}^k N_i$, die durch Anordnung der Matrizen A_i entlang der Hauptdiagonalen entsteht.

Kapitel 1

Kontinuierliche dynamische Prozesse

In diesem ersten Kapitel sollen die bereits erwähnten Ergebnisse über invariante Faserbündel und topologische Äquivalenz bei *kontinuierlichen dynamischen Prozessen*, d.h. bei nichtautonomen Differentialgleichungen in beliebigen Banachräumen bewiesen werden. Es ist folgendermaßen gegliedert:

- Im ersten Abschnitt werden grundlegende Definitionen und Ergebnisse über nichtautonome Differentialgleichungen in Banachräumen zusammengestellt. Zunächst wird für eine spezielle Klasse derartiger Differentialgleichungen ein globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz (inklusive stetiger Abhängigkeit der allgemeinen Lösung von Anfangswerten und Parametern) bewiesen; er ist auf alle im Rahmen dieser Arbeit behandelten Differentialgleichungen anwendbar. Hierauf werden noch die Differentialgleichung der gestörten Bewegung, lineare Prozesse, Übergangsabbildungen, Variation der Konstanten und das allgemein bekannte Gronwall-Lemma behandelt.
- Anschließend wird der Begriff der quasibeschränkten Lösung eingeführt und einige Aussagen über quasibeschränkte Lösungen linearer Prozesse werden bewiesen.
- Mit diesen Ergebnissen ist man bereits bestens ausgerüstet, um im nächsten Abschnitt den Hauptsatz über invariante Faserbündel zu beweisen. Der hier vorgestellte Beweis ist — abgesehen von einigen kleineren Modifikationen — der Vorlesung AULBACH [4] entnommen. Im Hinblick auf die späteren Anwendungen des Satzes wird er für parameterabhängige Differentialgleichungen formuliert.
- Die Differentialgleichung der gestörten Bewegung ermöglicht sodann die Konstruktion invarianter Faserbündel durch Lösungen,
- und eine einfache Anwendung des gleichmäßigen Kontraktionsprinzips liefert daraus horizontale und vertikale Faserungen des erweiterten Phasenraumes.
- Diese Ergebnisse werden schließlich verwendet, um das Reduktionsprinzip
- und die Sätze von Hartman-Grobman für nichtautonome Differentialgleichungen zu beweisen.

Alle diese Resultate gelten in Banachräumen beliebiger Dimension. Darüberhinaus werden alle benötigten Ergebnisse aus der Theorie der Differentialgleichungen in Banachräumen explizit aufgeführt — und zum Teil auch bewiesen.

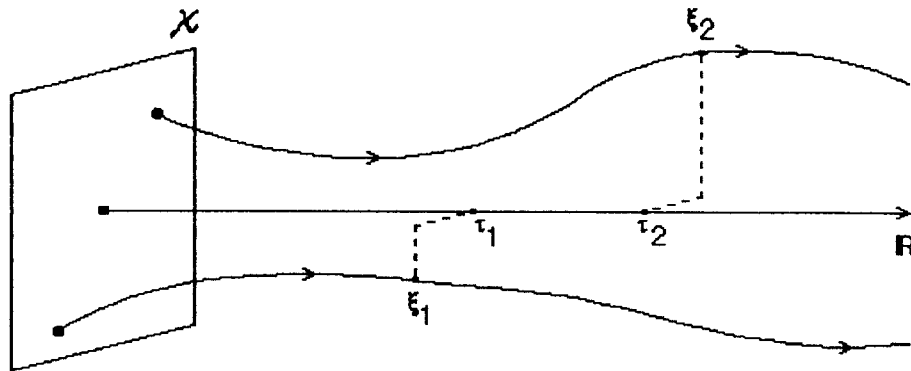


Abbildung 1.1: Der kontinuierliche erweiterte Phasenraum

1.1 Grundlegende Definitionen und Ergebnisse

Die Ausweitung der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf beliebige Banachräume ist bereits seit geraumer Zeit Gegenstand eingehender Untersuchungen. Daher ist es nicht verwunderlich, daß bereits mehrere Lehrbücher zu diesem Thema existieren: AMANN [1] behandelt sehr ausführlich den Fall endlichdimensionaler Banachräume (inklusive einiger Bemerkungen zum unendlichdimensionalen Fall), DALECKII, KREIN [7] gehen intensiv auf Stabilitätsfragen ein, und die grundlegenden Ergebnisse der Theorie sind bereits in DIEUDONNÉ [8] enthalten. Um diese Arbeit jedoch in sich geschlossen zu halten, werden im folgenden die zentralen Resultate explizit angegeben und zum Teil auch bewiesen. Eine kurze Zusammenfassung wichtiger Definitionen und Ergebnisse zur Differential- und Integralrechnung in Banachräumen findet sich im Anhang.

Der Begriff der *nichtautonomen Differentialgleichung* wird für beliebige Banachräume analog zum Fall des \mathbb{R}^N definiert: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, \mathcal{X} und \mathcal{P} seien beliebige Banachräume und $f : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ sei eine stetige Abbildung. Dann nennt man die Gleichung

$$\dot{x} = f(t, x, p) \quad (1.1)$$

eine *nichtautonome, parameterabhängige Differentialgleichung (erster Ordnung)*, bzw. einen *parameterabhängigen, kontinuierlichen dynamischen Prozeß*. Eine auf einem Intervall $J \subset I$ erklärte, differenzierbare Funktion $\lambda : J \rightarrow \mathcal{X}$ heißt *Lösung von (1.1) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$* , wenn für alle $t \in J$ gilt:

$$\dot{\lambda}(t) = f(t, \lambda(t), p).$$

Eine *Anfangsbedingung zu (1.1)* ist eine Beziehung der Form

$$x(\tau_0) = \xi_0 \quad \text{mit} \quad \tau_0 \in I \quad \text{und} \quad \xi_0 \in \mathcal{X}. \quad (1.2)$$

λ heißt *Lösung des Anfangswertproblems (1.1), (1.2) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$* , wenn $\tau_0 \in J$ und $\lambda(\tau_0) = \xi_0$ erfüllt sind.

Lösungen werden in naheliegender Weise im *erweiterten Phasenraum* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ veranschaulicht: In Abbildung 1.1 sind die Lösungen eines kontinuierlichen dynamischen Prozesses zu den Anfangsbedingungen $x(\tau_1) = \xi_1$ und $x(\tau_2) = \xi_2$ dargestellt.

Im Hinblick auf spätere Anwendungen sollen noch zwei Begriffe eingeführt werden: Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt *nach links unbeschränkt*, wenn es von der Form $(-\infty, \tau)$ bzw. $(-\infty, \tau]$ ist, für ein $\tau \in \mathbb{R}$, oder wenn $I = \mathbb{R}$ gilt. Analog erklärt man *nach rechts unbeschränkte Intervalle*.

Wie in der bekannten Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, kann man auch bei nichtautonomen Differentialgleichungen in Banachräumen für gewisse rechte Seiten f lokale Existenz- und Eindeutigkeitssätze beweisen; man vergleiche dazu etwa AMANN [1, pp. 96–106], DIEUDONNÉ [8, pp. 266–268], oder ZEIDLER [30, pp. 78–82]. Die innerhalb dieser Arbeit behandelten Differentialgleichungen haben jedoch alle eine sehr spezielle Struktur — und diese Struktur erlaubt weiterreichende Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit der allgemeinen Lösung. Die genauen Voraussetzungen und Ergebnisse beinhaltet der folgende Satz.

Satz 1.1.1 *Gegeben seien ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, Banachräume \mathcal{X} , \mathcal{P} , und eine stetige Abbildung $f : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$. Ferner existiere eine stetige Abbildung $l : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, so daß für beliebige $t \in I$, $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ die Abschätzung*

$$\|f(t, x_1, p) - f(t, x_2, p)\| \leq l(t)\|x_1 - x_2\| \quad (1.3)$$

erfüllt ist. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$\boxed{\dot{x} = f(t, x, p)} \quad (1.4)$$

für beliebiges $(\tau_0, \xi_0, p_0) \in I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$ genau eine Lösung $\lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, p_0) : I \rightarrow \mathcal{X}$, die der Anfangsbedingung $x(\tau_0) = \xi_0$ zum Parameter p_0 genügt. Die Abbildung $\lambda : I \times I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ ist stetig.

Beweis: Da jedes reelle Intervall I die Vereinigung einer wachsenden Folge kompakter Intervalle ist, genügt es offensichtlich den Spezialfall eines kompakten Intervalls $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ zu betrachten.

Sei $L := \max\{l(t) : t \in I\}$ und \mathcal{B} der Banachraum aller stetigen Abbildungen $\mu : I \rightarrow \mathcal{X}$ mit der Norm $\|\mu\| := \max\{\|\mu(t)\| : t \in I\}$. Der Beweis verwendet die Abbildung

$$T : \mathcal{B} \times I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B},$$

definiert durch

$$T(\mu, \tau_0, \xi_0, p_0)(t) := \xi_0 + \int_{\tau_0}^t f(s, \mu(s), p_0) ds \quad \text{für } t \in I,$$

und ist in drei Schritte unterteilt.

(I) Behauptung: Für beliebige $\mu, \nu \in \mathcal{B}$, $t, \tau_0 \in I$, $\xi_0 \in \mathcal{X}$, $p_0 \in \mathcal{P}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|T^n(\mu, \tau_0, \xi_0, p_0)(t) - T^n(\nu, \tau_0, \xi_0, p_0)(t)\| \leq \frac{L^n}{n!} \|\mu - \nu\| \cdot |t - \tau_0|^n, \quad (1.5)$$

wobei der iterierte Operator $T^n : \mathcal{B} \times I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}$ wie in (A.9) auf Seite 126 definiert ist.

Der Beweis der Behauptung erfolgt durch vollständige Induktion über n . Für $n = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned} & \|T(\mu, \tau_0, \xi_0, p_0)(t) - T(\nu, \tau_0, \xi_0, p_0)(t)\| \leq \\ & \leq \left| \int_{\tau_0}^t \|f(s, \mu(s), p_0) - f(s, \nu(s), p_0)\| ds \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\tau_0}^t L \|\mu(s) - \nu(s)\| ds \right| \leq \\ & \leq L \|\mu - \nu\| \cdot |t - \tau_0|. \end{aligned}$$

Sei also nun die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dann folgt für $n + 1$:

$$\begin{aligned}
& \|T^{n+1}(\mu, \tau_0, \xi_0, p_0)(t) - T^{n+1}(\nu, \tau_0, \xi_0, p_0)(t)\| = \\
& = \|T(T^n(\mu, \tau_0, \xi_0, p_0), \tau_0, \xi_0, p_0)(t) - T(T^n(\nu, \tau_0, \xi_0, p_0), \tau_0, \xi_0, p_0)(t)\| \leq \\
& \leq \left| \int_{\tau_0}^t L \|T^n(\mu, \tau_0, \xi_0, p_0)(s) - T^n(\nu, \tau_0, \xi_0, p_0)(s)\| ds \right| \leq \\
& \leq \frac{L^{n+1}}{n!} \|\mu - \nu\| \cdot \left| \int_{\tau_0}^t |s - \tau_0|^n ds \right| = \\
& = \frac{L^{n+1}}{(n+1)!} \|\mu - \nu\| \cdot |t - \tau_0|^{n+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung (I) bewiesen.

(II) Behauptung: Die Abbildung T ist stetig.

Aus (I) folgt zunächst für beliebige $\mu, \nu \in \mathcal{B}$, $\tau_0 \in I$, $\xi_0 \in \mathcal{X}$ und $p_0 \in \mathcal{P}$:

$$\|T(\mu, \tau_0, \xi_0, p_0) - T(\nu, \tau_0, \xi_0, p_0)\| \leq L(b-a) \|\mu - \nu\|.$$

Wegen Lemma A.2.5 (Seite 126) ist deshalb nur noch zu zeigen, daß für beliebiges, aber festes, $\mu_0 \in \mathcal{B}$ die Abbildung $T(\mu_0, \cdot, \cdot, \cdot) : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}$ stetig ist. Seien also $(\tau_0, \xi_0, p_0) \in I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$, $\mu_0 \in \mathcal{B}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze zunächst

$$\delta_1 := \frac{\varepsilon}{3} > 0. \quad (1.6)$$

Wegen der Stetigkeit von f und μ_0 ist die Abbildung

$$I \times \mathcal{P} \ni (s, p) \mapsto f(s, \mu_0(s), p) \in \mathcal{X}$$

stetig, d.h. es existiert ein $\delta_2 > 0$ mit

$$\delta_2 \cdot \max\{\|f(s, \mu_0(s), p_0)\| : s \in I\} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (1.7)$$

und mit Lemma A.2.6 (Seite 127) erhält man ein $\delta_3 > 0$, so daß für beliebige $s \in I$ und $p \in B_{\delta_3}(p_0)$ die Abschätzung

$$\|f(s, \mu_0(s), p) - f(s, \mu_0(s), p_0)\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (1.8)$$

erfüllt ist. Definiert man abschließend $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, so folgt für beliebige $t \in I$ und $(\tau, \xi, p) \in I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$ mit $|\tau - \tau_0| + \|\xi - \xi_0\| + \|p - p_0\| < \delta$ aus (1.6), (1.7) und (1.8) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \|T(\mu_0, \tau, \xi, p)(t) - T(\mu_0, \tau_0, \xi_0, p_0)(t)\| = \\
& = \left\| \xi + \int_{\tau}^t f(s, \mu_0(s), p) ds - \xi_0 - \int_{\tau_0}^t f(s, \mu_0(s), p_0) ds \right\| \leq \\
& \leq \|\xi - \xi_0\| + \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \|f(s, \mu_0(s), p_0)\| ds \right| + \left| \int_{\tau}^t \|f(s, \mu_0(s), p) - f(s, \mu_0(s), p_0)\| ds \right| < \\
& < \delta_1 + |\tau - \tau_0| \max\{\|f(s, \mu_0(s), p_0)\| : s \in I\} + \int_a^b \|f(s, \mu_0(s), p) - f(s, \mu_0(s), p_0)\| ds < \\
& < \frac{\varepsilon}{3} + \delta_2 \max\{\|f(s, \mu_0(s), p_0)\| : s \in I\} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) < \\
& < \varepsilon,
\end{aligned}$$

d.h. $|||T(\mu_0, \tau, \xi, p) - T(\mu_0, \tau_0, \xi_0, p_0)||| < \varepsilon$ für $|\tau - \tau_0| + \|\xi - \xi_0\| + \|p - p_0\| < \delta$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

(III) Mit (I) und (II) können jetzt die Aussagen des Satzes bewiesen werden. Zunächst erhält man mittels (I) für beliebige $\mu, \nu \in \mathcal{B}$, $(\tau_0, \xi_0, p_0) \in I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$|||T^n(\mu, \tau_0, \xi_0, p_0) - T^n(\nu, \tau_0, \xi_0, p_0)||| \leq \frac{L^n}{n!} (b-a)^n |||\mu - \nu|||,$$

d.h. wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^n}{n!} (b-a)^n = 0$ und (II) erfüllt die Abbildung T die Voraussetzungen von Satz A.2.4 (Seite 126). Zu jedem (τ_0, ξ_0, p_0) existiert also ein eindeutig bestimmter Fixpunkt $\lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, p_0)$, und die Abbildung

$$I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \ni (\tau_0, \xi_0, p_0) \mapsto \lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, p_0) \in \mathcal{B}$$

ist stetig. Man erkennt unmittelbar, daß dann auf Grund von

$$\begin{aligned} & \|\lambda(t; \tau, \xi, p) - \lambda(t_0; \tau_0, \xi_0, p_0)\| \leq \\ & \leq \|\lambda(t; \tau, \xi, p) - \lambda(t; \tau_0, \xi_0, p_0)\| + \|\lambda(t; \tau_0, \xi_0, p_0) - \lambda(t_0; \tau_0, \xi_0, p_0)\| \leq \\ & \leq |||\lambda(\cdot; \tau, \xi, p) - \lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, p_0)||| + \|\lambda(t; \tau_0, \xi_0, p_0) - \lambda(t_0; \tau_0, \xi_0, p_0)\| \end{aligned}$$

auch die Abbildung

$$I \times I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \ni (t, \tau_0, \xi_0, p_0) \mapsto \lambda(t; \tau_0, \xi_0, p_0) \in \mathcal{X}$$

stetig ist. Schließlich folgt leicht, daß eine Funktion $\lambda \in \mathcal{B}$ genau dann Fixpunkt von $T(\cdot, \tau_0, \xi_0, p_0)$ ist, wenn λ eine Lösung der Differentialgleichung (1.4) zu Parameter p_0 ist mit $\lambda(\tau_0) = \xi_0$. Damit ist alles gezeigt. \diamond

Die Abbildung $\lambda : I \times I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ aus Satz 1.1.1 heißt *allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1.4)*. Sie genügt für beliebige $\tau, t_1, t_2 \in I$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ der Gleichung

$$\boxed{\lambda(t_2; \tau, \xi, p) = \lambda(t_2; t_1, \lambda(t_1; \tau, \xi, p), p)}, \quad (1.9)$$

da beide Seiten von (1.9) Lösungen von (1.4) zur Anfangsbedingung $x(\tau) = \xi$ sind. Diese Gleichung wird in den folgenden Abschnitten immer wieder benötigt werden.

Möchte man das Verhalten einer Differentialgleichung in der Umgebung einer speziellen Lösung untersuchen, so bedient man sich bekanntlich einer neuen Differentialgleichung mit trivialer Lösung, die sich in der Umgebung der trivialen Lösung genauso wie der ursprüngliche Prozeß in der Umgebung der gegebenen speziellen Lösung verhält. Diese *Differentialgleichung der gestörten Bewegung* wird im nächsten Satz behandelt.

Satz 1.1.2 Gegeben seien ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein Banachraum \mathcal{X} und eine stetige Abbildung $f : I \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, die den Voraussetzungen von Satz 1.1.1 genüge. Betrachte neben der Differentialgleichung

$$\boxed{\dot{x} = f(t, x)} \quad (1.10)$$

mit der speziellen Lösung $\mu : I \rightarrow \mathcal{X}$ die sogenannte Differentialgleichung der gestörten Bewegung (von (1.10) zur Lösung μ)

$$\boxed{\dot{x} = f(t, x + \mu(t)) - f(t, \mu(t))}. \quad (1.11)$$

Dann gilt:

- (a) Die Differentialgleichung der gestörten Bewegung besitzt die triviale Lösung auf I .
- (b) Eine Funktion $\nu : I \rightarrow \mathcal{X}$ ist genau dann eine Lösung von (1.11), wenn $\nu + \mu$ eine Lösung des ursprünglichen Prozesses (1.10) ist.

Beweis: Da f nach Voraussetzung die Abschätzung (1.3) erfüllt, ist sowohl auf (1.10) als auch auf (1.11) Satz 1.1.1 anwendbar. Alle Lösungen dieser beiden Prozesse existieren somit auf ganz I . Die Aussage in (a) ist offensichtlich. Da μ nach Voraussetzung eine Lösung von (1.10) ist, erhält man für beliebiges $t \in I$ die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \dot{\nu}(t) &= f(t, \nu(t) + \mu(t)) - f(t, \mu(t)) \\ \Leftrightarrow \dot{\nu}(t) + f(t, \mu(t)) &= f(t, \nu(t) + \mu(t)) \\ \Leftrightarrow \dot{\nu}(t) + \dot{\mu}(t) &= f(t, \nu(t) + \mu(t)). \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar (b). ◇

Die Differentialgleichung der gestörten Bewegung wird das zentrale Hilfsmittel zur Konstruktion invarianter Faserbündel durch Lösungen sein. Ferner ist die Bemerkung angebracht, daß die Differentialgleichung der gestörten Bewegung im Rahmen einer rein autonomen Theorie nicht verwendet werden kann: Selbst wenn die Ausgangsgleichung (1.10) autonom ist, ist die Differentialgleichung der gestörten Bewegung (1.11) im allgemeinen nicht autonom!

Nach diesen allgemeinen Definitionen und Ergebnissen über nichtautonome Differentialgleichungen sollen die Betrachtungen nun auf die Klasse der nichtautonomen linearen Prozesse eingeschränkt werden.

Dazu sei $I \subset \mathbb{R}$ wieder ein Intervall und \mathcal{X} ein beliebiger Banachraum. Ferner seien stetige Abbildungen $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ und $b : I \rightarrow \mathcal{X}$ gegeben. Dann nennt man die Differentialgleichung

$$\boxed{\dot{x} = A(t)x + b(t)} \tag{1.12}$$

eine (*inhomogene*) *nichtautonome lineare Differentialgleichung*. Die zugehörige *homogene nichtautonome lineare Differentialgleichung* ist durch

$$\boxed{\dot{x} = A(t)x} \tag{1.13}$$

gegeben. Parameterabhängige lineare Prozesse werden analog zum Fall allgemeiner Differentialgleichungen definiert. Wegen

$$\|(A(t)x_1 + b(t)) - (A(t)x_2 + b(t))\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x_1 - x_2\| \quad \text{für beliebige } t \in I, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$$

und der Stetigkeit von A — die die Stetigkeit von $\|A(\cdot)\|$ impliziert — existiert gemäß Satz 1.1.1 zu jedem Anfangswert genau eine globale Lösung von (1.12) bzw. (1.13). Um die allgemeine Lösung λ dieser Prozesse möglichst übersichtlich angeben zu können, bedient man sich einer Konstruktion, die die Übergangsmatrix linearer Systeme im \mathbb{R}^N (vergleiche KNOBLOCH, KAPPEL [20, p. 67]) verallgemeinert.

Betrachte dazu die auf $I \times \mathcal{L}(\mathcal{X})$ definierte, homogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{X} = A(t)X. \tag{1.14}$$

Auch auf (1.14) ist Satz 1.1.1 anwendbar, denn für beliebige $t \in I$ und $X_1, X_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ gilt

$$\|A(t)X_1 - A(t)X_2\| = \|A(t)(X_1 - X_2)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|X_1 - X_2\|,$$

mithin existiert die allgemeine Lösung $\lambda : I \times I \times \mathcal{L}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ von (1.14). Definiert man jetzt

$$\Phi(t, \tau) := \lambda(t; \tau, \text{id}),$$

so nennt man die stetige Abbildung $\Phi : I \times I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ die *Übergangsabbildung von (1.13)*. Für beliebige $t, \tau, s, r \in I$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ erkennt man leicht die folgenden Eigenschaften der Übergangsabbildung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t, \tau) &= A(t)\Phi(t, \tau), \\ \frac{d}{dt}(\Phi(t, \tau)\xi) &= A(t)\Phi(t, \tau)\xi, \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi(t, \tau)\Xi) &= A(t)\Phi(t, \tau)\Xi, \\ \Phi(t, t) &= \text{id}, \\ \Phi(t, s) &= \Phi(t, r)\Phi(r, s), \\ \Phi(t, \tau)^{-1} &= \Phi(\tau, t). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Gemäß (1.15) und (1.16) ist die Abbildung $\Phi(\cdot, \tau_0)\xi_0$ die eindeutig bestimmte Lösung von (1.13) zur Anfangsbedingung $x(\tau_0) = \xi_0$. Die allgemeine Lösung dieses homogenen linearen Prozesses lautet demnach

$$\lambda(t; \tau_0, \xi_0) = \Phi(t, \tau_0)\xi_0.$$

Für die inhomogene Differentialgleichung (1.12) ist eine Formel für die allgemeine Lösung im nächsten Satz angegeben.

Satz 1.1.3 (Variation der Konstanten) *Gegeben sei der Prozeß (1.12). Dann ist die allgemeine Lösung λ von (1.12) gegeben durch*

$$\lambda(t; \tau_0, \xi_0) = \Phi(t, \tau_0)\xi_0 + \int_{\tau_0}^t \Phi(t, s)b(s)ds \tag{1.17}$$

für $t \in I$.

Beweis: Die Beziehung (1.16) impliziert, daß die rechte Seite von (1.17) bei $t = \tau_0$ den Wert ξ_0 annimmt. Ferner ist die rechte Seite von (1.17) eine Lösung von (1.12), wie man durch Ableiten unter Verwendung von (1.15) leicht erkennt. (Die Formel für die Ableitung des Integrals findet sich im Anhang: (A.1) auf Seite 120.) Mit der Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.1.1 folgt die Behauptung. \diamond

Diese Lösungsformel wird bei vielen Abschätzungen im nächsten Abschnitt eine zentrale Rolle spielen. Ferner benötigen diese Abschätzungen das allgemein bekannte Gronwall-Lemma.

Satz 1.1.4 (Gronwall-Lemma) *Gegeben seien ein Intervall I , ein $\tau_0 \in I$, eine Konstante $b \in \mathbb{R}_0^+$, sowie stetige Funktionen $a, c : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Ist dann für alle $t \in I$ die Abschätzung*

$$a(t) \leq c(t) + b \cdot \left| \int_{\tau_0}^t a(s)ds \right|$$

erfüllt, so erhält man für alle $t \in I$ die explizite Abschätzung

$$a(t) \leq c(t) + b \cdot \left| \int_{\tau_0}^t c(s)e^{b|t-s|}ds \right|.$$

Beweis: Siehe etwa AMANN [1, pp. 89f]. ◇

Da in den Anwendungen der Ergebnisse dieser Arbeit die autonomen Differentialgleichungen einen wichtigen Spezialfall darstellen, sollen diese abschließend noch kurz behandelt werden.

Sei \mathcal{X} ein beliebiger Banachraum und $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Abbildung. Dann nennt man eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.18}$$

eine *autonome Differentialgleichung* bzw. ein *kontinuierliches dynamisches System*. Auch das System (1.18) genüge den Voraussetzungen von Satz 1.1.1. Bei festem $\xi_0 \in \mathcal{X}$ unterscheiden sich dann die auf ganz \mathbb{R} existierenden Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(\tau_0) = \xi_0$$

für $\tau_0 \in \mathbb{R}$ lediglich durch eine Translation in der Zeit. Aus diesem Grund wird in der allgemeinen Lösung von (1.18) die Anfangszeit o.B.d.A. gleich 0 gesetzt. Definiert man für $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t; \xi_0) := \lambda(t; 0, \xi_0) \quad , \tag{1.19}$$

so nennt man die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ die *allgemeine Lösung des kontinuierlichen dynamischen Systems (1.18)*. Diese Bezeichnung wird im folgenden gelegentlich verwendet.

1.2 Quasibeschränkte Lösungen linearer Prozesse

Im nächsten Abschnitt dieses Kapitels soll der Hauptsatz über invariante Faserbündel für kontinuierliche dynamische Prozesse bewiesen werden. Der für die Charakterisierung dieser Faserbündel zentrale Begriff ist die *Quasibeschränktheit*, der dieser Abschnitt gewidmet ist.

Zur Motivation des Begriffes sollen zunächst endlichdimensionale, homogene lineare Differentialgleichungssysteme betrachtet werden. Sei dazu das M -dimensionale System

$$\dot{x} = Ax \tag{1.20}$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{M \times M}$ gegeben. Die im letzten Abschnitt definierte Übergangsabbildung Φ dieses Systems ist eine Abbildung mit Werten im Raum $\mathcal{L}(\mathbb{K}^M)$, kann also in kanonischer Weise als Abbildung mit Werten im Raum $\mathbb{K}^{M \times M}$ aller $M \times M$ -Matrizen aufgefaßt werden. (Siehe auch *Bemerkungen zur Notation*.) Die explizite Form dieser Übergangsmatrix wird im Anhang angegeben: Unter Verwendung der in Definition A.3.2 definierten Matrixexponentialfunktion erhält man $\Phi(t, s) = e^{A(t-s)}$ (vergleiche Satz A.3.3). Die allgemeine Lösung λ von (1.20) lautet demnach

$$\lambda(t; \tau, \xi) = e^{A(t-\tau)} \xi \quad .$$

In Satz A.3.4 wird ferner gezeigt werden, daß für beliebiges $\alpha > \sigma_{\max}^r(A)$ eine Konstante $K = K(\alpha) \geq 1$ existiert, so daß

$$\|e^{A(t-\tau)}\| \leq K e^{\alpha(t-\tau)} \quad \text{für alle } t \geq \tau \tag{1.21}$$

erfüllt ist. Für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{K}^M$ gilt also

$$\|\lambda(t; \tau, \xi)\| \leq K \|\xi\| e^{\alpha(t-\tau)} \quad \text{für alle } t \geq \tau \quad .$$

Bei gegebenem $\alpha \in \mathbb{R}$ weisen somit — unter gewissen Voraussetzungen an die Eigenwertrealteile der Matrix A — alle Lösungen von (1.20) für $t \rightarrow \infty$ dieselbe, von α abhängige, “exponentielle Abklingrate” auf. Diese Eigenschaft wird als *Quasibeschränktheit* bezeichnet und ist Gegenstand der folgenden Definition.

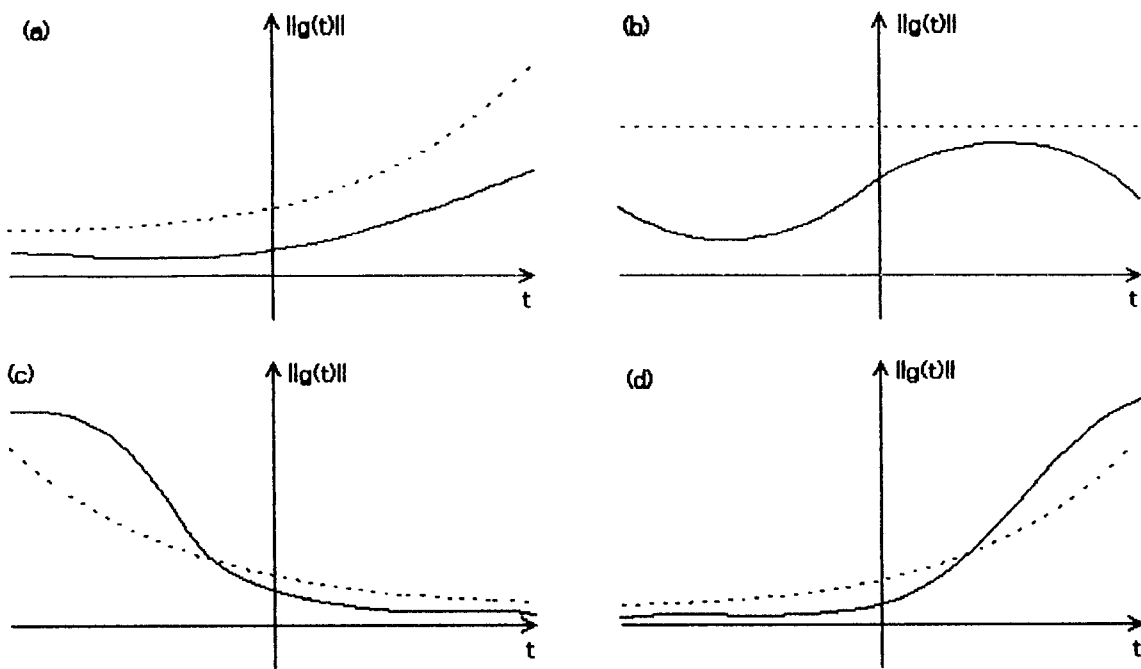


Abbildung 1.2: Quasibeschränkte Abbildungen

Definition 1.2.1 Gegeben seien ein $\eta \in \mathbb{R}$, ein Banachraum \mathcal{X} , ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine stetige Abbildung $g : I \rightarrow \mathcal{X}$.

- (a) g heißt η^+ -quasibeschränkt oder η -quasibeschränkt für $t \rightarrow \infty$, wenn I nach rechts unbeschränkt ist und für ein (und damit, wegen der Stetigkeit von g , für jedes) $\tau \in I$ gilt:

$$\sup\{\|g(t)\|e^{-\eta t} : t \geq \tau\} < \infty.$$

In diesem Fall definiert man $\|g\|_{\tau, \eta}^+ := \sup\{\|g(t)\|e^{-\eta t} : t \geq \tau\}$.

- (b) g heißt η^- -quasibeschränkt oder η -quasibeschränkt für $t \rightarrow -\infty$, wenn I nach links unbeschränkt ist und für ein (und damit für jedes) $\tau \in I$ gilt:

$$\sup\{\|g(t)\|e^{-\eta t} : t \leq \tau\} < \infty.$$

In diesem Fall definiert man $\|g\|_{\tau, \eta}^- := \sup\{\|g(t)\|e^{-\eta t} : t \leq \tau\}$.

- (c) g heißt η -quasibeschränkt, wenn $I = \mathbb{R}$ ist und g die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\sup\{\|g(t)\|e^{-\eta t} : t \in \mathbb{R}\} < \infty.$$

Man setzt dann $\|g\|_{\eta} := \sup\{\|g(t)\|e^{-\eta t} : t \in \mathbb{R}\}$.

Einige Bemerkungen sollen diese wichtige Definition ergänzen. Sei dazu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Abbildung.

- (a) g ist genau dann η -quasibeschränkt, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\|g(t)\| \leq Ce^{\eta t}$$

gilt, mit einer Konstanten $C \geq 0$. (Siehe Abbildung 1.2(a).)

- (b) Für $\eta = 0$ entspricht die η -Quasibeschränktheit der gewöhnlichen Beschränktheit von \mathcal{X} -wertigen Abbildungen. Ferner ist g genau dann η^+ -quasibeschränkt, wenn für ein $\tau \in \mathbb{R}$ die Einschränkung $g|_{(\tau, \infty)}$ beschränkt ist. Analog läßt sich die η^- -Quasibeschränktheit charakterisieren. (Siehe Abbildung 1.2(b).)
- (c) Ist $\eta < 0$, so klingt eine η^+ -quasibeschränkte Abbildung g für $t \rightarrow \infty$ exponentiell ab. (Siehe Abbildung 1.2(c).)
- (d) Ist $\eta > 0$, so klingt eine η^- -quasibeschränkte Abbildung g für $t \rightarrow -\infty$ exponentiell ab. (Siehe Abbildung 1.2(d).)
- (e) Die Nullabbildung ist η -quasibeschränkt für beliebiges $\eta \in \mathbb{R}$.

Wie das Beispiel vom Beginn dieses Abschnittes zeigt, tauchen quasibeschränkte Abbildungen in natürlicher Weise als Lösungen endlichdimensionaler linearer Systeme auf — sofern man an die Eigenwerte der definierenden Matrix gewisse Forderungen stellt. Darüberhinaus läßt sich zeigen, daß unter bestimmten Voraussetzungen ein derartiges System genau eine quasibeschränkte Lösung besitzt.

Wie sieht nun aber die Situation bei nichtlinearen Systemen, bzw. allgemeiner bei kontinuierlichen dynamischen Prozessen aus? Unter welchen Voraussetzungen besitzt ein dynamischer Prozeß genau eine quasibeschränkte Lösung, und wann sind alle Lösungen eines Prozesses quasibeschränkt?

Die Beantwortung dieser Fragen wird für die Konstruktion der invarianten Faserbündel von zentraler Bedeutung sein. Die entsprechenden Ergebnisse sollen im folgenden zusammengestellt werden; sie entstammen im wesentlichen den Arbeiten AULBACH [3] und HILGER [13], sowie der Vorlesung AULBACH [4].

Das erste Lemma behandelt (nicht notwendigerweise lineare) Störungen linearer dynamischer Prozesse. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen ein derartiger Prozeß genau eine für $t \rightarrow -\infty$ quasibeschränkte Lösung besitzt. Die zentrale Forderung an den ungestörten linearen Prozeß ist für autonome Prozesse im wesentlichen die obige Eigenwertbedingung. Bei beliebigen dynamischen Prozessen steht der Begriff des Eigenwertes natürlich nicht mehr zur Verfügung. Aus diesem Grund wird im allgemeinen Fall für die Übergangsabbildung eine Abschätzung wie in (1.21) gefordert, die im endlichdimensionalen autonomen Fall ja eine Konsequenz der Eigenwertbedingung ist (vergleiche Satz A.3.4).

Lemma 1.2.2 *Gegeben sei der parameterabhängige, kontinuierliche dynamische Prozeß*

$$\boxed{\dot{x} = A(t)x + f(t, x, p) + f_0(t, p)} \quad (1.22)$$

mit einem nach links unbeschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}$, Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{P} , sowie stetigen Abbildungen $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $f : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ und $f_0 : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$; Φ sei die Übergangsabbildung des linearen Prozesses $\dot{x} = A(t)x$. Ferner gelte für beliebige $t, s \in I$, $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$:

$$\|\Phi(t, s)\| \leq K e^{\alpha(t-s)} \quad \text{für } t \geq s, \quad (1.23)$$

$$f(t, 0, p) = 0, \quad (1.24)$$

$$\|f(t, x, p) - f(t, \bar{x}, p)\| \leq L \|x - \bar{x}\|, \quad (1.25)$$

mit Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$, $K \geq 1$ und $L \geq 0$. Dann gilt für beliebiges $\gamma > \alpha + KL$ und $\tau \in I$: Ist für alle $p \in \mathcal{P}$ die Abbildung $f_0(\cdot, p)$ γ^- -quasibeschränkt mit

$$\|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq M \quad \text{für ein } M \in \mathbb{R}_0^+, \quad (1.26)$$

so besitzt (1.22) für jedes $p \in \mathcal{P}$ genau eine γ^- -quasibeschränkte Lösung $\mu(\cdot, p)$ und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- . \quad (1.27)$$

Darüberhinaus ist die Abbildung $\mu : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig. Ist $I = \mathbb{R}$ und $f_0(\cdot, p)$ sogar γ^- -quasibeschränkt, so ist auch $\mu(\cdot, p)$ γ^- -quasibeschränkt und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\gamma} \leq \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\gamma} . \quad (1.28)$$

Bemerkung: Das Lemma ist auch auf Prozesse der Form

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, x, p)$$

anwendbar, wenn die Abbildung $F : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ den Bedingungen

$$\|F(t, x, p) - F(t, \bar{x}, p)\| \leq L\|x - \bar{x}\| \quad \text{und} \quad \|F(t, 0, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq M$$

genügt: Man setzt dann einfach

$$\begin{aligned} f(t, x, p) &:= F(t, x, p) - F(t, 0, p) , \\ f_0(t, p) &:= F(t, 0, p) . \end{aligned}$$

Beim Beweis des Hauptsatzes wird das Lemma in dieser Form angewandt, ohne daß dies explizit erwähnt wird.

Beweis: Wegen (1.25) erfüllt der Prozeß (1.22) die Voraussetzungen von Satz 1.1.1; alle Lösungen existieren also auf ganz I und sind eindeutig bestimmt. λ sei die allgemeine Lösung gemäß Satz 1.1.1.

Der Beweis ist in fünf Abschnitte unterteilt. In (I), (II) und (III) wird der Spezialfall $I = (-\infty, \tau]$ behandelt, in (IV) wird das Lemma für ein beliebiges nach links unbeschränktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und beliebiges $\tau \in I$ bewiesen, und in (V) wird abschließend die zu (1.28) gehörige Aussage des Lemmas nachgewiesen.

(I) Sei zunächst $I = (-\infty, \tau]$, $f_0(t, p) \equiv 0$ auf $I \times \mathcal{P}$ und $L = 0$, d.h. $f(t, x, p) \equiv 0$ auf $I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$. Ist $\mu(t) = \Phi(t, \tau)\xi$ eine beliebige γ^- -quasibeschränkte Lösung von $\dot{x} = A(t)x$, so folgt für alle $t \leq \tau$ mit (1.23):

$$\begin{aligned} \|\xi\| &= \|\Phi(\tau, t)\Phi(t, \tau)\xi\| = \|\Phi(\tau, t)\mu(t)\| \leq \|\Phi(\tau, t)\| \cdot \|\mu(t)\| \leq \\ &\leq K e^{\alpha(\tau-t)} e^{\gamma t} \|\mu(t)\| e^{-\gamma t} \leq K e^{\alpha\tau} e^{(\gamma-\alpha)t} \|\mu\|_{\tau, \gamma}^- \rightarrow 0, \quad \text{für } t \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

denn nach Voraussetzung ist $\gamma > \alpha + KL = \alpha$. Also ist $\mu(t) \equiv 0$ die einzige γ^- -quasibeschränkte Lösung von (1.22). Ferner ist die Abschätzung (1.27) erfüllt.

(II) Sei nun $I = (-\infty, \tau]$, f_0 beliebig und $L = 0$, d.h. $f(t, x, p) \equiv 0$ auf $I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$. Die Eindeutigkeitsaussage des Lemmas folgt unmittelbar aus (I), denn die Differenz zweier verschiedener γ^- -quasibeschränkter Lösungen von $\dot{x} = A(t)x + f_0(t, p)$ zum Parameter $p \in \mathcal{P}$ wäre eine nichttriviale γ^- -quasibeschränkte Lösung von $\dot{x} = A(t)x$. Um die Existenzaussage zu beweisen, definiert man μ durch

$$\mu(t, p) := \int_{-\infty}^t \Phi(t, s) f_0(s, p) ds .$$

Wegen

$$\|\Phi(t, s)f_0(s, p)\| \leq \|\Phi(t, s)\|e^{\gamma s}\|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq M\|\Phi(t, s)\|e^{\gamma s} \leq KM e^{\alpha t}e^{(\gamma-\alpha)s},$$

für alle $p \in \mathcal{P}$ und $s \leq t$, sowie der Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, s)f_0(s, p) = A(t)\Phi(t, s)f_0(s, p)$$

und $\gamma > \alpha + KL = \alpha$ erfüllt μ die Voraussetzungen der Lemmata A.1.1 und A.1.2 (Anhang, Seiten 121, 122). Damit ist $\mu : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig, $\mu(\cdot, p)$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(t, p) &\equiv \Phi(t, t)f_0(t, p) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, s)f_0(s, p)ds \equiv f_0(t, p) + \int_{-\infty}^t A(t)\Phi(t, s)f_0(s, p)ds \equiv \\ &\equiv A(t)\mu(t, p) + f_0(t, p), \end{aligned}$$

d.h. $\mu(\cdot, p)$ ist eine Lösung von $\dot{x} = A(t)x + f_0(t, p)$. Die Abschätzung (1.27) ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \|\mu(t, p)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|\Phi(t, s)\| \cdot \|f_0(s, p)\| ds \leq \int_{-\infty}^t K e^{\alpha(t-s)} e^{\gamma s} \|f_0(s, p)\| e^{-\gamma s} ds \leq \\ &\leq K e^{\alpha t} \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \int_{-\infty}^t e^{(\gamma-\alpha)s} ds = \frac{K}{\gamma-\alpha} e^{\alpha t} \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- e^{(\gamma-\alpha)t} = \\ &= \frac{K}{\gamma-\alpha} \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- e^{\gamma t} \end{aligned}$$

für alle $t \in I$ und $p \in \mathcal{P}$, also

$$\|\mu(t, p)\| e^{-\gamma t} \leq \frac{K}{\gamma-\alpha} \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \quad \text{für alle } t \leq \tau,$$

$$\text{d.h. } \|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma-\alpha} \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- = \frac{K}{\gamma-\alpha-KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^-.$$

(III) Seien nun $L \geq 0$ und f_0 beliebig, $I = (-\infty, \tau]$. Der Beweis verwendet den Banachschen Fixpunktsatz. Sei dazu \mathcal{B} der lineare Raum aller stetigen Abbildungen $\nu : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Für beliebiges $p \in \mathcal{P}$ ist $\nu(\cdot, p) : I \rightarrow \mathcal{X}$ eine γ^- -quasibeschränkte Abbildung.
- Die Menge $\{\|\nu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- : p \in \mathcal{P}\}$ ist nach oben beschränkt.

Definiert man auf \mathcal{B} eine Norm durch

$$\|\nu\| := \sup\{\|\nu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- : p \in \mathcal{P}\},$$

so wird \mathcal{B} dadurch zu einem Banachraum.

Zur Konstruktion einer Kontraktion auf \mathcal{B} sei $\nu \in \mathcal{B}$ beliebig. Betrachte nun den dynamischen Prozeß

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, \nu(t, p), p) + f_0(t, p). \quad (1.29)$$

Da für alle $t \in I$ wegen (1.24), (1.25) und (1.26) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f(t, \nu(t, p), p) + f_0(t, p)\| e^{-\gamma t} &\leq L\|\nu(t, p)\| e^{-\gamma t} + \|f_0(t, p)\| e^{-\gamma t} \leq \\ &\leq L\|\nu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- + \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \\ &\leq L\|\nu\| + M \end{aligned} \quad (1.30)$$

erfüllt ist, kann man (II) auf (1.29) anwenden. Es existiert demnach eine stetige Abbildung $\nu^* : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß $\nu^*(\cdot, p)$ die eindeutig bestimmte γ^- -quasibeschränkte Lösung von (1.29) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$ ist, und für beliebige $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\|\nu^*(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha} \|f(\cdot, \nu(\cdot, p), p) + f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha} (L\|\nu\| + M),$$

d.h. $\nu^* \in \mathcal{B}$. Definiert man nun

$$T\nu := \nu^* \in \mathcal{B},$$

so folgt hieraus mit (1.30):

$$\|(T\nu)(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha} (L\|\nu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- + \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^-). \quad (1.31)$$

Behauptung: Die Abbildung $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ ist eine Kontraktion.

Seien dazu $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{B}$ beliebig. Dann ist für jedes $p \in \mathcal{P}$ die Abbildung $(T\nu_1 - T\nu_2)(\cdot, p)$ eine γ^- -quasibeschränkte Lösung des Prozesses

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, \nu_1(t, p), p) - f(t, \nu_2(t, p), p). \quad (1.32)$$

Wie (1.29) erfüllt auch (1.32) die Voraussetzungen von (II). Mit (1.25) und (1.27) erhält man für beliebiges $p \in \mathcal{P}$

$$\|(T\nu_1 - T\nu_2)(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha} \|(\nu_1 - \nu_2)(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha} \|\nu_1 - \nu_2\|,$$

und damit schließlich durch Bildung des Supremums

$$\|T\nu_1 - T\nu_2\| \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha} \|\nu_1 - \nu_2\|.$$

Gemäß Voraussetzung ist $\gamma > \alpha + KL$, d.h. $\frac{KL}{\gamma - \alpha} < 1$. T ist also eine Kontraktion und besitzt nach dem Banachschen Fixpunktsatz A.2.1 einen eindeutig bestimmten Fixpunkt in \mathcal{B} .

Sei $\mu \in \mathcal{B}$ dieser eindeutige Fixpunkt und $p \in \mathcal{P}$ beliebig, aber fest. Wendet man die obige Fixpunktargumentation auf den dynamischen Prozeß

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, p) + f_0(t, p) \quad (1.33)$$

an, der jetzt allerdings wie ein *parameterunabhängiger Prozeß* behandelt wird, so erhält man sofort: (1.33) besitzt genau eine γ^- -quasibeschränkte Lösung, denn eine γ^- -quasibeschränkte Abbildung ist offensichtlich genau dann Lösung von (1.33), wenn sie ein Fixpunkt der Abbildung T ist. (Der betrachtete Banachraum \mathcal{B} ist in diesem Fall einfach der Raum aller γ^- -quasibeschränkten, stetigen Abbildungen $I \rightarrow \mathcal{X}$ mit der Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\tau, \gamma}^-$.)

Nach Konstruktion ist also $\mu(\cdot, p)$ diese eindeutig bestimmte γ^- -quasibeschränkte Lösung von (1.33) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$, und wegen $\mu \in \mathcal{B}$ ist die Abbildung $\mu : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig.

Bleibt nur noch die Abschätzung (1.27) zu zeigen. Unter Beachtung von $T\mu(\cdot, p) = \mu(\cdot, p)$ folgt dazu aus (1.31)

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha} \|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- + \frac{K}{\gamma - \alpha} \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- ,$$

und schließlich

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^-.$$

Damit ist (III) vollständig bewiesen.

(IV) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges nach links unbeschränktes Intervall und $\tau \in I$ beliebig, so existiert wegen (III) zu jedem $p \in \mathcal{P}$ eine eindeutig bestimmte γ^- -quasibeschränkte Lösung $\tilde{\mu}(\cdot, p) : (-\infty, \tau] \rightarrow \mathcal{X}$ von (1.22), und die Abbildung $\tilde{\mu} : (-\infty, \tau] \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ ist stetig. Man überzeugt sich leicht, daß dann $\mu : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$, definiert durch

$$\mu(t, p) := \lambda(t; \tau, \tilde{\mu}(\tau, p), p),$$

den Forderungen des Lemmas genügt.

(V) Sei nun $I = \mathbb{R}$, $f_0(\cdot, p)$ für jedes $p \in \mathcal{P}$ eine γ -quasibeschränkte Abbildung und $L \geq 0$ beliebig. Gemäß (IV) existiert für $p \in \mathcal{P}$ eine eindeutig bestimmte γ^- -quasibeschränkte Lösung $\mu(\cdot, p)$ von (1.22), und mit $\|f_0(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \|f_0(\cdot, p)\|_{\gamma}$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ folgt aus (1.27):

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\gamma} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R}.$$

Für $\tau \rightarrow \infty$ erhält man schließlich:

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\gamma} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\gamma},$$

d.h. $\mu(\cdot, p)$ ist γ -quasibeschränkt und erfüllt die Abschätzung (1.28). \diamond

Das zweite Lemma behandelt ebenfalls Prozesse der Form (1.22). Im Gegensatz zu Lemma 1.2.2 werden jedoch Bedingungen angegeben, unter denen jede Lösung des betrachteten Prozesses quasibeschränkt für $t \rightarrow \infty$ ist. Das Lemma ist für parameterunabhängige Prozesse formuliert.

Lemma 1.2.3 *Gegeben sei der kontinuierliche dynamische Prozeß*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x) + f_0(t) \quad (1.34)$$

mit einem nach rechts unbeschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}$, einem Banachraum \mathcal{X} , sowie stetigen Abbildungen $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $f : I \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ und $f_0 : I \rightarrow \mathcal{X}$; Φ sei die Übergangsabbildung des linearen Prozesses $\dot{x} = A(t)x$. Ferner gelte für beliebige $t, s \in I$ und $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$:

$$\|\Phi(t, s)\| \leq K e^{\alpha(t-s)} \quad \text{für } t \geq s, \quad (1.35)$$

$$f(t, 0) = 0, \quad (1.36)$$

$$\|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \leq L \|x - \bar{x}\|, \quad (1.37)$$

mit Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$, $K \geq 1$ und $L \geq 0$. Dann gilt für beliebiges $\gamma > \alpha + KL$ und $\tau \in I$: Ist f_0 eine γ^+ -quasibeschränkte Abbildung, so ist jede Lösung $\mu : I \rightarrow \mathcal{X}$ von (1.34) ebenfalls γ^+ -quasibeschränkt und es gilt:

$$\|\mu\|_{\tau, \gamma}^+ \leq K \|\mu(\tau)\| e^{-\gamma\tau} + \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0\|_{\tau, \gamma}^+. \quad (1.38)$$

Beweis: Wieder existieren wegen Satz 1.1.1 alle Lösungen von (1.34) auf ganz I . Sei $\mu : I \rightarrow \mathcal{X}$ eine beliebige Lösung von (1.34) und $\tau \in I$ beliebig, aber fest. Dann erhält man durch Variation der Konstanten (Satz 1.1.3)

$$\mu(t) \equiv \Phi(t, \tau)\mu(\tau) + \int_{\tau}^t \Phi(t, s)(f(s, \mu(s)) + f_0(s))ds$$

und damit unter Anwendung von (1.35), (1.36) und (1.37) für alle $t \geq \tau$:

$$\begin{aligned} \|\mu(t)\| &\leq K e^{\alpha(t-\tau)} \|\mu(\tau)\| + \int_{\tau}^t K e^{\alpha(t-s)} (\|f(s, \mu(s)) - f(s, 0)\| + \|f_0(s)\|) ds \leq \\ &\leq K e^{\alpha(t-\tau)} \|\mu(\tau)\| + K e^{\alpha t} \int_{\tau}^t e^{-\alpha s} (L \|\mu(s)\| + \|f_0(s)\|) ds = \\ &= K e^{\alpha(t-\tau)} \|\mu(\tau)\| + K L e^{\alpha t} \int_{\tau}^t \|\mu(s)\| e^{-\alpha s} ds + K e^{\alpha t} \int_{\tau}^t \|f_0(s)\| e^{-\gamma s} e^{(\gamma-\alpha)s} ds \leq \\ &= K e^{\alpha t} \left(\|\mu(\tau)\| e^{-\alpha \tau} + L \int_{\tau}^t \|\mu(s)\| e^{-\alpha s} ds + \frac{1}{\gamma - \alpha} \|f_0\|_{\tau, \gamma}^+ (e^{(\gamma-\alpha)t} - e^{(\gamma-\alpha)\tau}) \right). \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\Lambda(t) := \|\mu(t)\| e^{-\alpha t} \quad \text{und} \quad \Gamma(t) := K \|\mu(\tau)\| e^{-\alpha \tau} + \frac{K}{\gamma - \alpha} \|f_0\|_{\tau, \gamma}^+ (e^{(\gamma-\alpha)t} - e^{(\gamma-\alpha)\tau})$$

folgt:

$$\Lambda(t) \leq \Gamma(t) + K L \int_{\tau}^t \Lambda(s) ds \quad \text{für alle } t \geq \tau.$$

Anwendung des Gronwall-Lemmas (Satz 1.1.4) liefert für alle $t \geq \tau$:

$$\Lambda(t) \leq \Gamma(t) + K L \int_{\tau}^t \Gamma(s) e^{KL(t-s)} ds.$$

Mit partieller Integration erhält man weiter:

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &\leq \Gamma(t) + K L e^{KLt} \int_{\tau}^t \Gamma(s) e^{-KLs} ds = \\ &= \Gamma(t) + K L e^{KLt} \left(-\frac{1}{KL} e^{-KLs} \Gamma(s) \Big|_{\tau}^t + \frac{1}{KL} \int_{\tau}^t \Gamma'(s) e^{-KLs} ds \right) = \\ &= \Gamma(t) - \Gamma(t) + \Gamma(\tau) e^{KL(t-\tau)} + e^{KLt} \int_{\tau}^t K \|f_0\|_{\tau, \gamma}^+ e^{(\gamma-\alpha-KL)s} ds = \\ &= \Gamma(\tau) e^{KL(t-\tau)} + K \|f_0\|_{\tau, \gamma}^+ e^{KLt} \frac{1}{\gamma - \alpha - KL} (e^{(\gamma-\alpha-KL)t} - e^{(\gamma-\alpha-KL)\tau}) \leq \\ &\leq K \|\mu(\tau)\| e^{-\alpha \tau} e^{KL(t-\tau)} + \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0\|_{\tau, \gamma}^+ e^{(\gamma-\alpha)t}. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit $e^{(\alpha-\gamma)t}$ für alle $t \geq \tau$:

$$\begin{aligned} \|\mu(t)\| e^{-\gamma t} &\leq K \|\mu(\tau)\| e^{-(\gamma-\alpha-KL)t} e^{-(\alpha+KL)\tau} + \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0\|_{\tau, \gamma}^+ \leq \\ &\leq K \|\mu(\tau)\| e^{-(\gamma-\alpha-KL)\tau} e^{-(\alpha+KL)\tau} + \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0\|_{\tau, \gamma}^+ = \\ &= K \|\mu(\tau)\| e^{-\gamma \tau} + \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0\|_{\tau, \gamma}^+. \end{aligned}$$

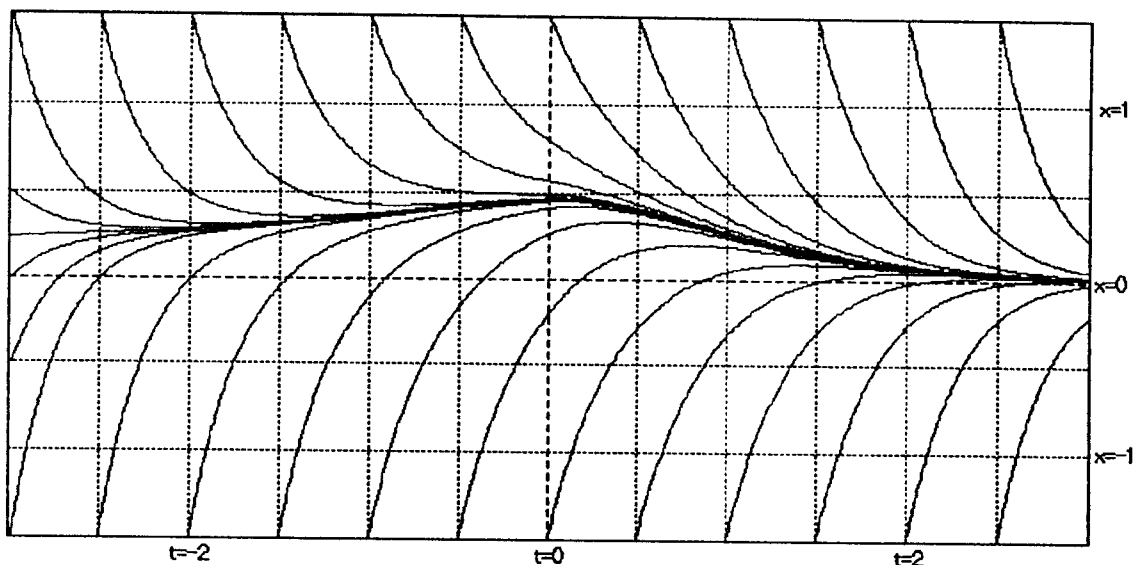


Abbildung 1.3: Die allgemeine Lösung des Beispiels

μ ist also γ^+ -quasibeschränkt und erfüllt die Abschätzung (1.38). \diamond

Zur Illustration sollen Lemma 1.2.2 und 1.2.3 auf die folgende skalare Differentialgleichung angewandt werden:

$$\dot{x} = -3x + \cos t \sin x + \begin{cases} e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

Setzt man $A(t) := -3$, $f(t, x) := \cos t \sin x$, $f_0(t) := e^{-t}$ für $t \geq 0$ und $f_0(t) := 1$ für $t < 0$, so erfüllt (1.39) die Voraussetzungen der Lemmata mit $K = 1$, $\alpha = -3$ und $L = 1$. Für $\gamma_1 = 0$ folgt aus Lemma 1.2.2, daß (1.39) genau eine auf $(-\infty, 0]$ beschränkte Lösung besitzt; Lemma 1.2.3 liefert mit $\gamma_2 = -1$, daß alle Lösungen für $t \rightarrow \infty$ exponentiell abklingen. (Vergleiche Abbildung 1.3.)

Die bisher angegebenen Lemmata behandelten Störungen linearer Prozesse, deren Übergangsabbildungen für $t \rightarrow \infty$ quasibeschränkt sind. Betrachtet man noch einmal das homogene lineare autonome System (1.20) von Seite 15, so kann man zeigen (siehe Anhang, Satz A.3.4), daß für beliebiges $\beta < \sigma_{\min}^r(A)$ eine Konstante $K = K(\beta) \geq 1$ existiert mit

$$\|e^{A(t-s)}\| \leq K e^{\beta(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s,$$

d.h. die Übergangsmatrix — und damit auch alle Lösungen von (1.20) — ist β^- -quasibeschränkt für beliebiges $\beta < \sigma_{\min}^r(A)$. Es wäre also durchaus wünschenswert, auch Störungen linearer Prozesse zu untersuchen, deren Übergangsabbildungen für $t \rightarrow -\infty$ quasibeschränkt sind. Die entsprechenden Ergebnisse sind in den folgenden beiden Lemmata zusammengefaßt. Zunächst das Analogon zu Lemma 1.2.2.

Lemma 1.2.4 Gegeben sei der parameterabhängige, kontinuierliche dynamische Prozeß

$$\dot{y} = B(t)y + g(t, y, p) + g_0(t, p) \quad (1.40)$$

mit einem nach rechts unbeschränkten Intervall $J \subset \mathbb{R}$, Banachräumen \mathcal{Y} und \mathcal{P} , sowie stetigen Abbildungen $B : J \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, $g : J \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ und $g_0 : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$; Ψ sei die Übergangsabbildung des linearen Prozesses $\dot{y} = B(t)y$. Ferner gelte für beliebige $t, s \in J$, $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$ und $p \in \mathcal{P}$:

$$\|\Psi(t, s)\| \leq K e^{\beta(t-s)} \quad \text{für } t \leq s, \quad (1.41)$$

$$g(t, 0, p) = 0, \quad (1.42)$$

$$\|g(t, y, p) - g(t, \bar{y}, p)\| \leq L \|y - \bar{y}\|, \quad (1.43)$$

mit Konstanten $\beta \in \mathbb{R}$, $K \geq 1$ und $L \geq 0$. Dann gilt für beliebiges $\eta < \beta - KL$ und $\tau \in I$: Ist für alle $p \in \mathcal{P}$ die Abbildung $g_0(\cdot, p)$ η^+ -quasibeschränkt mit

$$\|g_0(\cdot, p)\|_{\tau, \eta}^+ \leq M \quad \text{für ein } M \in \mathbb{R}_0^+, \quad (1.44)$$

so besitzt (1.40) für jedes $p \in \mathcal{P}$ genau eine η^+ -quasibeschränkte Lösung $\mu(\cdot, p)$ und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \eta}^+ \leq \frac{K}{\beta - \eta - KL} \|g_0(\cdot, p)\|_{\tau, \eta}^+. \quad (1.45)$$

Darüberhinaus ist die Abbildung $\mu : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ stetig. Ist $J = \mathbb{R}$ und $g_0(\cdot, p)$ sogar η -quasibeschränkt, so ist auch $\mu(\cdot, p)$ η -quasibeschränkt und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\eta} \leq \frac{K}{\beta - \eta - KL} \|g_0(\cdot, p)\|_{\eta}. \quad (1.46)$$

Beweis: Der Beweis könnte ohne Probleme analog zum Beweis von Lemma 1.2.2 durchgeführt werden. Um die Dualität zwischen den jeweils vorliegenden Situationen näher zu beleuchten, soll im folgenden jedoch Lemma 1.2.4 unmittelbar auf Lemma 1.2.2 zurückgeführt werden.

Definiert man $I := -J$, $A(t) := -B(-t)$, $f(t, x, p) := -g(-t, x, p)$, $f_0(t, p) := -g_0(-t, p)$, $\Phi(t, s) := \Psi(-t, -s)$, $\alpha := -\beta$ und $\gamma := -\eta$, so ist $\Phi(t, s)$ die Übergangsmatrix von $\dot{x} = A(t)x$ und der kontinuierliche dynamische Prozeß

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, p) + f_0(t, p) \quad (1.47)$$

erfüllt wegen (1.41), (1.42), (1.43) und (1.44) die Voraussetzungen (1.23), (1.24), (1.25) und (1.26) von Lemma 1.2.2; I ist nach links unbeschränkt, da J nach rechts unbeschränkt ist. Ferner gilt:

- Die Ungleichung $\gamma > \alpha + KL$ von Lemma 1.2.2 ist der Ungleichung $\eta < \beta - KL$ von Lemma 1.2.4 äquivalent.
- Eine Funktion $\lambda(t)$ ist genau dann Lösung von (1.47) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$, wenn $\lambda(-t)$ eine Lösung von (1.40) zum Parameter p ist.
- Eine Funktion $\lambda(t)$ ist genau dann γ^- -quasibeschränkt, wenn $\lambda(-t)$ η^+ -quasibeschränkt ist. Insbesondere ist also $f_0(\cdot, p)$ genau dann γ^- -quasibeschränkt, wenn $g_0(\cdot, p)$ η^+ -quasibeschränkt ist.

Damit sind die Behauptungen in Lemma 1.2.4 direkte Folgerungen aus den entsprechenden Aussagen von Lemma 1.2.2; die Abschätzungen (1.45) und (1.46) folgen unmittelbar aus (1.27) und (1.28). \diamond

Durch völlig analoge Überlegungen läßt sich das folgende Gegenstück zu Lemma 1.2.3 beweisen.

Lemma 1.2.5 Gegeben sei der kontinuierliche dynamische Prozeß

$$\boxed{\dot{y} = B(t)y + g(t, y) + g_0(t)} \quad (1.48)$$

mit einem nach links unbeschränkten Intervall $J \subset \mathbb{R}$, einem Banachraum \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $B : J \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, $g : J \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ und $g_0 : J \rightarrow \mathcal{Y}$; Ψ sei die Übergangsabbildung des linearen Prozesses $\dot{y} = B(t)y$. Ferner gelte für beliebige $t, s \in J$ und $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$:

$$\|\Psi(t, s)\| \leq K e^{\beta(t-s)} \quad \text{für } t \leq s,$$

$$g(t, 0) = 0,$$

$$\|g(t, y) - g(t, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\|,$$

mit Konstanten $\beta \in \mathbb{R}$, $K \geq 1$ und $L \geq 0$. Dann gilt für beliebiges $\eta < \beta - KL$ und $\tau \in J$: Ist g_0 eine γ^- -quasibeschränkte Abbildung, so ist jede Lösung $\mu : J \rightarrow \mathcal{Y}$ von (1.48) ebenfalls γ^- -quasibeschränkt und es gilt:

$$\|\mu\|_{\tau, \eta}^- \leq K\|\mu(\tau)\|e^{-\eta\tau} + \frac{K}{\beta - \eta - KL}\|g_0\|_{\tau, \eta}^-.$$

Mit Lemma 1.2.3 und Lemma 1.2.4 sind bereits alle Hilfsmittel zur Konstruktion invarianter Faserbündel bei kontinuierlichen dynamischen Prozessen bereitgestellt, so daß im nächsten Abschnitt der *Hauptsatz über invariante Faserbündel* bewiesen werden kann.

Noch eine abschließende Bemerkung zu Lemma 1.2.2 und Lemma 1.2.5: Diese Hilfssätze werden beim Beweis des Hauptsatzes nicht benötigt, da man sie im vorliegenden kontinuierlichen Fall durch eine einfache Anwendung der Zeitumkehr ersetzen kann. (Ganz im Gegensatz zu dem in Kapitel 2 behandelten diskreten Fall!) Sie wurden dennoch in diesem Abschnitt explizit angegeben, da sie einerseits für sich genommen bereits interessante Ergebnisse sind, und da man an ihnen andererseits die beim Beweis des Hauptsatzes verwendete Zeitumkehr exemplarisch vorführen kann.

1.3 Der Hauptsatz über invariante Faserbündel

Wie bereits mehrfach angedeutet wurde, soll in diesem Abschnitt für gewisse nichtautonome Differentialgleichungen in Banachräumen die Existenz invarianter Faserbündel bewiesen werden. Die Konstruktion dieser Faserbündel verwendet den im letzten Abschnitt vorgestellten Begriff der quasibeschränkten Lösung.

Bevor der zentrale Satz 1.3.1 angegeben und bewiesen wird, sollen die grundlegenden Gedanken am Beispiel homogener linearer autonomer Systeme kurz dargelegt werden. Sei dazu das System

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = Ax \\ \dot{y} = By \end{array}} \quad (1.49)$$

mit Matrizen $A \in \mathbb{K}^{M \times M}$ und $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$ gegeben. Ferner gelte $\sigma_{\max}^r(A) < \alpha < \beta < \sigma_{\min}^r(B)$ mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für die Übergangsmatrizen $\Phi(t, s)$ bzw. $\Psi(t, s)$ von $\dot{x} = Ax$ bzw. $\dot{y} = By$ gilt dann wie im letzten Abschnitt:

$$\|\Phi(t, s)\| \leq K e^{\alpha(t-s)} \quad \text{für } t \geq s$$

$$\|\Psi(t, s)\| \leq K e^{\beta(t-s)} \quad \text{für } t \leq s$$

mit einer Konstanten $K \geq 1$. Die Lemmata des letzten Abschnittes ergeben für $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$:

- Alle Lösungen von $\dot{x} = Ax$ sind γ^+ -quasibeschränkt.
- Die triviale Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist die einzige γ^- -quasibeschränkte Lösung.
- Alle Lösungen von $\dot{y} = By$ sind γ^- -quasibeschränkt.
- Die triviale Lösung von $\dot{y} = By$ ist die einzige γ^+ -quasibeschränkte Lösung.

Setzt man nun

$$\begin{aligned} S_0 &:= \{(\tau, \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N : \eta = 0\}, \\ R_0 &:= \{(\tau, \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N : \xi = 0\} \end{aligned}$$

und bezeichnet $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ die allgemeine Lösung von (1.49), so folgt mit obigen Aussagen:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(\tau, \xi, \eta) : \lambda_2(\cdot; \tau, \xi, \eta) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt}\}, \\ R_0 &= \{(\tau, \xi, \eta) : \lambda_1(\cdot; \tau, \xi, \eta) \text{ ist } \gamma^-\text{-quasibeschränkt}\}. \end{aligned}$$

Ferner sind sowohl S_0 als auch R_0 invariante lineare Unterräume für (1.49): Eine Lösung, die auf S_0 oder R_0 startet, bleibt für alle $t \in \mathbb{R}$ in dem jeweiligen Unterraum.

Diese Konstruktion invarianter Mengen mittels quasibeschränkter Lösungen läßt sich auch auf gewisse nichtlineare Prozesse übertragen. Die invarianten Mengen sind im allgemeinen jedoch keine linearen Räume mehr, sondern invariante Faserbündel. Die genauen Ergebnisse sind in dem folgenden Satz enthalten, der bereits in AULBACH [3] bzw. AULBACH [4] für parameterunabhängige, endlichdimensionale, autonome bzw. nichtautonome Differentialgleichungssysteme bewiesen wurde.

Satz 1.3.1 *Gegeben sei der von einem Parameter $p \in \mathcal{P}$ abhängige Prozeß*

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + F(t, x, y, p) \\ \dot{y} &= B(t)y + G(t, x, y, p) \end{aligned}} \quad (1.50)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} , \mathcal{Y} und \mathcal{P} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, $F : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit $F(t, 0, 0, p) \equiv 0$, $G(t, 0, 0, p) \equiv 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathcal{P}$. Ferner gelte:

(H1) Die Übergangsabbildungen Φ bzw. Ψ der linearen Prozesse $\dot{x} = A(t)x$ bzw. $\dot{y} = B(t)y$ erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, s)\| &\leq Ke^{\alpha(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s, \\ \|\Psi(t, s)\| &\leq Ke^{\beta(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $\alpha < \beta$.

(H2) Für alle $t \in \mathbb{R}$, $p \in \mathcal{P}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(t, x, y, p) - F(t, \bar{x}, \bar{y}, p)\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(t, x, y, p) - G(t, \bar{x}, \bar{y}, p)\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$.

Wegen Satz 1.1.1 existieren alle Lösungen von (1.50) auf ganz \mathbb{R} ; die allgemeine Lösung von (1.50) sei $\lambda(t; \tau, \xi, \eta, p) = (\lambda_1(t; \tau, \xi, \eta, p), \lambda_2(t; \tau, \xi, \eta, p))$. Mit $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$ gelten dann folgende Aussagen:

(a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung $s_0 : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit

$$\begin{aligned} S_0 &:= \{(\tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) : \tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{X}, p \in \mathcal{P}\} \\ &= \{(\tau, \xi, \eta, p) : \lambda_2(\cdot; \tau, \xi, \eta, p) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt}\}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist stetig und es gilt:

(i) Für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathcal{P}$ ist $s_0(\tau, 0, p) = 0$.

(ii) Für alle $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\|s_0(\tau, \xi_1, p) - s_0(\tau, \xi_2, p)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|.$$

(iii) Für alle $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)\|_{\tau, \gamma}^+ &\leq \left(K + \frac{4K^3L^2}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \right) \|\xi\| e^{-\gamma\tau} \\ \|\lambda_2(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)\|_{\tau, \gamma}^+ &\leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi\| e^{-\gamma\tau}, \end{aligned}$$

d.h. $\lambda(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)$ ist γ^+ -quasibeschränkt.

(iv) Der Graph S_0 ist ein invariantes Faserbündel von (1.50) in folgendem Sinne: Ist $(\tau, \xi, \eta, p) \in S_0$, so gilt $(t, \lambda(t; \tau, \xi, \eta, p), p) \in S_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Man nennt S_0 das S_0 -Faserbündel von (1.50).

(b) Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung $r_0 : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ mit

$$\begin{aligned} R_0 &:= \{(\tau, r_0(\tau, \eta, p), \eta, p) : \tau \in \mathbb{R}, \eta \in \mathcal{Y}, p \in \mathcal{P}\} \\ &= \{(\tau, \xi, \eta, p) : \lambda_1(\cdot; \tau, \xi, \eta, p) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\}. \end{aligned}$$

Auch die Abbildung r_0 ist stetig und es gilt ferner:

(i) Für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathcal{P}$ ist $r_0(\tau, 0, p) = 0$.

(ii) Für alle $\tau \in \mathbb{R}$, $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{Y}$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\|r_0(\tau, \eta_1, p) - r_0(\tau, \eta_2, p)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

(iii) Für alle $\tau \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathcal{Y}$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(\cdot; \tau, r_0(\tau, \eta, p), \eta, p)\|_{\tau, \gamma}^- &\leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\eta\| e^{-\gamma\tau}, \\ \|\lambda_2(\cdot; \tau, r_0(\tau, \eta, p), \eta, p)\|_{\tau, \gamma}^- &\leq \left(K + \frac{4K^3L^2}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \right) \|\eta\| e^{-\gamma\tau} \end{aligned}$$

d.h. $\lambda(\cdot; \tau, r_0(\tau, \eta, p), \eta, p)$ ist γ^- -quasibeschränkt.

(iv) Der Graph R_0 ist ein invariantes Faserbündel von (1.50), das sogenannte R_0 -Faserbündel.

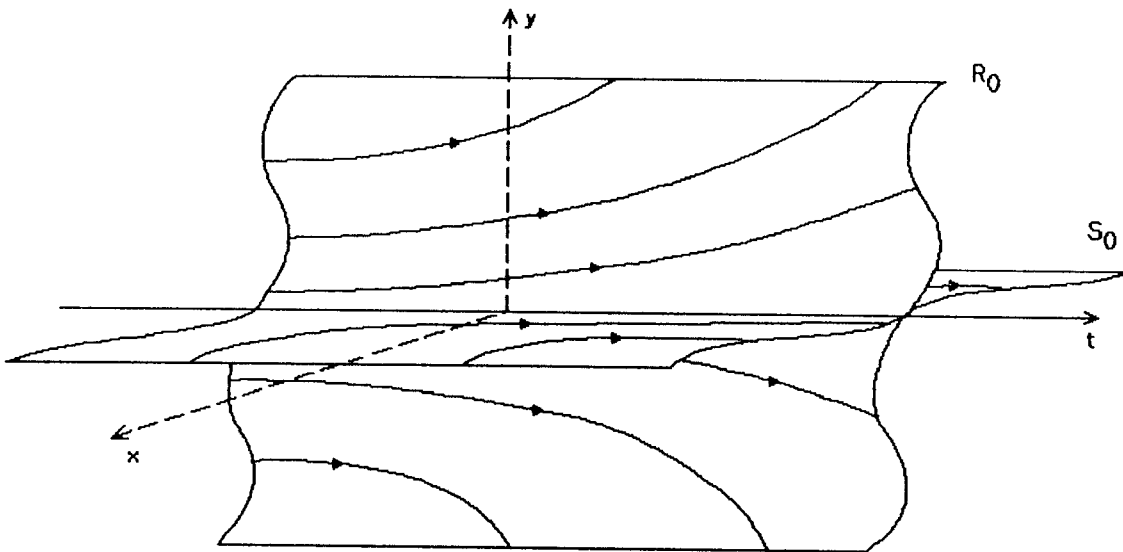


Abbildung 1.4: Die invarianten Faserbündel des Hauptsatzes

(c) Die invarianten Faserbündel S_0 und R_0 haben nur die triviale Lösung gemeinsam, d.h.:

$$S_0 \cap R_0 = \{(\tau, 0, 0, p) : \tau \in \mathbb{R}, p \in \mathcal{P}\}.$$

Mit anderen Worten: Die triviale Lösung ist die einzige γ -quasibeschränkte Lösung von (1.50).

Bemerkung: Die Abschätzungen in (a),(iii) und (b),(iii) implizieren die folgenden Charakterisierungen von S_0 und R_0 :

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(\tau, \xi, \eta, p) : \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta, p) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt}\}, \\ R_0 &= \{(\tau, \xi, \eta, p) : \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta, p) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\}. \end{aligned}$$

Diese Charakterisierungen werden in den folgenden Abschnitten mehrfach verwendet.

Beweis: (a) Seien zunächst $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathcal{X}$ beliebig, aber fest gewählt.

Behauptung: Zu jedem $p \in \mathcal{P}$ existiert genau ein $s_0(\tau, \xi, p) \in \mathcal{Y}$, so daß $\lambda_2(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)$ γ^+ -quasibeschränkt ist.

Der Beweis dieser Behauptung verwendet den Banachschen Fixpunktsatz. Betrachte dazu den linearen Raum \mathcal{B}_τ aller stetigen Abbildungen $\mu : [\tau, \infty) \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für beliebiges $p \in \mathcal{P}$ ist $\mu(\cdot, p) : [\tau, \infty) \rightarrow \mathcal{Y}$ eine γ^+ -quasibeschränkte Abbildung.
- Die Menge $\{\|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ : p \in \mathcal{P}\}$ ist nach oben beschränkt.

Dieser Raum ist mit der Norm

$$\|\mu\| := \sup\{\|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ : p \in \mathcal{P}\}$$

ein Banachraum. Sei $\mu \in \mathcal{B}_\tau$ beliebig. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, x, \mu(t, p), p) \quad , \quad t \geq \tau \quad , \quad x(\tau) = \xi$$

wegen (H2) und Satz 1.1.1 für beliebiges $p \in \mathcal{P}$ eine Lösung $\nu(\cdot, p)$ auf $[\tau, \infty)$, und die Abbildung $\nu : [\tau, \infty) \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ ist stetig. Gemäß Lemma 1.2.3 ist $\nu(\cdot, p)$ darüberhinaus für alle $p \in \mathcal{P}$ γ^+ -quasibeschränkt mit

$$\|\nu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq K\|\xi\|e^{-\gamma\tau} + \frac{K}{\gamma - \alpha - KL}\|F(\cdot, 0, \mu(\cdot, p), p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq K\|\xi\|e^{-\gamma\tau} + \frac{KL}{\gamma - \alpha - KL}\|\mu\|.$$

Betrachte nun die Differentialgleichung

$$\dot{y} = B(t)y + G(t, \nu(t, p), \mu(t, p), p) \quad , \quad t \geq \tau. \quad (1.51)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \|G(t, \nu(t, p), \mu(t, p), p)\|e^{-\gamma t} &\leq L\|\nu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ + L\|\mu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq \\ &\leq KL\|\xi\|e^{-\gamma\tau} + \left(\frac{KL^2}{\gamma - \alpha - KL} + L\right)\|\mu\| \end{aligned} \quad (1.52)$$

für alle $t \geq \tau$ und $p \in \mathcal{P}$ existiert nach Lemma 1.2.4 für jeden Parameterwert $p \in \mathcal{P}$ genau eine γ^+ -quasibeschränkte Lösung $\mu^*(\cdot, p) : [\tau, \infty) \rightarrow \mathcal{Y}$ von (1.51). Ferner ist die Abbildung $\mu^* : [\tau, \infty) \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ stetig und wegen (1.45) und (1.52) in \mathcal{B}_τ . Damit läßt sich durch

$$T_{\tau, \xi} \mu := \mu^*$$

eine Abbildung $T_{\tau, \xi} : \mathcal{B}_\tau \rightarrow \mathcal{B}_\tau$ definieren.

Bevor der Banachsche Fixpunktsatz auf $T_{\tau, \xi}$ angewandt werden kann, müssen noch einige Abschätzungen hergeleitet werden.

Seien dazu $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{B}_\tau$ und $p \in \mathcal{P}$ beliebig, aber fest. $\nu_i(\cdot, p)$ sei die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, x, \mu_i(t, p), p) \quad , \quad t \geq \tau \quad , \quad x(\tau) = \xi_i.$$

Dann ist $\nu(\cdot, p) := \nu_1(\cdot, p) - \nu_2(\cdot, p)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, x + \nu_2(t, p), \mu_1(t, p), p) - F(t, \nu_2(t, p), \mu_2(t, p), p) \quad , \quad t \geq \tau,$$

die den Voraussetzungen von Lemma 1.2.3 genügt. (Die Voraussetzung (H2) impliziert $\gamma > \alpha + KL$.) Damit erhält man

$$\|\nu(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq K\|\nu(\tau, p)\|e^{-\gamma\tau} + \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL}\|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+,$$

d.h.

$$\|\nu_1(\cdot, p) - \nu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq K\|\xi_1 - \xi_2\|e^{-\gamma\tau} + \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL}\|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+. \quad (1.53)$$

Sei nun $\mu_i^* := T_{\tau, \xi} \mu_i$. Dann ist $\mu^*(\cdot, p) := \mu_1^*(\cdot, p) - \mu_2^*(\cdot, p)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y} = B(t)y + G(t, \nu_1(t, p), \mu_1(t, p), p) - G(t, \nu_2(t, p), \mu_2(t, p), p) \quad , \quad t \geq \tau,$$

wobei für alle $t \geq \tau$ mit (1.53) die folgende Abschätzung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} &\|G(t, \nu_1(t, p), \mu_1(t, p), p) - G(t, \nu_2(t, p), \mu_2(t, p), p)\|e^{-\gamma t} \leq \\ &\leq L\|\nu_1(\cdot, p) - \nu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ + L\|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq \\ &\leq LK\|\xi_1 - \xi_2\|e^{-\gamma\tau} + \frac{2KL^2}{\beta - \alpha - 2KL}\|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ + L\|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ = \\ &= LK\|\xi_1 - \xi_2\|e^{-\gamma\tau} + \frac{L(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha - 2KL}\|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+. \end{aligned}$$

Da $\mu^*(\cdot, p)$ nach Konstruktion γ^+ -quasibeschränkt ist, liefert die Anwendung von Lemma 1.2.4

$$\|\mu^*(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq \frac{2K^2L}{\beta - \alpha} \|\xi_1 - \xi_2\| e^{-\gamma\tau} + \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+,$$

und mit $T_{\tau, \xi_i} \mu_i = \mu_i^*$ folgt schließlich

$$\|T_{\tau, \xi_1} \mu_1(\cdot, p) - T_{\tau, \xi_2} \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq \frac{2K^2L}{\beta - \alpha} \|\xi_1 - \xi_2\| e^{-\gamma\tau} + \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+. \quad (1.54)$$

Damit lassen sich nun die Aussagen von (a) beweisen:

Für $\xi = \xi_1 = \xi_2$ und beliebiges $p \in \mathcal{P}$ liefert (1.54) die Ungleichung

$$\|T_{\tau, \xi} \mu_1(\cdot, p) - T_{\tau, \xi} \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1 - \mu_2\|,$$

und durch Bildung des Supremums schließlich

$$\|T_{\tau, \xi} \mu_1 - T_{\tau, \xi} \mu_2\| \leq \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1 - \mu_2\|.$$

Wegen $L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$ ist $2KL < \beta - \alpha - 2KL$, d.h. $T_{\tau, \xi}$ ist eine Kontraktion auf \mathcal{B}_τ — besitzt also genau einen Fixpunkt $\mu_{\tau, \xi} \in \mathcal{B}_\tau$.

Setzt man $s_0(\tau, \xi, p) := \mu_{\tau, \xi}(\tau, p)$, so ist offensichtlich $\lambda_2(t; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) \equiv \mu_{\tau, \xi}(t, p)$ auf $[\tau, \infty)$, also ist $\lambda_2(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)$ γ^+ -quasibeschränkt.

Ist umgekehrt $\lambda_2(\cdot; \tau, \xi, \eta, p)$ γ^+ -quasibeschränkt, so erhält man wie im Beweis von Lemma 1.2.2, daß die Einschränkung auf $[\tau, \infty)$ gleich $\mu_{\tau, \xi}(\cdot, p)$ sein muß, d.h. $\eta = \mu_{\tau, \xi}(\tau, p) = s_0(\tau, \xi, p)$.

Beweis von (i): Gemäß Voraussetzung gilt für beliebige $\tau \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathcal{P}$: $\lambda_2(t; \tau, 0, 0, p) \equiv 0$ auf \mathbb{R} , d.h. $\lambda_2(\cdot; \tau, 0, 0, p)$ ist γ^+ -quasibeschränkt. Somit folgt $s_0(\tau, 0, p) = 0$ aus der bereits bewiesenen Eindeutigkeitsaussage.

Beweis von (ii) und (iii): Seien μ_{τ, ξ_1} und μ_{τ, ξ_2} die Fixpunkte von T_{τ, ξ_1} bzw. T_{τ, ξ_2} . Dann gilt wegen (1.54) für beliebige $p \in \mathcal{P}$

$$\|\mu_{\tau, \xi_1}(\cdot, p) - \mu_{\tau, \xi_2}(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq \frac{2K^2L}{\beta - \alpha} \|\xi_1 - \xi_2\| e^{-\gamma\tau} + \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_{\tau, \xi_1}(\cdot, p) - \mu_{\tau, \xi_2}(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+$$

oder

$$\|\mu_{\tau, \xi_1}(\cdot, p) - \mu_{\tau, \xi_2}(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi_1 - \xi_2\| e^{-\gamma\tau}, \quad (1.55)$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned} \|s_0(\tau, \xi_1, p) - s_0(\tau, \xi_2, p)\| &= \|\mu_{\tau, \xi_1}(\tau, p) - \mu_{\tau, \xi_2}(\tau, p)\| \leq \\ &\leq \|\mu_{\tau, \xi_1}(\cdot, p) - \mu_{\tau, \xi_2}(\cdot, p)\|_{\tau, \gamma}^+ e^{\gamma\tau} \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|. \end{aligned}$$

Für $\xi_2 = 0$ gilt offensichtlich $\mu_{\tau, \xi_2} = 0$ — und (1.55) ergibt mit $\xi = \xi_1$ genau die in (iii) geforderte Abschätzung für $\lambda_2(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)$. Mit Lemma 1.2.3, angewandt auf

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, x, \lambda_2(t; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p), p),$$

folgt daraus auch unmittelbar die Abschätzung für $\lambda_1(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)$.

Beweis von (iv): Seien $(\tau, \xi, \eta, p) \in S_0$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist nach dem bereits bewiesenen $\lambda_2(\cdot; \tau, \xi, \eta, p)$ γ^+ -quasibeschränkt. Wegen $\lambda_2(t; t_0, \lambda(t_0; \tau, \xi, \eta, p), p) \equiv \lambda_2(t; \tau, \xi, \eta, p)$ auf \mathbb{R} (vergleiche (1.9)) ist auch die Funktion $\lambda_2(\cdot; t_0, \lambda(t_0; \tau, \xi, \eta, p), p)$ γ^+ -quasibeschränkt, d.h. $(t_0, \lambda(t_0; \tau, \xi, \eta, p), p) \in S_0$.

Bleibt nur noch die Stetigkeit von s_0 nachzuweisen. Sei dazu ein Punkt $(\tau_0, \xi_0, p_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben. Wegen $s_0(\tau_0, \xi_0, p) = \mu_{\tau_0, \xi_0}(\tau_0, p)$ und $\mu_{\tau_0, \xi_0} \in \mathcal{B}_{\tau_0}$ ist zunächst die Abbildung $s_0(\tau_0, \xi_0, \cdot) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ stetig, woraus man mit Lemma A.2.5 und (ii) sofort folgert:

Die Abbildung $s_0(\tau_0, \cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ ist stetig.

Beachtet man ferner für alle $(\tau, \xi, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$ die Gültigkeit der Abschätzung

$$\|s_0(\tau, \xi, p) - s_0(\tau_0, \xi_0, p_0)\| \leq \|s_0(\tau, \xi, p) - s_0(\tau_0, \xi, p)\| + \|s_0(\tau_0, \xi, p) - s_0(\tau_0, \xi_0, p_0)\| ,$$

so ist also — um die Stetigkeit von s_0 in (τ_0, ξ_0, p_0) zu bestätigen — nur noch die folgende Behauptung zu beweisen:

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $\tau \in B_\delta(\tau_0)$, $\xi \in B_1(\xi_0)$ und $p \in \mathcal{P}$ die Ungleichung

$$\|s_0(\tau, \xi, p) - s_0(\tau_0, \xi, p)\| < \varepsilon \quad (1.56)$$

erfüllt ist.

Zunächst existiert wegen

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(\tau; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) &= A(\tau)\xi + F(\tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) \quad \text{und} \\ \dot{\lambda}_2(\tau; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) &= B(\tau)s_0(\tau, \xi, p) + G(\tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) \end{aligned}$$

mit (H2), (i) und (ii) eine Konstante $M > 0$, so daß für beliebige $\tau \in \overline{B_1(\tau_0)}$, $\xi \in \overline{B_2(\xi_0)}$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\|\dot{\lambda}_1(\tau; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|\dot{\lambda}_2(\tau; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)\| \leq M . \quad (1.57)$$

Definiert man nun $\tilde{\delta} := \min\{\frac{1}{2M}, 1\}$, so gilt für alle $(\tau, \xi, p) \in B_{\tilde{\delta}}(\tau_0) \times B_1(\xi_0) \times \mathcal{P}$:

$$\lambda_1(t; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) \in B_2(\xi_0) \quad \text{für alle} \quad t \in B_{\tilde{\delta}}(\tau_0) , \quad (1.58)$$

d.h. für jedes $p \in \mathcal{P}$ verläuft die Projektion der Lösung $\lambda(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)$ auf den Raum \mathcal{X} im Zeitintervall $(\tau_0 - \tilde{\delta}, \tau_0 + \tilde{\delta})$ in der Menge $B_2(\xi_0)$, und die Ableitungen der entsprechenden Komponentenabbildungen genügen den Abschätzungen in (1.57).

Beweis von (1.58): Angenommen, es existieren $(\tau, \xi, p) \in B_{\tilde{\delta}}(\tau_0) \times B_1(\xi_0) \times \mathcal{P}$ und $\tau^* \in B_{\tilde{\delta}}(\tau_0)$ mit

$$\|b(\tau^*)\| \geq 2 \quad \text{und} \quad b(t) := \lambda_1(t; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) - \xi_0 .$$

Die Abbildung $b : B_{\tilde{\delta}}(\tau_0) \rightarrow \mathcal{X}$ ist stetig differenzierbar mit Ableitung $\dot{\lambda}_1(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)$, und gemäß der Wahl von (τ, ξ, p) gilt $\|b(\tau)\| = \|\xi - \xi_0\| < 1$. Ist nun $\tau^* > \tau$, so existiert ein $\tau < \hat{\tau} \leq \tau^*$ mit $\|b(\hat{\tau})\| = 2$ und $\|b(t)\| < 2$ für alle $t \in [\tau, \hat{\tau}]$. Der Mittelwertsatz liefert dann mit (1.57):

$$\begin{aligned} \|b(\hat{\tau})\| &\leq \|b(\hat{\tau}) - b(\tau)\| + \|b(\tau)\| < \\ &< \sup\{\|\dot{b}(t)\| : t \in (\tau, \hat{\tau})\} \cdot |\hat{\tau} - \tau| + 1 \leq \\ &\leq M \cdot 2\tilde{\delta} + 1 = 2 , \end{aligned}$$

im Widerspruch zu $\|b(\hat{\tau})\| = 2$. Völlig analog erhält man im Fall $\tau^* < \tau$ einen Widerspruch. Damit war die obige Annahme falsch, d.h. (1.58) ist bewiesen.

Wähle nun abschließend $0 < \delta \leq \tilde{\delta}$ so, daß die Ungleichung

$$\left(M + M \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \right) \cdot \delta \leq \varepsilon$$

erfüllt ist. Dann liefert der Mittelwertsatz unter Verwendung der Beziehungen (1.57) und (1.58) für alle $\tau \in B_\delta(\tau_0)$, $\xi \in B_1(\xi_0)$ und $p \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} \|s_0(\tau, \xi, p) - s_0(\tau_0, \xi, p)\| &= \|\lambda_2(\tau; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) - s_0(\tau_0, \xi, p)\| \leq \\ &\leq \|\lambda_2(\tau; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) - \lambda_2(\tau_0; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p)\| + \\ &\quad + \|\lambda_2(\tau_0; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) - s_0(\tau_0, \xi, p)\| \leq \\ &\leq M|\tau - \tau_0| + \\ &\quad + \|s_0(\tau_0, \lambda_1(\tau_0; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p), p) - s_0(\tau_0, \xi, p)\| \leq \\ &\leq M|\tau - \tau_0| + \\ &\quad + \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\lambda_1(\tau_0; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi, p), p) - \xi\| \leq \\ &\leq M|\tau - \tau_0| + M \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} |\tau - \tau_0| < \\ &< \left(M + M \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \right) \cdot \delta \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. (1.56) ist erfüllt. Damit ist die Stetigkeit von s_0 in (τ_0, ξ_0, p_0) bewiesen.

(b) Dieser Teil kann entweder völlig analog zu (a) bewiesen werden, oder mittels Zeitumkehr wie im Beweis von Lemma 1.2.4 unmittelbar auf (a) zurückgeführt werden.

(c) Sei $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ eine beliebige γ -quasibeschränkte Lösung von (1.50) für $p \in \mathcal{P}$. Dann ist wegen (H2) auch $G(\cdot, \mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot), p)$ γ -quasibeschränkt und Lemma 1.2.4 liefert: μ_2 ist die eindeutig bestimmte γ -quasibeschränkte Lösung von

$$\dot{y} = B(t)y + G(t, \mu_1(t), \mu_2(t), p)$$

und es gilt:

$$\|\mu_2\|_\gamma \leq \frac{K}{\beta - \gamma} \|G(\cdot, \mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot), p)\|_\gamma \leq \frac{2KL}{\beta - \alpha} (\|\mu_1\|_\gamma + \|\mu_2\|_\gamma).$$

Auflösen nach $\|\mu_2\|_\gamma$ ergibt

$$\|\mu_2\|_\gamma \leq \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1\|_\gamma. \quad (1.59)$$

Analog erhält man mit Lemma 1.2.2 angewandt auf $\dot{x} = A(t)x + F(t, \mu_1(t), \mu_2(t), p)$:

$$\|\mu_1\|_\gamma \leq \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_2\|_\gamma,$$

und hieraus mit (1.59):

$$\|\mu_i\|_\gamma \leq \left(\frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \right)^2 \|\mu_i\|_\gamma \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (1.60)$$

Gemäß Voraussetzung ist $L < \frac{\beta-\alpha}{4K}$ und damit $\frac{2KL}{\beta-\alpha-2KL} < 1$. Dann ist aber (1.60) nur für $\|\mu_i\|_\gamma = 0$ erfüllbar, d.h. μ ist die Nullfunktion. Damit ist alles bewiesen. \diamond

Satz 1.3.1 kann in der obigen Formulierung auf beliebige kontinuierliche Prozesse, die den Voraussetzungen des Satzes genügen, angewandt werden. Besitzt die rechte Seite von (1.50) weitere Eigenschaften, so stellt sich natürlich die Frage, ob sich diese Eigenschaften auf die Abbildungen s_0 und r_0 übertragen. Den Fall der in t periodischen rechten Seite (mit dem wichtigen Spezialfall der kontinuierlichen dynamischen Systeme) behandelt das folgende Korollar.

Korollar 1.3.2 *Gegeben sei wieder der von einem Parameter $p \in \mathcal{P}$ abhängige Prozeß*

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + F(t, x, y, p) \\ \dot{y} &= B(t)y + G(t, x, y, p) \end{cases} \quad (1.61)$$

mit den Voraussetzungen von Satz 1.3.1. s_0 und r_0 seien die Abbildungen aus Satz 1.3.1. Dann gilt:

- (a) *Sind die Abbildungen A, B, F und G periodisch in t mit Periode $\Theta \in \mathbb{R}^+$, so gilt für alle $\tau \in \mathbb{R}, p \in \mathcal{P}, \xi \in \mathcal{X}$ und $\eta \in \mathcal{Y}$:*

$$\begin{aligned} s_0(\tau + \Theta, \xi, p) &= s_0(\tau, \xi, p) \quad \text{und} \\ r_0(\tau + \Theta, \eta, p) &= r_0(\tau, \eta, p), \end{aligned}$$

d.h. auch s_0 und r_0 sind periodisch in t mit Periode Θ .

- (b) *Ist der Prozeß (1.61) autonom, d.h. sind die Abbildungen A, B, F und G von t unabhängig, so sind auch s_0 und r_0 von t unabhängig. Die Mengen*

$$\begin{aligned} S_0 &:= \{(\xi, s_0(\xi, p), p) : \xi \in \mathcal{X}, p \in \mathcal{P}\} \quad \text{und} \\ R_0 &:= \{(r_0(\eta, p), \eta, p) : \eta \in \mathcal{Y}, p \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

sind also invariante Mannigfaltigkeiten im Phasenraum.

Beweis: Die Aussagen von (b) folgen unmittelbar aus (a), denn eine Abbildung ist genau dann von t unabhängig, wenn sie periodisch in t ist mit beliebiger Periode $\Theta \in \mathbb{R}^+$.

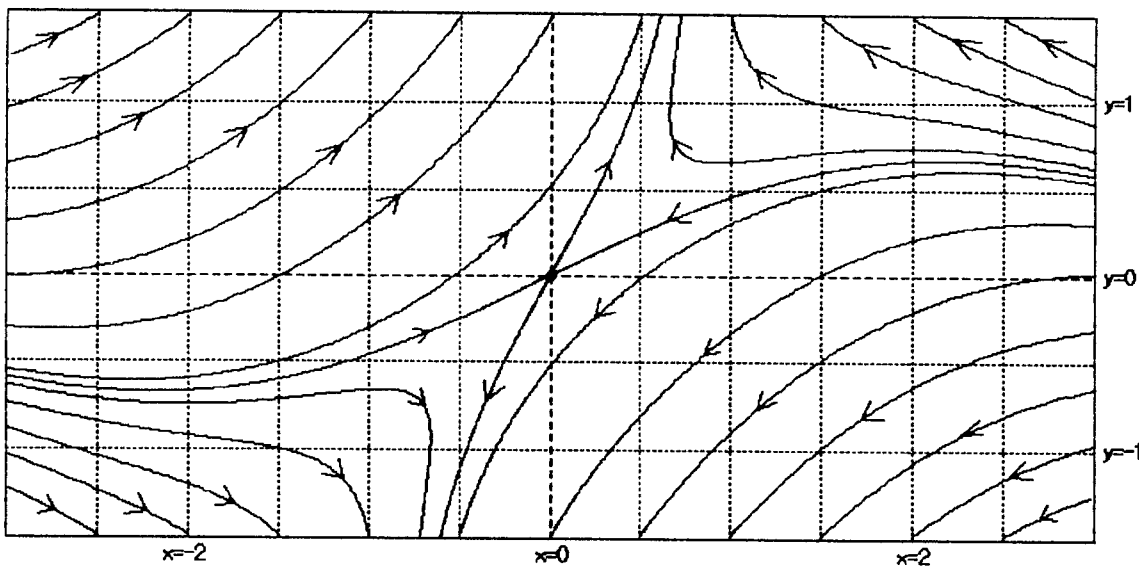
Zum Beweis von (a) seien $\tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ beliebig, aber fest. Bezeichnet $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ die Lösung von (1.61) mit $\mu_1(\tau) = \xi$ und $\mu_2(\tau) = s_0(\tau, \xi, p)$, so ist μ_2 gemäß Satz 1.3.1 γ^+ -quasibeschränkt. Definiert man

$$\nu_1(t) := \mu_1(t - \Theta) \quad \text{und} \quad \nu_2(t) := \mu_2(t - \Theta),$$

so ist wegen der Periodizität von A, B, F und G auch $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ eine Lösung von (1.61). Ferner ist ν_2 γ^+ -quasibeschränkt. Satz 1.3.1 liefert dann

$$\begin{aligned} s_0(\tau + \Theta, \xi, p) &= s_0(\tau + \Theta, \mu_1(\tau + \Theta - \Theta), p) = s_0(\tau + \Theta, \nu_1(\tau + \Theta), p) = \\ &= \nu_2(\tau + \Theta) = \mu_2(\tau) = s_0(\tau, \mu_1(\tau), p) = s_0(\tau, \xi, p). \end{aligned}$$

Die Periodizität von r_0 wird völlig analog bewiesen. \diamond

Abbildung 1.5: Das Phasenportrait des Beispiels für $L = 0.9$

Abschließend sollen Satz 1.3.1 und Korollar 1.3.2 zur Illustration auf das folgende, von einem Parameter $L \in \mathbb{R}$ abhängige, ebene autonome System angewandt werden:

$$\begin{cases} \dot{x} = (L - 2)x + L \sin y \\ \dot{y} = (2 - L)y - L \sin x \end{cases} \quad (1.62)$$

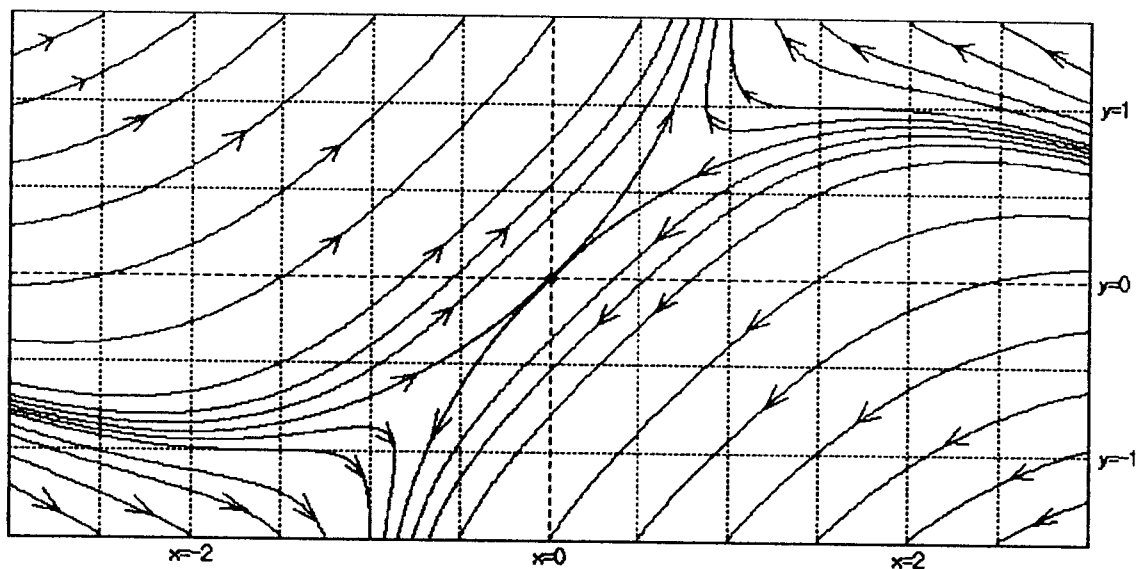
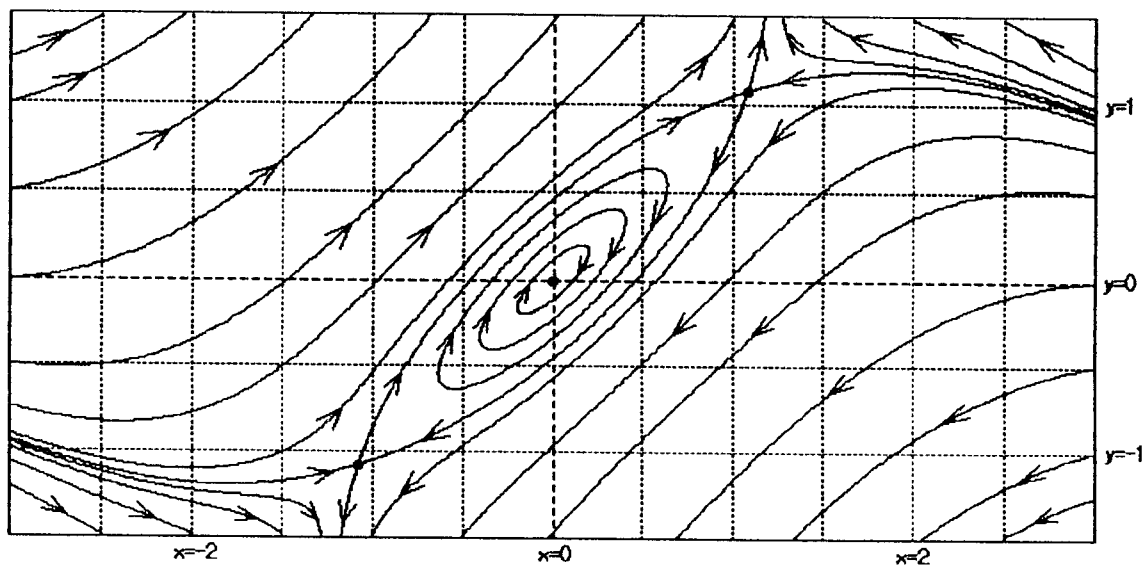
Setzt man $A(t) := -2$, $B(t) := 2$, $F(t, x, y) := Lx + L \sin y$ und $G(t, x, y) := -Ly - L \sin x$, so sind die Voraussetzungen von Satz 1.3.1 und Korollar 1.3.2(b) mit $\alpha = -2$, $\beta = 2$ und $K = 1$ erfüllt, falls die Lipschitzkonstante L kleiner als $\frac{\beta - \alpha}{4K} = 1$ ist. In diesem Fall existieren also im Phasenraum invariante Mannigfaltigkeiten S_0 und R_0 , wobei S_0 aus den Lösungen von (1.62) besteht, die für $t \rightarrow \infty$ beschränkt sind, und R_0 aus den Lösungen, die für $t \rightarrow -\infty$ beschränkt sind. Das Aussehen dieser Mannigfaltigkeiten für $L = 0.9$ ist der Abbildung 1.5 zu entnehmen.

Für $L \geq 1$ erfüllt (1.62) nicht mehr die Voraussetzungen von Satz 1.3.1. Während jedoch im Fall $L = 1.0$ noch immer zwei invariante Mannigfaltigkeiten mit den eben erwähnten Eigenschaften existieren (siehe Abbildung 1.6), ist dies für $L > 1$ nicht mehr gegeben: Die Ruhelage $(0, 0)$ ist lokal von geschlossenen Trajektorien umgeben. Abbildung 1.7 zeigt das Phasenportrait von (1.62) für $L = 1.1$.

Dieses Beispiel zeigt insbesondere, daß die an L gestellte Bedingung in dieser Form unbedingt notwendig ist und nicht abgeschwächt werden kann.

1.4 Invariante Faserbündel durch Lösungen

Betrachtet man noch einmal die in Satz 1.3.1 behandelte Situation, so fällt auf, daß die konstruierten invarianten S_0 - bzw. R_0 -Faserbündel gerade die triviale Lösung von (1.50) gemeinsam haben. Diese Auszeichnung der trivialen Lösung ist ziemlich fragwürdig. Es sollte eigentlich auch möglich sein, invariante Faserbündel zu konstruieren, die sich gerade in einer beliebig vorgegebenen Lösung μ von (1.50) schneiden. Ein entsprechendes Ergebnis enthält das folgende Korollar zum Satz 1.3.1. Die Beweisidee ist denkbar einfach: Man führt die zu konstruierenden

Abbildung 1.6: Das Phasenportrait des Beispiels für $L = 1.0$ Abbildung 1.7: Das Phasenportrait des Beispiels für $L = 1.1$

invarianten Faserbündel durch die vorgegebene Lösung μ auf die S_0 - bzw. R_0 -Faserbündel der Differentialgleichung der gestörten Bewegung zu μ zurück.

Korollar 1.4.1 *Gegeben sei der kontinuierliche dynamische Prozeß*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t, x, y) \\ \dot{y} = B(t)y + G(t, x, y) \end{cases} \quad (1.63)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, $F : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit $F(t, 0, 0) \equiv 0$, $G(t, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{R} . Ferner gelte wie in Satz 1.3.1:

(H1) Die Übergangsabbildungen Φ bzw. Ψ der linearen Prozesse $\dot{x} = A(t)x$ bzw. $\dot{y} = B(t)y$ erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, s)\| &\leq K e^{\alpha(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s, \\ \|\Psi(t, s)\| &\leq K e^{\beta(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $\alpha < \beta$.

(H2) Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(t, x, y) - F(t, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(t, x, y) - G(t, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$.

Wegen Satz 1.1.1 existieren alle Lösungen von (1.63) auf ganz \mathbb{R} ; die allgemeine Lösung von (1.63) sei wie üblich $\lambda(t; \tau, \xi, \eta) = (\lambda_1(t; \tau, \xi, \eta), \lambda_2(t; \tau, \xi, \eta))$. Mit $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$ gilt dann:

(a) Es existiert eine stetige Abbildung $s : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit

$$\begin{aligned} S_{\tau_0, \xi_0, \eta_0} &:= \{(\tau, \xi, s(\tau, \xi, \tau_0, \xi_0, \eta_0)) : \tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{X}\} \\ &= \{(\tau, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt}\} \end{aligned}$$

und

$$\|s(\tau, \xi_1, \tau_0, \xi_0, \eta_0) - s(\tau, \xi_2, \tau_0, \xi_0, \eta_0)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|$$

für beliebige $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$ und $\eta_0 \in \mathcal{Y}$. Ferner ist $S_{\tau_0, \xi_0, \eta_0}$ ein invariantes Faserbündel für (1.63), das S -Faserbündel durch (τ_0, ξ_0, η_0) bzw. durch die Lösung $\lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$.

(b) Es existiert eine stetige Abbildung $r : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ mit

$$\begin{aligned} R_{\tau_0, \xi_0, \eta_0} &:= \{(\tau, r(\tau, \eta, \tau_0, \xi_0, \eta_0), \eta) : \tau \in \mathbb{R}, \eta \in \mathcal{Y}\} \\ &= \{(\tau, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\} \end{aligned}$$

und

$$\|r(\tau, \eta_1, \tau_0, \xi_0, \eta_0) - r(\tau, \eta_2, \tau_0, \xi_0, \eta_0)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\eta_1 - \eta_2\|$$

für beliebige $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0 \in \mathcal{X}$ und $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{Y}$. Ferner ist $R_{\tau_0, \xi_0, \eta_0}$ ein invariantes Faserbündel für (1.63), das R -Faserbündel durch (τ_0, ξ_0, η_0) bzw. durch die Lösung $\lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$.

Beweis: Betrachte für beliebiges $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + \tilde{F}(t, x, y, \tau_0, \xi_0, \eta_0) \\ \dot{y} &= B(t)y + \tilde{G}(t, x, y, \tau_0, \xi_0, \eta_0)\end{aligned}\tag{1.64}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t, x, y, \tau_0, \xi_0, \eta_0) &:= F(t, x + \lambda_1(t; \tau_0, \xi_0, \eta_0), y + \lambda_2(t; \tau_0, \xi_0, \eta_0)) - \\ &\quad F(t, \lambda_1(t; \tau_0, \xi_0, \eta_0), \lambda_2(t; \tau_0, \xi_0, \eta_0)), \\ \tilde{G}(t, x, y, \tau_0, \xi_0, \eta_0) &:= G(t, x + \lambda_1(t; \tau_0, \xi_0, \eta_0), y + \lambda_2(t; \tau_0, \xi_0, \eta_0)) - \\ &\quad G(t, \lambda_1(t; \tau_0, \xi_0, \eta_0), \lambda_2(t; \tau_0, \xi_0, \eta_0)).\end{aligned}$$

Bekanntlich ist (1.64) die Differentialgleichung der gestörten Bewegung zur Lösung $\lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$ von (1.63). Ferner genügt (1.64) den Voraussetzungen von Satz 1.3.1:

- Wegen der Stetigkeit der allgemeinen Lösung von (1.63) sind die Abbildungen $\tilde{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ und $\tilde{G} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ stetig, der Parameterraum ist $\mathcal{P} := \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
- Es gilt $\tilde{F}(t, 0, 0, \tau_0, \xi_0, \eta_0) \equiv 0$ und $\tilde{G}(t, 0, 0, \tau_0, \xi_0, \eta_0) \equiv 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
- Die in Satz 1.3.1 (H2) geforderten Abschätzungen folgen unmittelbar aus der Voraussetzung (H2) des Korollars.

Damit existiert eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $s_0 : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ für (1.64) gemäß Satz 1.3.1(a). Definiert man

$$s(\tau, \xi, \tau_0, \xi_0, \eta_0) := s_0(\tau, \xi - \lambda_1(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0), \tau_0, \xi_0, \eta_0) + \lambda_2(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0),$$

so ist s offensichtlich stetig und erfüllt die in (a) geforderte Abschätzung.

Sei nun $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ beliebig, aber fest gewählt. Sei ferner $(\tau, \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ so, daß $\mu(\cdot) := \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$ γ^+ -quasibeschränkt ist. Dann ist μ gemäß Satz 1.1.2(b) eine γ^+ -quasibeschränkte Lösung von (1.64), d.h. es gilt

$$\mu_2(\tau) = s_0(\tau, \mu_1(\tau), \tau_0, \xi_0, \eta_0)$$

und

$$\mu_1(\tau) = \xi - \lambda_1(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0) \quad , \quad \mu_2(\tau) = \eta - \lambda_2(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0) .$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\eta &= \mu_2(\tau) + \lambda_2(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0) = \\ &= s_0(\tau, \mu_1(\tau), \tau_0, \xi_0, \eta_0) + \lambda_2(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0) = \\ &= s_0(\tau, \xi - \lambda_1(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0), \tau_0, \xi_0, \eta_0) + \lambda_2(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0) = \\ &= s(\tau, \xi, \tau_0, \xi_0, \eta_0) ,\end{aligned}$$

d.h. $(\tau, \xi, \eta) \in S_{\tau_0, \xi_0, \eta_0}$. Ist nun umgekehrt $(\tau, \xi, \eta) \in S_{\tau_0, \xi_0, \eta_0}$, so erhält man für $\mu(\cdot) := \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$: μ ist eine Lösung von (1.64) mit

$$\mu_1(\tau) = \xi - \lambda_1(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0) \quad \text{und} \quad \mu_2(\tau) = \eta - \lambda_2(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0) .$$

Mit $\eta = s(\tau, \xi, \tau_0, \xi_0, \eta_0)$ erhält man

$$\begin{aligned}\mu_2(\tau) &= \eta - \lambda_2(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0) = \\ &= s(\tau, \xi, \tau_0, \xi_0, \eta_0) - \lambda_2(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0) = \\ &= s_0(\tau, \xi - \lambda_1(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0), \tau_0, \xi_0, \eta_0) = \\ &= s_0(\tau, \mu_1(\tau), \tau_0, \xi_0, \eta_0) ,\end{aligned}$$

d.h. $\mu(\cdot) := \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$ ist γ^+ -quasibeschränkt. Die Invarianz von $S_{\tau_0, \xi_0, \eta_0}$ folgt wie im Beweis von Satz 1.3.1. Damit ist (a) bewiesen. Der Beweis von (b) verläuft völlig analog. \diamond

Mit diesem Ergebnis läßt sich der erweiterte Phasenraum als disjunkte Vereinigung von S - bzw. R -Faserbündeln darstellen. Dazu betrachtet man auf der Menge der Lösungen von (1.63) die Äquivalenzrelationen

$$\begin{aligned}\mu \sim_S \nu & :\Leftrightarrow \mu - \nu \text{ ist } \gamma^+ \text{ quasibeschränkt,} \\ \mu \sim_R \nu & :\Leftrightarrow \mu - \nu \text{ ist } \gamma^- \text{ quasibeschränkt.}\end{aligned}$$

Die in Korollar 1.4.1 enthaltenen Charakterisierungen der S - bzw. R -Faserbündel durch Lösungen von (1.63) implizieren die folgenden Aussagen:

- Für beliebiges $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ist die Äquivalenzklasse von $\lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$ bezüglich \sim_S gerade das S -Faserbündel durch (τ_0, ξ_0, η_0) .
- Für beliebiges $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ist die Äquivalenzklasse von $\lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$ bezüglich \sim_R gerade das R -Faserbündel durch (τ_0, ξ_0, η_0) .

Zwei S -Faserbündel sind also entweder disjunkt oder gleich, d.h. der ganze erweiterte Phasenraum läßt sich darstellen als disjunkte Vereinigung von S -Faserbündeln; analoges gilt für R -Faserbündel. Für die weitere Anwendung dieses Ergebnisses im Hinblick auf topologische Äquivalenz wird es von großer Bedeutung sein, "schöne" Repräsentantensysteme der beiden Äquivalenzklassenzerlegungen zu finden. Diese Frage wird im nächsten Abschnitt untersucht.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll Korollar 1.4.1 speziell auf autonome kontinuierliche dynamische Prozesse, d.h. auf dynamische Systeme angewandt werden. Wie in Korollar 1.3.2 gezeigt wurde, übertragen sich Periodizitätseigenschaften der rechten Seite von (1.63) auf das S_0 - bzw. R_0 -Faserbündel. Für beliebige S - bzw. R -Faserbündel gilt diese Aussage nicht mehr: Ist die rechte Seite von (1.63) periodisch in t , so ist die allgemeine Lösung von (1.63) natürlich im allgemeinen nicht mehr periodisch in t , und damit auch nicht die rechte Seite der im Beweis von Korollar 1.4.1 auftretenden Differentialgleichung der gestörten Bewegung. Für die wichtige Klasse der dynamischen Systeme ist es dennoch möglich, interessante (wenn auch nicht mehr invariante) Mannigfaltigkeiten im Phasenraum hervorzuheben. Dazu wird im folgenden das dynamische System

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + F(x, y) \\ \dot{y} = By + G(x, y) \end{cases} \quad (1.65)$$

betrachtet, mit Banachräumen \mathcal{X}, \mathcal{Y} , linearen Abbildungen $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, und stetigen Abbildungen $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, G : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Darüberhinaus erfülle (1.65) die Voraussetzungen von Korollar 1.4.1. Also existieren Abbildungen $s : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ und $r : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ mit den in Korollar 1.4.1 genannten Eigenschaften. Für beliebiges $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ sei

$$\begin{aligned}S_{\xi_0, \eta_0} & := \{(\xi, s(0, \xi, 0, \xi_0, \eta_0)) : \xi \in \mathcal{X}\} \quad \text{die } S\text{-Mannigfaltigkeit durch } (\xi_0, \eta_0) \text{ und} \\ R_{\xi_0, \eta_0} & := \{(r(0, \eta, 0, \xi_0, \eta_0), \eta) : \eta \in \mathcal{Y}\} \quad \text{die } R\text{-Mannigfaltigkeit durch } (\xi_0, \eta_0).\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die S -Mannigfaltigkeit durch $(0, 0)$ gerade die S_0 -Mannigfaltigkeit von (1.65); analoges gilt für die R -Mannigfaltigkeit durch $(0, 0)$. Bezeichnet man die allgemeine Lösung von (1.65) gemäß (1.19) mit $\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, so liefert Korollar 1.4.1 die folgenden Charakterisierungen der eben definierten S - und R -Mannigfaltigkeiten durch beliebiges $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (vergleiche Abbildung 1.8):

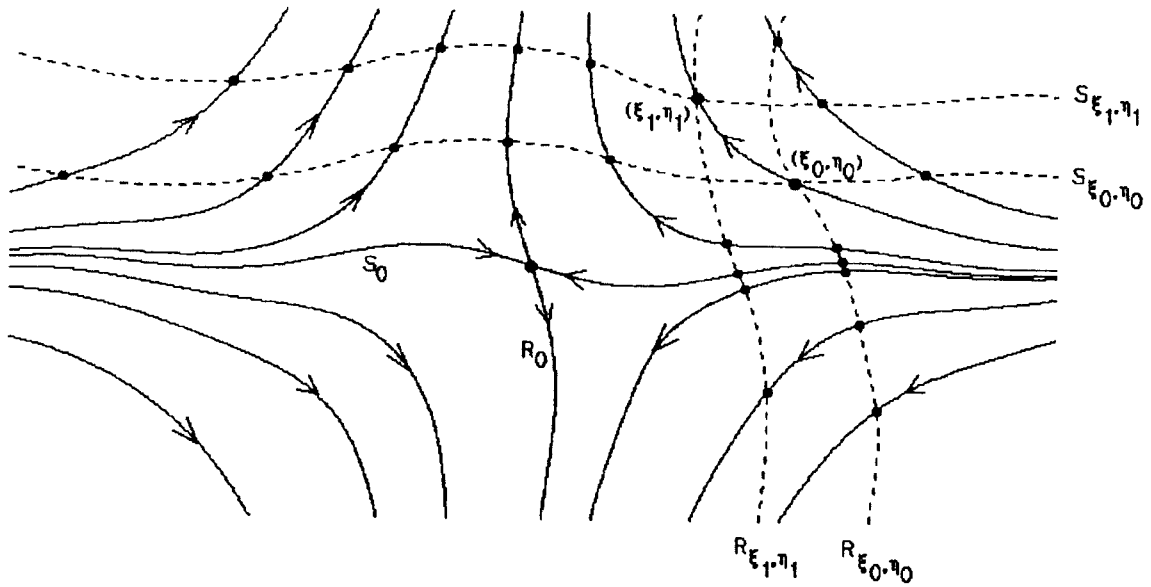


Abbildung 1.8: Anwendung des Korollars auf dynamische Systeme

- S_{ξ_0, η_0} besteht genau aus den Anfangswerten (ξ, η) , für die $\varphi(\cdot; \xi, \eta) - \varphi(\cdot; \xi_0, \eta_0)$ eine γ^+ -quasibeschränkte Funktion ist.
- R_{ξ_0, η_0} besteht genau aus den Anfangswerten (ξ, η) , für die $\varphi(\cdot; \xi, \eta) - \varphi(\cdot; \xi_0, \eta_0)$ eine γ^- -quasibeschränkte Funktion ist.

Wie bereits erwähnt wurde, sind diese S - und R -Mannigfaltigkeiten im allgemeinen nicht invariant im Phasenraum. Dennoch kann man die Wirkung des Flusses von (1.65) auf diese Mannigfaltigkeiten gut beschreiben. Sei dazu für ein $T \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{T}_T : \begin{cases} \mathcal{X} \times \mathcal{Y} & \rightarrow & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \\ (\xi, \eta) & \mapsto & \varphi(T; \xi, \eta) \end{cases}$$

die *Zeit- T -Abbildung* von (1.65). Ist $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ beliebig und definiert man $(\xi_1, \eta_1) := \mathcal{T}_T(\xi_0, \eta_0)$, so implizieren die obigen Charakterisierungen der S -Mannigfaltigkeiten: \mathcal{T}_T bildet S_{ξ_0, η_0} stetig auf S_{ξ_1, η_1} ab, \mathcal{T}_{-T} bildet S_{ξ_1, η_1} stetig auf S_{ξ_0, η_0} ab. Beachtet man noch $\mathcal{T}_T(\mathcal{T}_{-T}(\xi, \eta)) = (\xi, \eta)$ für beliebige $(\xi, \eta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, so folgt unmittelbar (siehe auch Abbildung 1.8):

- \mathcal{T}_T bildet S_{ξ_0, η_0} homöomorph auf S_{ξ_1, η_1} ab.
- \mathcal{T}_T bildet R_{ξ_0, η_0} homöomorph auf R_{ξ_1, η_1} ab.
- Die Umkehrabbildung ist in beiden Fällen \mathcal{T}_{-T} .

Offensichtlich werden die S_0 - und R_0 -Mannigfaltigkeiten durch die Zeit- T -Abbildung auf sich selbst abgebildet. Diese beiden Mannigfaltigkeiten sind also invariant im Phasenraum.

1.5 Faserungen des erweiterten Phasenraumes

Gegenstand dieses Abschnittes ist die weitere Untersuchung eines kontinuierlichen dynamischen Prozesses der Form

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t, x, y) \\ \dot{y} = B(t)y + G(t, x, y) \end{cases} \quad (1.66)$$

Dabei seien \mathcal{X} , \mathcal{Y} wieder beliebige Banachräume, $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, $F : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ und $G : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ stetige Abbildungen mit $F(t, 0, 0) \equiv 0$, $G(t, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{R} . Ferner gelte wie in Satz 1.3.1 und Korollar 1.4.1:

(H1) Die Übergangsabbildungen Φ bzw. Ψ der linearen Prozesse $\dot{x} = A(t)x$ bzw. $\dot{y} = B(t)y$ erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, s)\| &\leq Ke^{\alpha(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s, \\ \|\Psi(t, s)\| &\leq Ke^{\beta(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $\alpha < \beta$.

(H2) Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(t, x, y) - F(t, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(t, x, y) - G(t, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$.

Wegen Satz 1.1.1 existieren alle Lösungen von (1.66) auf ganz \mathbb{R} ; die allgemeine Lösung von (1.66) sei wieder $\lambda(t; \tau, \xi, \eta) = (\lambda_1(t; \tau, \xi, \eta), \lambda_2(t; \tau, \xi, \eta))$. Ferner sei $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$. Damit erfüllt (1.66) die Voraussetzungen von Satz 1.3.1 und Korollar 1.4.1; s_0, r_0 seien die Abbildungen aus Satz 1.3.1, s, r seien die Abbildungen aus Korollar 1.4.1.

Wie im letzten Abschnitt bereits gezeigt wurde, ermöglicht Korollar 1.4.1 eine Zerlegung des erweiterten Phasenraumes von (1.66) in disjunkte S - bzw. R -Faserbündel. Die invarianten Faserbündel sind dabei Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelationen \sim_S bzw. \sim_R . Nun ist eine Äquivalenzklasse bekanntlich durch eines ihrer Elemente eindeutig festgelegt. Es ist also nur natürlich, zwei Familien "schöner" Lösungen von (1.66) zu suchen, die Repräsentantensysteme für diese Zerlegungen bilden. Betrachtet man dazu noch einmal Abbildung 1.8, so drängen sich zwei Familien geradezu auf: Das R_0 -Faserbündel von (1.66) als Repräsentantensystem für die Zerlegung in S -Faserbündel, und das S_0 -Faserbündel als Repräsentantensystem für die Zerlegung in R -Faserbündel. Daß diese beiden Familien — unter einer gewissen Zusatzvoraussetzung an (1.66) — in der Tat Repräsentantensysteme für die angegebenen Zerlegungen bilden, soll in diesem Abschnitt bewiesen werden. Zunächst jedoch eine Definition:

Definition 1.5.1 *Mit obigen Bezeichnungen definiert man:*

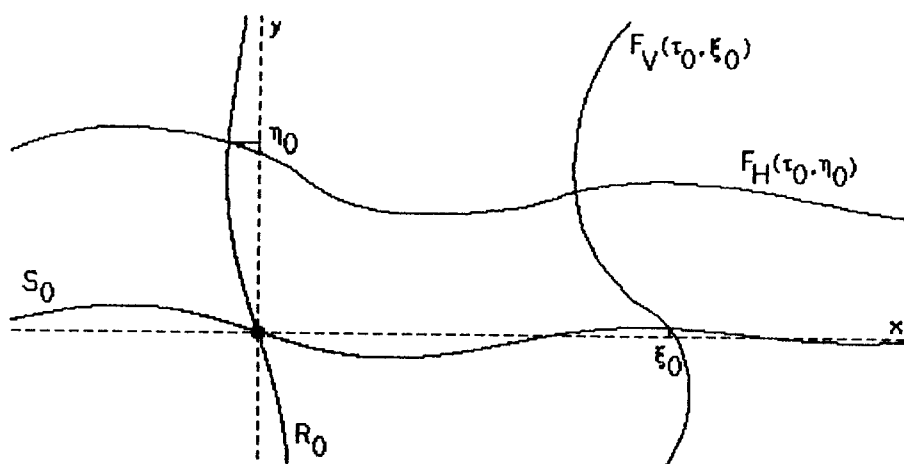
(a) Die Abbildung $f_H : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ definiert durch

$$f_H(\tau, \xi, \tau_0, \eta_0) := s(\tau, \xi, \tau_0, r_0(\tau_0, \eta_0), \eta_0),$$

für beliebige $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $\eta_0 \in \mathcal{Y}$, heißt horizontale Faserung von (1.66). Die invariante Menge

$$F_H(\tau_0, \eta_0) := \{(\tau, \xi, f_H(\tau, \xi, \tau_0, \eta_0)) : \tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{X}\}$$

heißt horizontale Faser durch (τ_0, η_0) .

Abbildung 1.9: Horizontale und vertikale Fasern (Schnitt mit der Hyperebene $t = \tau_0$.)

(b) Die Abbildung $f_V : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ definiert durch

$$f_V(\tau, \eta, \tau_0, \xi_0) := \tau(\tau, \eta, \tau_0, \xi_0, s_0(\tau_0, \xi_0)),$$

für beliebige $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0 \in \mathcal{X}$ und $\eta \in \mathcal{Y}$, heißt vertikale Faserung von (1.66). Die invariante Menge

$$F_V(\tau_0, \xi_0) := \{(\tau, f_V(\tau, \eta, \tau_0, \xi_0), \eta) : \tau \in \mathbb{R}, \eta \in \mathcal{Y}\}$$

heißt vertikale Faser durch (τ_0, ξ_0) .

Einige Bemerkungen sollen diese neuen Begriffe näher erläutern. Seien dazu $\tau_0 \in \mathbb{R}$ und $\xi_0 \in \mathcal{X}$ beliebig. Dann ist $(\tau_0, \xi_0, s_0(\tau_0, \xi_0))$ ein Punkt des S_0 -Faserbündels von (1.66) und es gilt:

- Das S -Faserbündel durch diesen Punkt besteht gemäß Korollar 1.4.1 aus den Lösungen μ von (1.66), für die die Differenz $\mu - \lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, s_0(\tau_0, \xi_0))$ eine γ^+ -quasibeschränkte Abbildung ist. Da $\lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, s_0(\tau_0, \xi_0))$ bereits selbst γ^+ -quasibeschränkt ist, besteht das S -Faserbündel durch $(\tau_0, \xi_0, s_0(\tau_0, \xi_0))$ also aus allen γ^+ -quasibeschränkten Lösungen von (1.66), d.h. es ist das S_0 -Faserbündel von (1.66).
- Das R -Faserbündel durch diesen Punkt ist gemäß obiger Definition die vertikale Faser $F_V(\tau_0, \xi_0)$.

Analoge Aussagen gelten für Punkte auf dem R_0 -Faserbündel von (1.66). (Vergleiche auch Abbildung 1.9. Um dreidimensionale Bilder zu vermeiden, ist nur der Schnitt des erweiterten Phasenraumes mit der Hyperebene $t = \tau_0$ abgebildet.)

Für autonome, endlichdimensionale Differentialgleichungen stimmt die oben definierte vertikale Faserung im wesentlichen mit der vertikalen Faserung in KIRCHGRABER, PALMER [19] überein, falls die Eigenwertrealteile der Matrix A nichtpositiv, die Eigenwertrealteile der Matrix B positiv sind. (Die horizontalen Faserungen sind jedoch verschieden!)

Möchte man nun zeigen, daß die horizontalen bzw. vertikalen Fasern eine invariante Zerlegung des erweiterten Phasenraumes von (1.66) bilden, ist zunächst zu untersuchen, ob verschiedene Fasern auch stets disjunkt sind. Diese Frage wird im folgenden Lemma beantwortet.

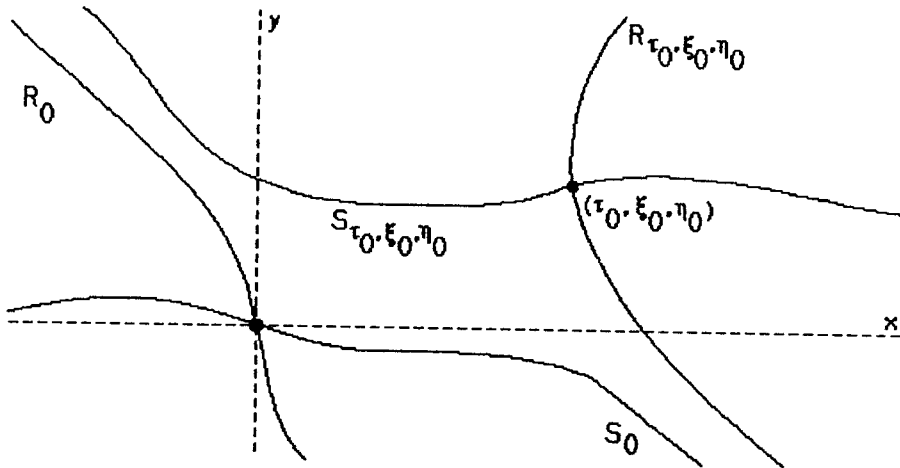


Abbildung 1.10: Ein Problem bei der Faserung (Schnitt mit der Hyperebene $t = \tau_0$.)

Lemma 1.5.2 Gegeben sei der Prozeß (1.66) mit den eingangs aufgeführten Voraussetzungen. Dann gilt für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$:

- (a) Für beliebige $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{Y}$ mit $\eta_1 \neq \eta_2$ sind die horizontalen Fasern $F_H(\tau, \eta_1)$ und $F_H(\tau, \eta_2)$ disjunkt, d.h. $F_H(\tau, \eta_1) \cap F_H(\tau, \eta_2) = \emptyset$.
- (b) Für beliebige $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$ mit $\xi_1 \neq \xi_2$ sind die vertikalen Fasern $F_V(\tau, \xi_1)$ und $F_V(\tau, \xi_2)$ disjunkt, d.h. $F_V(\tau, \xi_1) \cap F_V(\tau, \xi_2) = \emptyset$.

Beweis: Es wird nur die Aussage (a) behandelt; (b) wird völlig analog bewiesen. Angenommen, es existiert ein $\xi \in \mathcal{X}$ mit $(\tau, \xi, f_H(\tau, \xi, \tau, \eta_1)) = (\tau, \xi, f_H(\tau, \xi, \tau, \eta_2))$. Sei $\eta := f_H(\tau, \xi, \tau, \eta_1) = f_H(\tau, \xi, \tau, \eta_2)$, $\xi_1 := r_0(\tau, \eta_1)$ und $\xi_2 := r_0(\tau, \eta_2)$. Dann sind die Funktionen $\lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \tau, \xi_1, \eta_1)$ und $\lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \tau, \xi_2, \eta_2)$ wegen Korollar 1.4.1 γ^+ -quasibeschränkt, und damit auch $\lambda(\cdot; \tau, \xi_2, \eta_2) - \lambda(\cdot; \tau, \xi_1, \eta_1)$.

Andererseits sind $\lambda(\cdot; \tau, \xi_2, \eta_2)$ und $\lambda(\cdot; \tau, \xi_1, \eta_1)$ nach Konstruktion γ^- -quasibeschränkt, d.h. $\lambda(\cdot; \tau, \xi_2, \eta_2) - \lambda(\cdot; \tau, \xi_1, \eta_1)$ ist γ^- -quasibeschränkt.

Somit ist $\lambda(\cdot; \tau, \xi_2, \eta_2) - \lambda(\cdot; \tau, \xi_1, \eta_1)$ eine γ -quasibeschränkte Lösung der Differentialgleichung der gestörten Bewegung zur Lösung $\lambda(\cdot; \tau, \xi_1, \eta_1)$ von (1.66). Mit Satz 1.3.1(c) erhält man hieraus $\lambda(t; \tau, \xi_2, \eta_2) - \lambda(t; \tau, \xi_1, \eta_1) \equiv 0$ auf \mathbb{R} , und damit $\eta_1 = \eta_2$, im Widerspruch zur Voraussetzung. \diamond

Dieses Lemma ermöglicht eine erste Aussage über die horizontale bzw. vertikale Faserung des erweiterten Phasenraumes von (1.66): Jeder Punkt des erweiterten Phasenraumes liegt auf höchstens einer horizontalen und höchstens einer vertikalen Faser. Ziel dieses Abschnittes ist der Nachweis, daß jeder Punkt (τ_0, ξ_0, η_0) des erweiterten Phasenraumes auf genau einer horizontalen und genau einer vertikalen Faser liegt. Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn das S -Faserbündel durch (τ_0, ξ_0, η_0) das R_0 -Faserbündel von (1.66), und das R -Faserbündel durch (τ_0, ξ_0, η_0) das S_0 -Faserbündel von (1.66) schneidet — und da könnten sich Probleme ergeben: Die angegebenen Faserbündel erfüllen zwar eine globale Lipschitz-Bedingung, doch für eine Lipschitz-Konstante größer als 1 ist es möglich, daß sich die Faserbündel nicht schneiden (vergleiche Abbildung 1.10).

Dieses Problem läßt sich jedoch sehr leicht aus der Welt schaffen. Die in Satz 1.3.1 und Korollar 1.4.1 angegebenen globalen Lipschitz-Konstanten von s_0 , r_0 , s und r besitzen nämlich die angenehme Eigenschaft, daß sie für $L \rightarrow 0$ ebenfalls gegen 0 konvergieren. Wählt man also L so klein, daß die globalen Lipschitz-Konstanten von s_0 , r_0 , s und r kleiner als 1 sind, so müßte jeder Punkt des erweiterten Phasenraumes von (1.66) auf genau einer horizontalen und genau einer vertikalen Faser liegen. Den Beweis dieser Vermutung erbringt der folgende Satz.

Satz 1.5.3 *Gegeben sei wieder der kontinuierliche dynamische Prozeß*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t, x, y) \\ \dot{y} = B(t)y + G(t, x, y) \end{cases} \quad (1.67)$$

mit den zu Beginn dieses Abschnittes aufgeführten Eigenschaften. Darüberhinaus erfülle die Konstante L die folgende Abschätzung:

$$0 \leq L < C(K, \alpha, \beta) := \frac{\beta - \alpha}{4K^2} (2 + K - \sqrt{4 + K^2}) \quad (1.68)$$

Dann gilt:

- (a) *Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12}) : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, so daß für beliebige $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ die Beziehungen*

$$\begin{aligned} (\tau_0, \xi_0, \eta_0) &\in F_V(\tau_0, \mathcal{F}_{11}(\tau_0, \xi_0, \eta_0)) \quad \text{und} \\ (\tau_0, \xi_0, \eta_0) &\in F_H(\tau_0, \mathcal{F}_{12}(\tau_0, \xi_0, \eta_0)) \end{aligned}$$

erfüllt sind. Jeder Punkt des erweiterten Phasenraumes von (1.67) liegt demnach auf genau einer horizontalen und genau einer vertikalen Faser. Die Abbildung \mathcal{F}_1 ist stetig, für alle $\tau \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{F}_1(\tau, 0, 0) = (0, 0)$, und man erhält ferner: Ist μ eine beliebige Lösung von (1.67), so ist $\mathcal{F}_1(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung des entkoppelten Prozesses

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t, x, s_0(t, x)) \\ \dot{y} = B(t)y + G(t, r_0(t, y), y) \end{cases} \quad (1.69)$$

- (b) *Es existiert eine stetige Abbildung $\mathcal{F}_2 : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, so daß für beliebiges $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ der Punkt $(\tau_0, \mathcal{F}_2(\tau_0, \xi_0, \eta_0))$ der eindeutig bestimmte Schnittpunkt der horizontalen Faser $F_H(\tau_0, \eta_0)$ mit der vertikalen Faser $F_V(\tau_0, \xi_0)$ in der Hyperebene $t = \tau_0$ ist. Insbesondere gilt also $\mathcal{F}_2(\tau, 0, 0) = (0, 0)$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Ferner erhält man: Ist ν eine Lösung des entkoppelten Prozesses (1.69), so ist $\mathcal{F}_2(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (1.67).*
- (c) *Für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ sind die Abbildungen $\mathcal{F}_1(\tau, \cdot, \cdot)$ und $\mathcal{F}_2(\tau, \cdot, \cdot)$ einander invers, also Homöomorphismen auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Damit sind die Prozesse (1.67) und (1.69) topologisch äquivalent.*
- (d) *Sind die Abbildungen A , B , F und G in (1.67) periodisch in t mit Periode $\Theta > 0$, so sind auch die Abbildungen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 periodisch in t mit Periode Θ . Ist (1.67) insbesondere autonom, dann sind die Abbildungen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 von t unabhängig, und damit Homöomorphismen auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.*

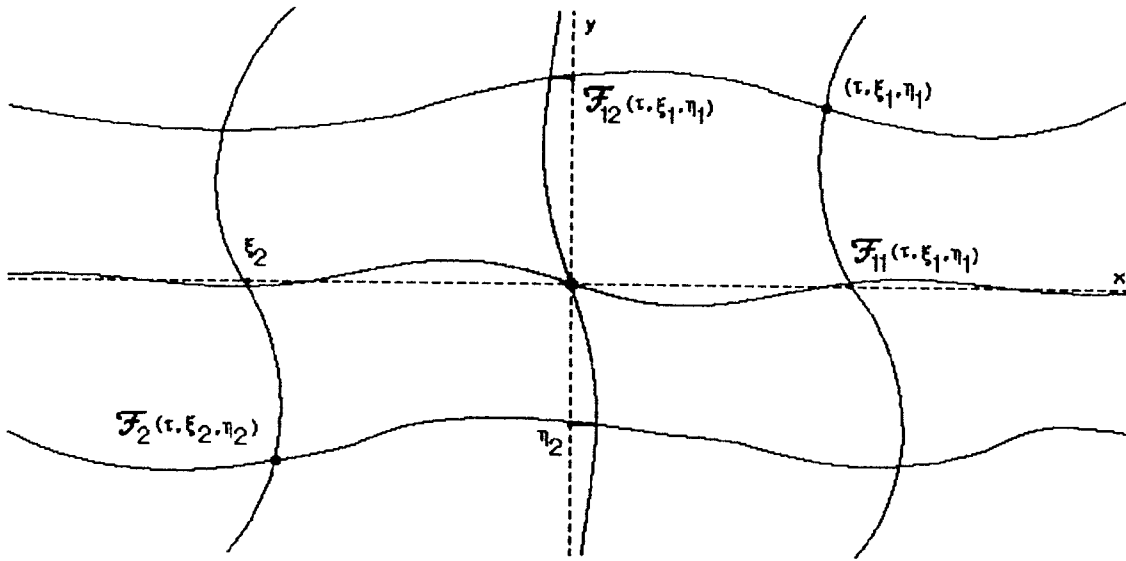


Abbildung 1.11: Die Abbildungen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 (Schnitt mit der Hyperebene $t = \tau$.)

Bemerkung: Die in (1.68) angegebene Bedingung an L ist eine Verschärfung der zu Beginn dieses Abschnittes aufgeführten Bedingung, es gilt nämlich für beliebige $K \geq 1$:

$$\mathcal{C}(K, \alpha, \beta) < \frac{\beta - \alpha}{4K}.$$

Die genaue Größenordnung von $\mathcal{C}(K, \alpha, \beta)$ läßt sich der folgenden Ungleichung entnehmen:

$$\frac{(3 - \sqrt{5})(\beta - \alpha)}{4K^2} \leq \mathcal{C}(K, \alpha, \beta) < \frac{\beta - \alpha}{2K^2} \quad \text{für } K \geq 1.$$

Ferner wurde (1.68) gerade so gewählt, daß die folgende Abschätzung erfüllt ist:

$$\frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} < 1 \quad (1.70)$$

Diese Abschätzung wird im nun folgenden Beweis von Satz 1.5.3 eine entscheidende Rolle spielen; insbesondere erhält man bereits jetzt mit den Aussagen von Satz 1.3.1, daß die Abbildungen s_0 und r_0 gleichmäßige Kontraktionen sind, d.h. für beliebige $t \in \mathbb{R}$, $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$ und $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$ gilt

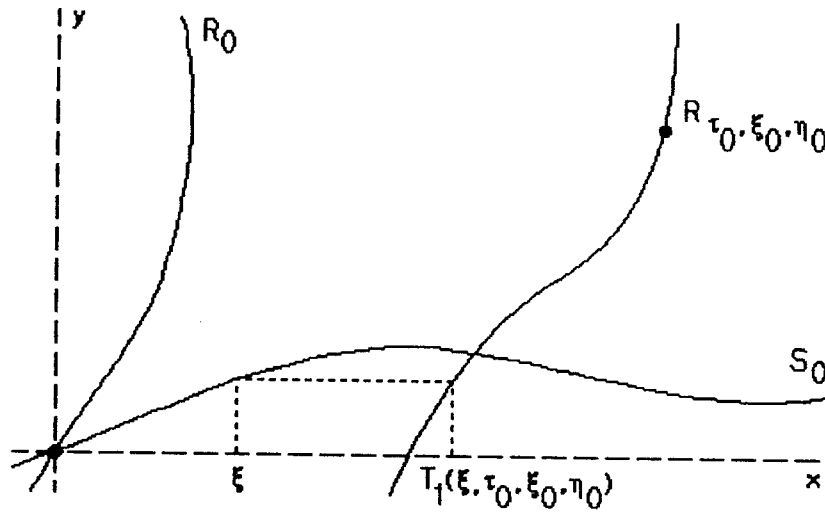
$$\begin{aligned} \|s_0(t, x) - s_0(t, \bar{x})\| &\leq q \|x - \bar{x}\| \\ \|r_0(t, y) - r_0(t, \bar{y})\| &\leq q \|y - \bar{y}\| \end{aligned} \quad (1.71)$$

mit $q := \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} < 1$. Diese Abschätzungen vereinfachen einige Ungleichungen in den Beweisen zum (klassischen bzw. verallgemeinerten) Satz von Hartman-Grobman.

Beweis: Der Beweis benutzt ausgiebig das gleichmäßige Kontraktionsprinzip; es wird im Anhang bewiesen (Satz A.2.2).

(a) Sei $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ beliebig. Zunächst soll gezeigt werden, daß (τ_0, ξ_0, η_0) auf genau einer vertikalen Faser $F_V(\tau_0, \xi)$ liegt. Betrachte dazu die Abbildung

$$T_1 : \begin{cases} \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} & \rightarrow & \mathcal{X} \\ (\xi, \tau_0, \xi_0, \eta_0) & \mapsto & r(\tau_0, s_0(\tau_0, \xi), \tau_0, \xi_0, \eta_0) \end{cases}$$

Abbildung 1.12: Die Abbildung T_1 (Schnitt mit der Hyperebene $t = \tau_0$.)

T_1 ist wegen der Stetigkeit von r und s_0 stetig und es gilt für beliebige $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$, $\eta_0 \in \mathcal{Y}$ mit Satz 1.3.1 und Korollar 1.4.1:

$$\begin{aligned} \|T_1(\xi_1, \tau_0, \xi_0, \eta_0) - T_1(\xi_2, \tau_0, \xi_0, \eta_0)\| &\leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|s_0(\tau_0, \xi_1) - s_0(\tau_0, \xi_2)\| \leq \\ &\leq \left(\frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \right)^2 \|\xi_1 - \xi_2\|. \end{aligned}$$

Wegen (1.70) ist T_1 eine gleichmäßige Kontraktion und besitzt gemäß Satz A.2.2 für beliebiges (τ_0, ξ_0, η_0) einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\mathcal{F}_{11}(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$ in \mathcal{X} , und \mathcal{F}_{11} ist stetig. Nun ist $\xi \in \mathcal{X}$ genau dann ein Fixpunkt von $T_1(\cdot, \tau_0, \xi_0, \eta_0)$, wenn gilt:

$$\xi = r(\tau_0, s_0(\tau_0, \xi), \tau_0, \xi_0, \eta_0) \Leftrightarrow (\tau_0, \xi, s_0(\tau_0, \xi)) \in R_{\tau_0, \xi_0, \eta_0} \Leftrightarrow (\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in F_V(\tau_0, \xi).$$

Mit anderen Worten: ξ ist genau dann ein Fixpunkt von $T_1(\cdot, \tau_0, \xi_0, \eta_0)$, wenn (τ_0, ξ_0, η_0) auf der vertikalen Faser $F_V(\tau_0, \xi)$ liegt. Beachtet man noch, daß für $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$ der Fixpunkt offensichtlich $\xi = 0$ ist, so erhält man $\mathcal{F}_{11}(\tau_0, 0, 0) = 0$. Damit ist die erste Aussage von (a) bewiesen. Völlig analog zeigt man, daß jeder Punkt (τ_0, ξ_0, η_0) des erweiterten Phasenraumes auf genau einer horizontalen Faser $F_H(\tau_0, \mathcal{F}_{12}(\tau_0, \xi_0, \eta_0))$ liegt, mit einer stetigen Abbildung \mathcal{F}_{12} und $\mathcal{F}_{12}(\tau_0, 0, 0) = 0$.

Bleibt nur noch zu zeigen, daß $\mathcal{F}_1 := (\mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12})$ Lösungen von (1.67) auf Lösungen von (1.69) abbildet. Sei dazu $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ eine beliebige Lösung von (1.67) mit $\xi_0 := \mu_1(\tau_0)$ und $\eta_0 := \mu_2(\tau_0)$. Definiert man

$$\xi := \mathcal{F}_{11}(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \quad \text{und} \quad \nu(t) := \lambda(t; \tau_0, \xi, s_0(\tau_0, \xi)),$$

so ist ν wegen der obigen Konstruktion von \mathcal{F}_{11} eine γ^+ -quasibeschränkte Lösung von (1.67) und $\mu - \nu$ ist γ^- -quasibeschränkt. Sei nun $\tau \in \mathbb{R}$ beliebig. Setzt man $\xi^* := \mathcal{F}_{11}(\tau, \mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, dann ist ξ^* der eindeutig bestimmte Punkt in \mathcal{X} , für den $\mu - \lambda(\cdot; \tau, \xi^*, s_0(\tau, \xi^*))$ γ^- -quasibeschränkt ist. Wegen der obigen Definition von ν als Lösung auf dem invarianten S_0 -Faserbündel von (1.67) und der γ^- -Quasibeschränktheit von $\mu - \nu$ gilt somit $\nu = \lambda(\cdot; \tau, \xi^*, s_0(\tau, \xi^*))$, d.h. $\nu_1(\tau) =$

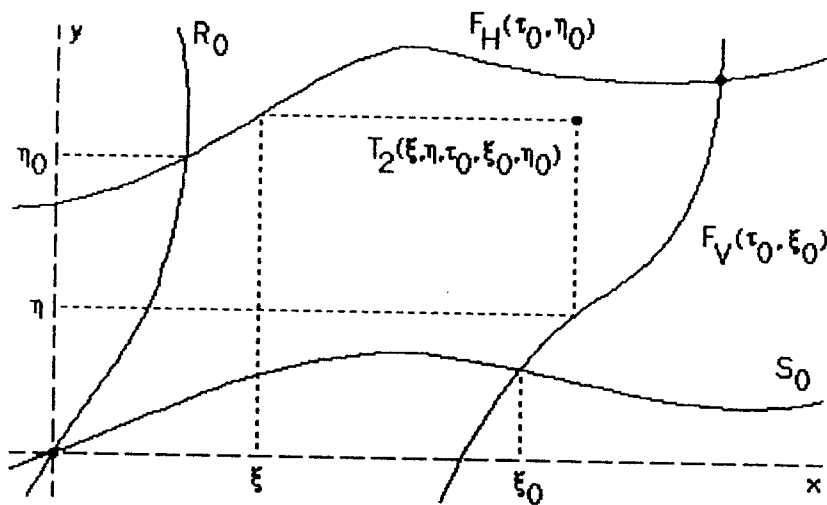


Abbildung 1.13: Die Abbildung T_2 (Schnitt mit der Hyperebene $t = \tau_0$.)

$\xi^* = \mathcal{F}_{11}(\tau, \mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$. Da ν auf dem S_0 -Faserbündel von (1.67) liegt, ist $\nu_2(\tau) \equiv s_0(\tau, \nu_1(\tau))$ auf \mathbb{R} und damit ist $\nu_1 = \mathcal{F}_{11}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung des kontinuierlichen dynamischen Prozesses

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, x, s_0(t, x)).$$

Völlig analog zeigt man, daß $\mathcal{F}_{12}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von

$$\dot{y} = B(t)y + G(t, r_0(t, y), y)$$

ist. Damit ist (a) vollständig bewiesen.

(b) Sei (τ_0, ξ_0, η_0) beliebig. Zunächst soll gezeigt werden, daß die Fasern $F_V(\tau_0, \xi_0)$ und $F_H(\tau_0, \eta_0)$ genau einen Punkt in der Hyperebene $t = \tau_0$ gemeinsam haben. Definiere dazu

$$T_2 : \begin{cases} \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} & \rightarrow & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \\ (\xi, \eta, \tau_0, \xi_0, \eta_0) & \mapsto & (f_V(\tau_0, \eta, \tau_0, \xi_0), f_H(\tau_0, \xi, \tau_0, \eta_0)) \end{cases}$$

wobei der Raum $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ mit der Norm $|||(x, y)||| := \|x\| + \|y\|$ versehen wird. (Offensichtlich ist $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ mit dieser Norm ein Banachraum.) T_2 ist wegen der Stetigkeit von f_V und f_H stetig und es gilt für beliebige $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$, $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{Y}$ mit Korollar 1.4.1:

$$\begin{aligned} & |||T_2(\xi_1, \eta_1, \tau_0, \xi_0, \eta_0) - T_2(\xi_2, \eta_2, \tau_0, \xi_0, \eta_0)||| = \\ & = ||f_V(\tau_0, \eta_1, \tau_0, \xi_0) - f_V(\tau_0, \eta_2, \tau_0, \xi_0)|| + ||f_H(\tau_0, \xi_1, \tau_0, \eta_0) - f_H(\tau_0, \xi_2, \tau_0, \eta_0)|| \leq \\ & \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} (||\xi_1 - \xi_2|| + ||\eta_1 - \eta_2||) = \\ & = \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} |||(\xi_1, \eta_1) - (\xi_2, \eta_2)|||. \end{aligned}$$

Wegen (1.70) ist T_2 eine gleichmäßige Kontraktion und besitzt gemäß Satz A.2.2 für beliebiges (τ_0, ξ_0, η_0) einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\mathcal{F}_2(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$ in $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Ferner ist \mathcal{F}_2 stetig und (ξ, η) ist genau dann ein Fixpunkt von $T_2(\cdot, \cdot, \tau_0, \xi_0, \eta_0)$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} & \xi = f_V(\tau_0, \eta, \tau_0, \xi_0) \quad \text{und} \quad \eta = f_H(\tau_0, \xi, \tau_0, \eta_0) \\ \Leftrightarrow & (\tau_0, \xi, \eta) \in F_V(\tau_0, \xi_0) \quad \text{und} \quad (\tau_0, \xi, \eta) \in F_H(\tau_0, \eta_0), \end{aligned}$$

d.h. wenn (τ_0, ξ, η) ein Schnittpunkt der Fasern $F_V(\tau_0, \xi_0)$ und $F_H(\tau_0, \eta_0)$ in der Hyperebene $t = \tau_0$ ist. Damit ist die erste Aussage in (b) bewiesen. Die zweite Aussage erhält man leicht durch eine ähnliche Überlegung wie in (a).

(c) Gemäß Konstruktion ist $\mathcal{F}_2(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$ der eindeutig bestimmte Schnittpunkt der Fasern $F_V(\tau_0, \xi_0)$ und $F_H(\tau_0, \eta_0)$ in der Hyperebene $t = \tau_0$. Andererseits sind für beliebiges (τ_1, ξ_1, η_1) im erweiterten Phasenraum $F_V(\tau_1, \mathcal{F}_{11}(\tau_1, \xi_1, \eta_1))$ und $F_H(\tau_1, \mathcal{F}_{12}(\tau_1, \xi_1, \eta_1))$ die eindeutig bestimmten vertikalen und horizontalen Fasern, die (τ_1, ξ_1, η_1) enthalten. Daraus folgt unmittelbar $\mathcal{F}_1(\tau, \mathcal{F}_2(\tau, \xi, \eta)) = (\xi, \eta)$ und $\mathcal{F}_2(\tau, \mathcal{F}_1(\tau, \xi, \eta)) = (\xi, \eta)$ für beliebige $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $\eta \in \mathcal{Y}$.

(d) Die letzte Aussage von Satz 1.5.3 folgt wie im Beweis von Korollar 1.3.2. \diamond

Mit Satz 1.5.3 ist man über das ursprüngliche Ziel dieses Abschnittes etwas hinausgeraten: Die Konstruktion zweier Repräsentantensysteme für die Zerlegungen des erweiterten Phasenraumes lieferte als "Nebenprodukt" gewisse Aussagen über die topologische Äquivalenz des gegebenen (gekoppelten) Prozesses zu einem entkoppelten Prozeß, der im wesentlichen das Verhalten des ursprünglichen Prozesses auf dem S_0 - und dem R_0 -Faserbündel beschreibt.

Diese Aussagen haben jedoch eine Reihe interessanter Anwendungen — und die sollen in den verbleibenden Abschnitten dieses Kapitels vorgeführt werden.

Erwähnenswert ist in jedem Fall, daß die zentralen Ergebnisse über invariante Faserbündel durch Lösungen und Faserungen des erweiterten Phasenraumes leichte Folgerungen aus dem Hauptsatz 1.3.1 über invariante Faserbündel sind; die Beweise verwenden nur die Differentialgleichung der gestörten Bewegung und das gleichmäßige Kontraktionsprinzip. Darüberhinaus ist es für die Entwicklung der Theorie unerlässlich, nichtautonome Differentialgleichungen zu behandeln: Der Übergang zur Differentialgleichung der gestörten Bewegung in Korollar 1.4.1 ist im Rahmen einer rein autonomen Theorie nicht möglich.

1.6 Das Reduktionsprinzip

Als erste unmittelbare Folgerung aus der in den letzten Abschnitten entwickelten Theorie soll in diesem Abschnitt das Reduktionsprinzip vorgestellt werden, das im Fall autonomer endlich-dimensionaler Differentialgleichungssysteme auf PLISS [25] und KELLEY [18], sowie im nichtautonomen Fall auf AULBACH [2] zurückgeht. Das Reduktionsprinzip ermöglicht es, bei gewissen kontinuierlichen dynamischen Prozessen Stabilitätsuntersuchungen auf reduzierte Prozesse, mit im allgemeinen geringerer Dimension, zurückzuführen. Die genauen Ergebnisse beinhaltet der folgende Satz.

Satz 1.6.1 (Reduktionsprinzip) *Gegeben sei der kontinuierliche dynamische Prozeß*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t, x, y) \\ \dot{y} = B(t)y + G(t, x, y) \end{cases} \quad (1.72)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} , \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, $F : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit $F(t, 0, 0) \equiv 0$, $G(t, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{R} . Ferner gelte:

(H1) Die Übergangsabbildungen Φ bzw. Ψ der linearen Prozesse $\dot{x} = A(t)x$ bzw. $\dot{y} = B(t)y$ erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, s)\| &\leq K e^{\alpha(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s, \\ \|\Psi(t, s)\| &\leq K e^{\beta(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $\alpha < \beta \leq 0$.

(H2) Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(t, x, y) - F(t, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(t, x, y) - G(t, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit $0 \leq L < \mathcal{C}(K, \alpha, \beta)$. (Vergleiche (1.68).)

Mit $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2} < 0$ erfüllt dann (1.72) die Voraussetzungen von Satz 1.3.1; r_0 sei die zum R_0 -Faserbündel gehörige Abbildung. Neben (1.72) betrachtet man den sogenannten reduzierten Prozeß

$$\dot{y} = B(t)y + G(t, r_0(t, y), y) \quad (1.73)$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\mathcal{R} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, so daß für beliebiges $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt:

Bezeichnet $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ die Lösung von (1.72) mit $\lambda(\tau_0) = (\xi_0, \eta_0)$ und $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y}$ die Lösung von (1.73) mit $\mu(\tau_0) = \mathcal{R}(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$, so sind für alle $t \geq \tau_0$ die folgenden Abschätzungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(t) - r_0(t, \mu(t))\| &\leq \left(K + \frac{4K^3L^2}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \right) \|\xi_0 - r_0(\tau_0, \mathcal{R}(\tau_0, \xi_0, \eta_0))\| e^{\gamma(t - \tau_0)} \\ \|\lambda_2(t) - \mu(t)\| &\leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi_0 - r_0(\tau_0, \mathcal{R}(\tau_0, \xi_0, \eta_0))\| e^{\gamma(t - \tau_0)}. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung auf dem R_0 -Faserbündel von (1.72), der sich λ für $t \rightarrow \infty$ exponentiell annähert, nämlich $(r_0(\cdot, \mu(\cdot)), \mu(\cdot))$.

Damit ist die triviale Lösung von (1.72) genau dann stabil (instabil, asymptotisch stabil), wenn die triviale Lösung von (1.73) stabil (instabil, asymptotisch stabil) ist.

Die Abbildung \mathcal{R} ist stetig und es gilt ferner: Ist die rechte Seite von (1.72) periodisch in t mit Periode Θ , so ist auch \mathcal{R} periodisch in t mit Periode Θ . Speziell für dynamische Systeme ist also \mathcal{R} unabhängig von t .

Bemerkung: Für endlichdimensionale dynamische Systeme lautet die Voraussetzung (H1):

$$\sigma_{\max}^r(A) < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{\min}^r(B) \geq 0.$$

Die Aussagen des Satzes für dynamische Systeme sind in Abbildung 1.14 dargestellt.

Beweis: Der Prozeß (1.72) erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.3.1 und Satz 1.5.3; $\mathcal{F}_{12} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ sei die Abbildung aus Satz 1.5.3. Definiert man $\mathcal{R}(\tau_0, \xi_0, \eta_0) := \mathcal{F}_{12}(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$ und bezeichnet μ die Lösung von (1.73) mit $\mu(\tau_0) = \mathcal{R}(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$, so impliziert Satz 1.5.3 unmittelbar, daß $(r_0(\cdot, \mu(\cdot)), \mu(\cdot))$ die eindeutig bestimmte γ^- -quasibeschränkte Lösung von (1.72) ist, für die gilt:

$$\lambda(\cdot) - (r_0(\cdot, \mu(\cdot)), \mu(\cdot)) \quad \text{ist} \quad \gamma^+ \text{-quasibeschränkt.}$$

Diese Funktion ist also eine γ^+ -quasibeschränkte Lösung der Differentialgleichung der gestörten Bewegung zu λ von (1.72). Wendet man jetzt Satz 1.3.1(a), (iii) auf diese Differentialgleichung der gestörten Bewegung an, erhält man die oben behaupteten Abschätzungen.

Die Aussagen zur Periodizität von \mathcal{R} sind direkte Konsequenzen aus Satz 1.5.3(d). \diamond

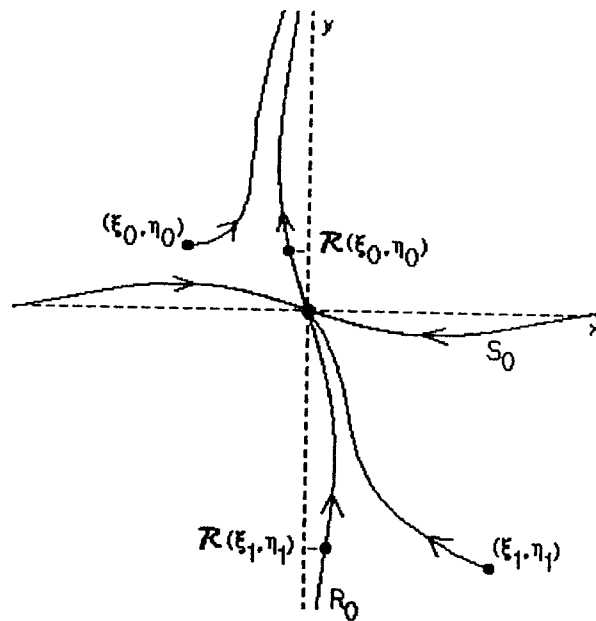


Abbildung 1.14: Das Reduktionsprinzip

Ein Beispiel soll das Reduktionsprinzip zum Abschluß dieses Abschnittes veranschaulichen. Betrachte dazu das ebene autonome System

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x + y \\ \dot{y} = \sin x - \sin y \end{cases} \quad (1.74)$$

Dieses System erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.6.1 mit $A = -6$, $F(x, y) = y$, $B = 0$, $G(x, y) = \sin x - \sin y$, $K = 1$, $\alpha = -6$, $\beta = 0$ und $L = 1$. Das Phasenportrait von (1.74) ist in Abbildung 1.15 dargestellt. Um Verzerrungen im Maßstab zu vermeiden, wurden die x - und die y -Achse miteinander vertauscht. Man erkennt sehr schön, daß sich jede Lösung exponentiell einer Lösung auf dem R_0 -Faserbündel von (1.74) annähert.

1.7 Die Sätze von Hartman-Grobman

Als zweite Anwendung der Faserungen des erweiterten Phasenraumes werden in diesem Abschnitt der klassische und der verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman für kontinuierliche dynamische Prozesse bewiesen. Der klassische Satz zeigt, daß gewisse nichtlineare Prozesse zu einem linearen Prozeß topologisch äquivalent sind, der verallgemeinerte Satz behandelt eine größere Klasse dynamischer Prozesse, erreicht aber im allgemeinen nur eine teilweise Linearisierung.

1.7.1 Vorbereitende Ergebnisse

Zum Beweis der Sätze werden — neben den Ergebnissen der bisherigen Abschnitte — noch zwei weitere Lemmata benötigt, die im wesentlichen der Arbeit von PALMER [23] entnommen sind. In den Beweisen werden nur die Ergebnisse über quasibeschränkte Abbildungen aus dem zweiten Abschnitt dieses Kapitels verwendet.

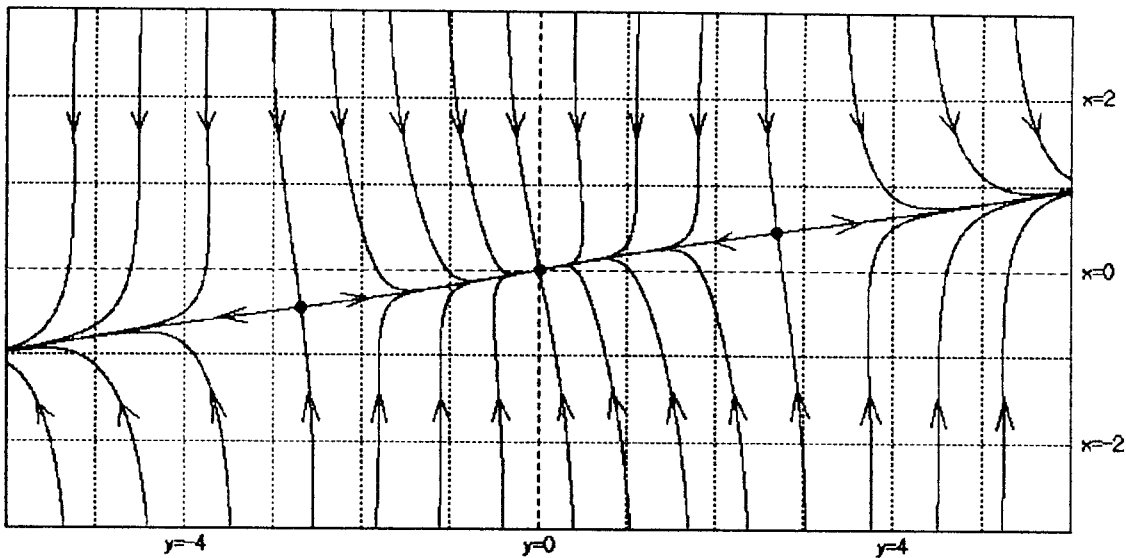


Abbildung 1.15: Ein autonomes Beispiel zum Reduktionsprinzip

Lemma 1.7.1 Gegeben seien die kontinuierlichen dynamischen Prozesse

$$\dot{x} = A(t)x + f_1(t, x) \quad (1.75)$$

und

$$\dot{x} = A(t)x + f_2(t, x) \quad (1.76)$$

mit einem Banachraum \mathcal{X} , stetigen Abbildungen $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ und $f_1, f_2: \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Φ sei die Übergangsabbildung des linearen Prozesses $\dot{x} = A(t)x$, $\lambda^{(1)}(t; \tau, \xi)$ sei die allgemeine Lösung von (1.75), $\lambda^{(2)}(t; \tau, \xi)$ die allgemeine Lösung von (1.76). Ferner gelte für beliebige $t, s \in \mathbb{R}$, $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$:

$$\|\Phi(t, s)\| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{für } t \geq s, \quad (1.77)$$

$$\|f_1(t, x)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|f_1(t, x) - f_1(t, \bar{x})\| \leq L \|x - \bar{x}\|, \quad (1.78)$$

$$\|f_2(t, x)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|f_2(t, x) - f_2(t, \bar{x})\| \leq L \|x - \bar{x}\|, \quad (1.79)$$

mit Konstanten $K \geq 1$, $\alpha > 0$, $M \geq 0$ und $0 \leq L < \frac{\alpha}{K}$.

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\mathcal{L}: \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß für beliebige $\tau_0 \in \mathbb{R}$ und $\xi_0 \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \tau_0, \mathcal{L}(\tau_0, \xi_0)) - \lambda^{(1)}(\cdot; \tau_0, \xi_0) \quad \text{ist beschränkt.} \quad (1.80)$$

Darüberhinaus besitzt \mathcal{L} die folgenden Eigenschaften:

(a) \mathcal{L} ist stetig.

(b) Für beliebige $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathcal{X}$ gilt

$$\|\mathcal{L}(\tau, \xi) - \xi\| \leq \frac{2KM}{\alpha - KL} \quad (1.81)$$

(c) Ist μ eine Lösung von (1.75), so ist $\mathcal{L}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (1.76).

(d) Sind A , f_1 und f_2 periodisch in t mit Periode Θ , so auch \mathcal{L} .

Beweis: Wegen Satz 1.1.1 — unter Verwendung von (1.78) und (1.79) — existieren alle Lösungen der beiden obigen Prozesse auf ganz \mathbb{R} . Betrachte nun den vom Parameter $(\tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ abhängigen Prozeß

$$\dot{x} = A(t)x + f_2(t, x + \lambda^{(1)}(t; \tau_0, \xi_0)) - f_1(t, \lambda^{(1)}(t; \tau_0, \xi_0)) \quad (1.82)$$

mit allgemeiner Lösung $\lambda^{(3)}(t; \tau, \xi, \tau_0, \xi_0)$. Definiert man

$$\begin{aligned} f(t, x, \tau_0, \xi_0) &:= f_2(t, x + \lambda^{(1)}(t; \tau_0, \xi_0)) - f_2(t, \lambda^{(1)}(t; \tau_0, \xi_0)), \\ f_0(t, \tau_0, \xi_0) &:= f_2(t, \lambda^{(1)}(t; \tau_0, \xi_0)) - f_1(t, \lambda^{(1)}(t; \tau_0, \xi_0)), \end{aligned}$$

so erfüllt (1.82) die Voraussetzungen von Lemma 1.2.2:

- Für beliebige $t, s \in \mathbb{R}$ mit $t \geq s$ gilt $\|\Phi(t, s)\| \leq K e^{\tilde{\alpha}(t-s)}$, wobei $\tilde{\alpha} := -\alpha$. (Wegen (1.77).)
- Für beliebige $t, \tau_0 \in \mathbb{R}$ und $x, \bar{x}, \xi_0 \in \mathcal{X}$ ist $f(t, 0, \tau_0, \xi_0) = 0$ und $\|f(t, x, \tau_0, \xi_0) - f(t, \bar{x}, \tau_0, \xi_0)\| \leq L\|x - \bar{x}\|$.
- $f_0(\cdot, \tau_0, \xi_0)$ ist gleichmäßig γ -quasibeschränkt mit $\gamma := 0$, d.h. beschränkt. Man erhält nämlich aus (1.78) und (1.79):

$$\|f_0(t, \tau_0, \xi_0)\| \leq 2M \quad \text{für beliebige } t, \tau_0 \in \mathbb{R}, \xi_0 \in \mathcal{X}. \quad (1.83)$$

Die Ungleichung $0 \leq L < \frac{\alpha}{K}$ impliziert schließlich $\gamma > \tilde{\alpha} + KL$.

Gemäß Lemma 1.2.2 existiert also eine eindeutig bestimmte Abbildung $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß für beliebige $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$ und $\xi_0 \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\lambda^{(3)}(\cdot; \tau, b(\tau, \tau_0, \xi_0), \tau_0, \xi_0) \quad \text{ist beschränkt.} \quad (1.84)$$

Darüberhinaus ist b stetig und (1.28) liefert mit (1.83):

$$\|b(\tau, \tau_0, \xi_0)\| \leq \frac{2KM}{\alpha - KL} \quad \text{für beliebige } \tau, \tau_0 \in \mathbb{R}, \xi_0 \in \mathcal{X}. \quad (1.85)$$

Nun ist aber — wie man leicht sieht — eine Funktion $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ genau dann eine Lösung von (1.82), wenn $\nu(\cdot) + \lambda^{(1)}(\cdot; \tau_0, \xi_0)$ eine Lösung von (1.76) ist. Die zu (1.80) gehörige Aussage des Lemmas ist damit der folgenden Aussage äquivalent:

Es existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $\mathcal{B} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß für alle $\tau_0 \in \mathbb{R}$ und $\xi_0 \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\lambda^{(3)}(\cdot; \tau_0, \mathcal{B}(\tau_0, \xi_0), \tau_0, \xi_0) \quad \text{ist beschränkt.} \quad (1.86)$$

Zwischen \mathcal{L} und \mathcal{B} besteht dann die folgende Beziehung:

$$\mathcal{L}(\tau, \xi) = \xi + \mathcal{B}(\tau, \xi) \quad \text{für beliebige } \tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{X}. \quad (1.87)$$

Setzt man jetzt $\mathcal{B}(\tau_0, \xi_0) := b(\tau_0, \tau_0, \xi_0)$, so folgt (1.86) unmittelbar aus (1.84), und durch (1.87) wird die eindeutig bestimmte Funktion \mathcal{L} definiert, die der Bedingung (1.80) genügt. Auch die restlichen Aussagen des Lemmas erhält man nun leicht:

(a) Die Stetigkeit von \mathcal{L} folgt aus der Stetigkeit von b und den Definitionen von \mathcal{B} und \mathcal{L} .

(b) Die Abschätzung (1.81) folgt aus (1.85), (1.87) und der Definition von \mathcal{B} .

(c) Sei nun μ die Lösung von (1.75) mit $\mu(\tau_0) = \xi_0$. Setze $\nu(t) := \lambda^{(2)}(t; \tau_0, \mathcal{L}(\tau_0, \xi_0))$. Dann ist ν eine Lösung von (1.76) und $\nu - \mu$ ist beschränkt. Sei weiter $\tau \in \mathbb{R}$ beliebig und $\xi^* := \mathcal{L}(\tau, \mu(\tau))$. Nach dem bereits Bewiesenen ist ξ^* der eindeutig bestimmte Punkt in \mathcal{X} , für den

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \tau, \xi^*) - \lambda^{(1)}(\cdot; \tau, \mu(\tau)) \text{ beschränkt ist.}$$

Nun gilt aber wegen (1.9):

$$\lambda^{(1)}(t; \tau, \mu(\tau)) = \lambda^{(1)}(t; \tau, \lambda^{(1)}(\tau; \tau_0, \xi_0)) = \lambda^{(1)}(t; \tau_0, \xi_0) = \mu(t),$$

und ν ist eine Lösung von (1.76), für die $\nu - \mu$ beschränkt ist. Also ist $\nu(t) = \lambda^{(2)}(\cdot; \tau, \xi^*)$, und damit $\nu(\tau) = \xi^*$. Beachtet man noch die Definition von ξ^* , so gilt für beliebige $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\nu(\tau) = \mathcal{L}(\tau, \mu(\tau)),$$

d.h. $\mathcal{L}(\cdot, \mu(\cdot))$ ist eine Lösung von (1.76).

(d) Seien abschließend A, f_1, f_2 periodisch in t mit Periode Θ und $\tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{X}$ beliebig. Definiere

$$\mu_1(t) := \lambda^{(1)}(t; \tau, \xi) \quad \text{und} \quad \nu_1(t) := \lambda^{(2)}(t, \tau, \mathcal{L}(\tau, \xi)).$$

Dann ist $\nu_1 - \mu_1$ beschränkt. Sei ferner

$$\mu_2(t) := \mu_1(t - \Theta) \quad \text{und} \quad \nu_2(t) := \nu_1(t - \Theta).$$

Wegen der vorausgesetzten Periodizität von A, f_1 und f_2 sind auch μ_2 und ν_2 Lösungen von (1.75) bzw. (1.76). Mit dem bereits Bewiesenen folgt aus der Beschränktheit von $\nu_2 - \mu_2$:

$$\mathcal{L}(\tau + \Theta, \xi) = \mathcal{L}(\tau + \Theta, \mu_2(\tau + \Theta)) = \nu_2(\tau + \Theta) = \nu_1(\tau) = \mathcal{L}(\tau, \xi).$$

Damit ist alles bewiesen. \diamond

Das nun folgende Lemma gibt Bedingungen an, unter denen ein kontinuierlicher dynamischer Prozeß zu einem linearen Prozeß topologisch äquivalent ist. Dieses Lemma wird — in Verbindung mit Satz 1.5.3 — unmittelbar die Sätze von Hartman-Grobman implizieren.

Lemma 1.7.2 Für beliebige $K \geq 1, \alpha > 0, M \geq 0$ und $0 \leq L < \frac{\alpha}{K}$ gelten die folgenden Aussagen:

(a) Gegeben sei der kontinuierliche dynamische Prozeß

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x) \tag{1.88}$$

und der zugehörige lineare Prozeß

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.89}$$

mit einem Banachraum \mathcal{X} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ und $f : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Φ sei die Übergangsabbildung von (1.89). Ferner gelte für beliebige $t, s \in \mathbb{R}, x, \bar{x} \in \mathcal{X}$:

$$\|\Phi(t, s)\| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{für} \quad t \geq s,$$

$$\|f(t, x)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \leq L \|x - \bar{x}\|.$$

Dann existieren stetige Abbildungen $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Ist μ eine Lösung von (1.88), so ist $\mathcal{H}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (1.89).
- (ii) Ist ν eine Lösung von (1.89), so ist $\tilde{\mathcal{H}}(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (1.88).
- (iii) Für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ sind die Abbildungen $\mathcal{H}(\tau, \cdot)$ und $\tilde{\mathcal{H}}(\tau, \cdot)$ einander invers, mithin Homöomorphismen auf \mathcal{X} .
- (iv) Sind A und f periodisch in t mit Periode Θ , so auch \mathcal{H} und $\tilde{\mathcal{H}}$.

Die kontinuierlichen dynamischen Prozesse (1.88) und (1.89) sind also topologisch äquivalent.

(b) Gegeben sei der kontinuierliche dynamische Prozeß

$$\dot{y} = B(t)y + g(t, y) \quad (1.90)$$

und der zugehörige lineare Prozeß

$$\dot{y} = B(t)y \quad (1.91)$$

mit einem Banachraum \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ und $g : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Ψ sei die Übergangsabbildung von (1.91). Ferner gelte für beliebige $t, s \in \mathbb{R}$, $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$:

$$\|\Psi(t, s)\| \leq K e^{\alpha(t-s)} \quad \text{für } t \leq s,$$

$$\|g(t, y)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|g(t, y) - g(t, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\|.$$

Dann existieren stetige Funktionen $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}} : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Ist μ eine Lösung von (1.90), so ist $\mathcal{H}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (1.91).
- (ii) Ist ν eine Lösung von (1.91), so ist $\tilde{\mathcal{H}}(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (1.90).
- (iii) Für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ sind die Abbildungen $\mathcal{H}(\tau, \cdot)$ und $\tilde{\mathcal{H}}(\tau, \cdot)$ einander invers, mithin Homöomorphismen auf \mathcal{Y} .
- (iv) Sind B und g periodisch in t mit Periode Θ , so auch \mathcal{H} und $\tilde{\mathcal{H}}$.

Die kontinuierlichen dynamischen Prozesse (1.90) und (1.91) sind also topologisch äquivalent.

Beweis: Es wird nur (a) bewiesen; (b) kann mittels Zeitumkehr leicht auf (a) zurückgeführt werden.

Anwendung von Lemma 1.7.1 mit $f_1(t, x) := f(t, x)$ und $f_2(t, x) := 0$ liefert eine stetige Abbildung \mathcal{H} mit den in (i) geforderten Eigenschaften. Die Aussagen in (iv) zur Periodizität von \mathcal{H} folgen aus Lemma 1.7.1(d).

Anwendung von Lemma 1.7.1 mit $f_1(t, x) := 0$ und $f_2(t, x) := f(t, x)$ liefert eine stetige Abbildung $\tilde{\mathcal{H}}$ mit den in (ii) geforderten Eigenschaften. Die Aussagen in (iv) zur Periodizität von $\tilde{\mathcal{H}}$ folgen wieder aus Lemma 1.7.1(d).

Bleibt nur noch (iii) zu zeigen. Zu diesem Zweck wendet man ein drittes Mal Lemma 1.7.1 an, diesmal mit $f_1(t, x) := f(t, x)$ und $f_2(t, x) := f(t, x)$. Bezeichnet $\lambda(t; \tau, \xi)$ die allgemeine Lösung von (1.88), dann existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $\mathcal{L} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß für beliebige $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\lambda(\cdot; \tau, \mathcal{L}(\tau, \xi)) - \lambda(\cdot; \tau, \xi) \quad \text{ist beschränkt.}$$

Offensichtlich ist also $\mathcal{L}(\tau, \xi) \equiv \xi$ auf $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$. Andererseits erhält man aus der obigen Definition von \mathcal{H} und $\tilde{\mathcal{H}}$ für beliebige $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathcal{X}$:

$$\Phi(\cdot, \tau)\mathcal{H}(\tau, \xi) - \lambda(\cdot; \tau, \xi) \quad \text{ist beschränkt,}$$

und ebenso:

$$\lambda(\cdot; \tau, \tilde{\mathcal{H}}(\tau, \mathcal{H}(\tau, \xi))) - \Phi(\cdot, \tau)\mathcal{H}(\tau, \xi) \quad \text{ist beschränkt.}$$

Zusammen gilt also für beliebige $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathcal{X}$:

$$\lambda(\cdot; \tau, \tilde{\mathcal{H}}(\tau, \mathcal{H}(\tau, \xi))) - \lambda(\cdot; \tau, \xi) \quad \text{ist beschränkt.}$$

Die Eindeutigkeitsaussage in Lemma 1.7.1 impliziert sofort

$$\tilde{\mathcal{H}}(\tau, \mathcal{H}(\tau, \xi)) \equiv \mathcal{L}(\tau, \xi) \equiv \xi \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \mathcal{X}.$$

Analog zeigt man $\mathcal{H}(\tau, \tilde{\mathcal{H}}(\tau, \xi)) \equiv \xi$ auf $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$. Damit ist das Lemma bewiesen. \diamond

Bemerkung: Erfüllen die Abbildungen f und g in Lemma 1.7.2 für alle $t \in \mathbb{R}$ die Beziehungen

$$f(t, 0) = 0 \quad \text{und} \quad g(t, 0) = 0,$$

d.h. besitzen (1.88) und (1.90) die triviale Lösung, so folgt aus obigem Beweis sofort:

$$\mathcal{H}(t, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{H}}(t, 0) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (1.92)$$

(In diesem Fall ist nämlich die triviale Lösung der gestörten Prozesse die eindeutig bestimmte beschränkte Lösung.)

Jetzt stehen alle Hilfsmittel zur Verfügung, um die bereits angekündigten Sätze von Hartman-Grobman für kontinuierliche dynamische Prozesse zu beweisen.

1.7.2 Der klassische Satz von Hartman-Grobman

Wie bereits erwähnt wurde, geht der klassische Satz im autonomen, endlichdimensionalen Fall auf HARTMAN [12, pp. 244f] und GROBMAN [10] zurück; PALMER [23] übertrug das Ergebnis auf nichtautonome Differentialgleichungen.

Auch wenn der nun folgende klassische Satz von Hartman-Grobman ein Spezialfall des im nächsten Abschnitt behandelten verallgemeinerten Satzes von Hartman-Grobman ist, soll er dennoch explizit aufgeführt und bewiesen werden. Dafür gibt es zwei Gründe:

- Einerseits ist die Bedingung an die Lipschitz-Konstante L im verallgemeinerten Satz stärker als die Bedingung im klassischen Satz,
- andererseits kann man bei dem nun folgenden Beweis des klassischen Satzes von Hartman-Grobman sehr schön erkennen, wie die sukzessive Anwendung von Satz 1.5.3 und Lemma 1.7.2 zunächst die Entkoppelung, und dann die Linearisierung (im Sinne der topologischen Äquivalenz) des gegebenen kontinuierlichen dynamischen Prozesses bewirkt.

Der Satz behandelt wieder zweigeteilte dynamische Prozesse in beliebigen Banachräumen.

Satz 1.7.3 (Klassischer Satz von Hartman-Grobman) Gegeben sei der kontinuierliche dynamische Prozeß

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t, x, y) \\ \dot{y} = B(t)y + G(t, x, y) \end{cases} \quad (1.93)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, $F : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit $F(t, 0, 0) \equiv 0$, $G(t, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{R} . Ferner gelte:

(H1) Die Übergangsabbildungen Φ bzw. Ψ der linearen Prozesse $\dot{x} = A(t)x$ bzw. $\dot{y} = B(t)y$ erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, s)\| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s, \\ \|\Psi(t, s)\| &\leq Ke^{\alpha(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $\alpha > 0$.

(H2) Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(t, x, y) - F(t, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(t, x, y) - G(t, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit

$$0 \leq L < \frac{\alpha}{2K^2}(2 + K - \sqrt{4 + K^2}) = \mathcal{C}(K, -\alpha, \alpha). \quad (1.94)$$

(Vergleiche (1.68).)

(H3) Für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{X}$ und $y \in \mathcal{Y}$ gilt

$$\|F(t, x, y)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|G(t, x, y)\| \leq M$$

mit einer Konstanten $M \geq 0$.

Neben (1.93) wird der lineare Prozeß

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ \dot{y} = B(t)y \end{cases} \quad (1.95)$$

betrachtet. Dann existieren stetige Abbildungen $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ mit $\mathcal{H}(\tau, 0, 0) \equiv \tilde{\mathcal{H}}(\tau, 0, 0) \equiv (0, 0)$ auf \mathbb{R} , sowie folgenden Eigenschaften:

- (a) Ist μ eine Lösung von (1.93), so ist $\mathcal{H}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (1.95).
- (b) Ist ν eine Lösung von (1.95), so ist $\tilde{\mathcal{H}}(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (1.93).
- (c) Für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ sind die Abbildungen $\mathcal{H}(\tau, \cdot)$ und $\tilde{\mathcal{H}}(\tau, \cdot)$ einander invers, mithin Homöomorphismen auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
- (d) Sind A, B, F und G periodisch in t mit Periode Θ , so auch \mathcal{H} und $\tilde{\mathcal{H}}$.

Die kontinuierlichen dynamischen Prozesse (1.93) und (1.95) sind also topologisch äquivalent.

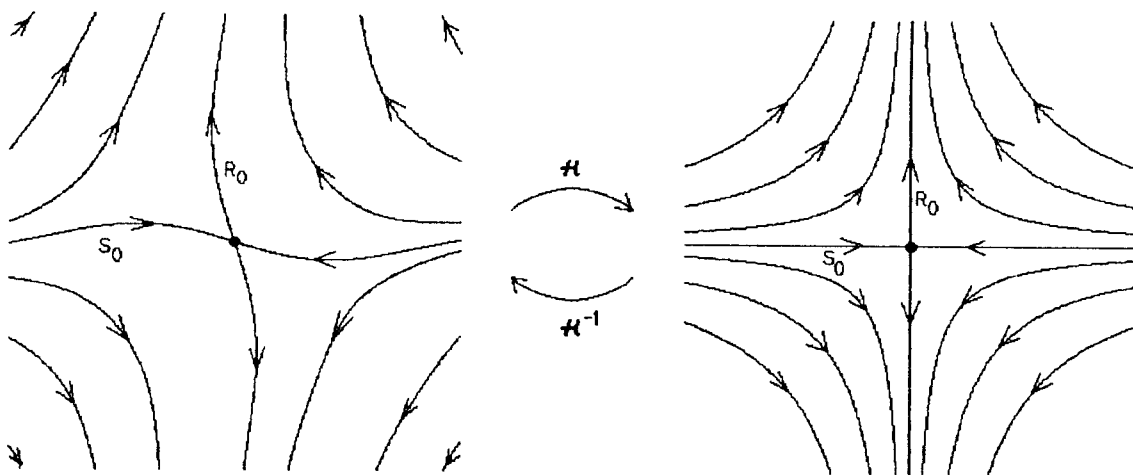


Abbildung 1.16: Der Satz von Hartman-Grobman für dynamische Systeme

Bemerkung: Ist der Prozeß (1.93) autonom und endlichdimensional, d.h. ein dynamisches System der Form

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + F(x, y) \\ \dot{y} = By + G(x, y) \end{cases} \quad (1.96)$$

mit $A \in \mathbb{K}^{M \times M}$, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $F : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^M$, $G : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$, so ist die Bedingung (H1) an die Übergangsabbildungen erfüllt, wenn die Spektren der Matrizen A und B der Ungleichung

$$\sigma_{\max}^r(A) < 0 < \sigma_{\min}^r(B)$$

genügen. Sind auch noch die restlichen Voraussetzungen von Satz 1.7.3 gegeben, ist (1.96) demnach dem linearen System

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ \dot{y} = By \end{cases} \quad (1.97)$$

topologisch äquivalent: Es existiert ein Homöomorphismus $\mathcal{H} : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N$ mit $\mathcal{H}(0, 0) = (0, 0)$, der Lösungen von (1.96) auf Lösungen von (1.97) abbildet; die Umkehrabbildung \mathcal{H}^{-1} bildet Lösungen von (1.97) auf Lösungen von (1.96) ab. (Siehe Abbildung 1.16.)

Beweis: Der Prozeß (1.93) erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.5.3, ist also dem Prozeß

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t, x, s_0(t, x)) \\ \dot{y} = B(t)y + G(t, r_0(t, y), y) \end{cases} \quad (1.98)$$

topologisch äquivalent. Dabei sind s_0 und r_0 die zum S_0 - bzw. R_0 -Faserbündel von (1.93) gehörigen Abbildungen. Die Abbildung \mathcal{F}_1 aus Satz 1.5.3(a) bildet Lösungen von (1.93) auf Lösungen von (1.98) ab; ferner ist für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\mathcal{F}_1(\tau, \cdot)$ ein Homöomorphismus auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Betrachte nun den kontinuierlichen dynamischen Prozeß

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, x, s_0(t, x)). \quad (1.99)$$

Für beliebige $t \in \mathbb{R}$ und $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$ gilt wegen (1.70) und (1.71):

$$\begin{aligned} \|F(t, x, s_0(t, x)) - F(t, \bar{x}, s_0(t, \bar{x}))\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|s_0(t, x) - s_0(t, \bar{x})\| \leq \\ &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\frac{2K^2L(2\alpha - 2KL)}{2\alpha(2\alpha - 4KL)}\|x - \bar{x}\| < \\ &< 2L\|x - \bar{x}\|. \end{aligned}$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß für beliebige $K \geq 1$ gilt:

$$\frac{\alpha}{2K^2}(2 + K - \sqrt{4 + K^2}) \leq \frac{\alpha}{2K}.$$

Die Bedingung (1.94) impliziert demnach $2L < \frac{\alpha}{K}$, d.h. (1.99) erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 1.7.2(a). Also existiert eine stetige Abbildung $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, die Lösungen von (1.99) auf Lösungen von $\dot{x} = A(t)x$ abbildet. Völlig analog erhält man eine stetige Abbildung $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, die Lösungen von

$$\dot{y} = B(t)y + G(t, r_0(t, y), y)$$

auf Lösungen von $\dot{y} = B(t)y$ abbildet. Ferner ist für beliebige $\tau \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\mathcal{L}_1(\tau, \cdot)$ ein Homöomorphismus auf \mathcal{X} , und $\mathcal{L}_2(\tau, \cdot)$ ein Homöomorphismus auf \mathcal{Y} .

Definiert man nun für $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $\eta \in \mathcal{Y}$

$$\mathcal{H}(\tau, \xi, \eta) := (\mathcal{L}_1(\tau, \mathcal{F}_{11}(\tau, \xi, \eta)), \mathcal{L}_2(\tau, \mathcal{F}_{12}(\tau, \xi, \eta))),$$

so ist $\mathcal{H}(\tau, \cdot, \cdot)$ für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, und wegen Satz 1.5.3(a) und (1.92) gilt $\mathcal{H}(\tau, 0, 0) \equiv (0, 0)$ auf \mathbb{R} . Setzt man schließlich $\tilde{\mathcal{H}}(\tau, \cdot, \cdot) := \mathcal{H}^{-1}(\tau, \cdot, \cdot)$, dann bildet \mathcal{H} Lösungen von (1.93) auf Lösungen von (1.95), und $\tilde{\mathcal{H}}$ Lösungen von (1.95) auf Lösungen von (1.93) ab. Die Aussagen zur Periodizität folgen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen von Satz 1.5.3 und Lemma 1.7.2. Damit ist alles bewiesen. \diamond

1.7.3 Der verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman

Wie in der Bemerkung zu Satz 1.7.3 gezeigt wurde, können gewisse nichtlineare, endlichdimensionale dynamische Systeme durch einen Homöomorphismus linearisiert werden, sofern die Matrix des linearen Systems keinen Eigenwert mit verschwindendem Realteil aufweist. Läßt man diese Voraussetzung fallen, so ist hinlänglich bekannt, daß eine Linearisierung im allgemeinen nicht mehr möglich ist. Trotzdem kann man das gegebene nichtlineare System vereinfachen. Diese Vereinfachung — die den Satz von Hartman-Grobman als Spezialfall enthält — ist Gegenstand des *verallgemeinerten Satzes von Hartman-Grobman*. Dieser Satz soll zum Abschluß des ersten Kapitels als letzte Folgerung der entwickelten Theorie für kontinuierliche dynamische Prozesse bewiesen werden. Alternative Beweise findet man in KIRCHGRABER, PALMER [19] (nur für den autonomen, endlichdimensionalen Fall), sowie in HILGER [13] und PALMER [24].

Satz 1.7.4 (Verallgemeinerter Satz von Hartman-Grobman) *Gegeben sei der kontinuierliche dynamische Prozeß*

$$\begin{array}{l} \dot{x} = A(t)x + F(t, x, y, z) \\ \dot{y} = B(t)y + G(t, x, y, z) \\ \dot{z} = C(t)z + H(t, x, y, z) \end{array} \quad (1.100)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} , \mathcal{Y} und \mathcal{Z} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $F : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$, $H : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ mit $F(t, 0, 0, 0) \equiv 0$, $G(t, 0, 0, 0) \equiv 0$, $H(t, 0, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{R} . Ferner gelte:

(H1) Die Übergangsabbildungen Φ bzw. Ψ bzw. Ξ der linearen Prozesse $\dot{x} = A(t)x$ bzw. $\dot{y} = B(t)y$ bzw. $\dot{z} = C(t)z$ erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, s)\| &\leq Ke^{-\alpha_2(t-s)} && \text{für alle } t \geq s \\ \|\Psi(t, s)\| &\leq Ke^{-\alpha_1(t-s)} && \text{für alle } t \leq s \\ \|\Psi(t, s)\| &\leq Ke^{\alpha_1(t-s)} && \text{für alle } t \geq s \\ \|\Xi(t, s)\| &\leq Ke^{\alpha_2(t-s)} && \text{für alle } t \leq s \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $\alpha_2 > \alpha_1 \geq 0$.

(H2) Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $(x, y, z), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(t, x, y, z) - F(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| + L\|z - \bar{z}\| \\ \|G(t, x, y, z) - G(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| + L\|z - \bar{z}\| \\ \|H(t, x, y, z) - H(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| + L\|z - \bar{z}\| \end{aligned}$$

mit

$$0 \leq L < \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{16K^2}(1 + K - \sqrt{1 + K^2}). \quad (1.101)$$

(H3) Für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ und $z \in \mathcal{Z}$ gilt

$$\|F(t, x, y, z)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|H(t, x, y, z)\| \leq M$$

mit einer Konstanten $M \geq 0$.

Dann existieren stetige Abbildungen $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $(c_1, c_2) : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ mit $\mathcal{V}(\tau, 0, 0, 0) \equiv \tilde{\mathcal{V}}(\tau, 0, 0, 0) \equiv (0, 0, 0)$ und $(c_1, c_2)(\tau, 0) \equiv (0, 0)$ auf \mathbb{R} , sowie folgenden Eigenschaften:

(a) Für beliebige $\tau \in \mathbb{R}$ und $\eta \in \mathcal{Y}$ ist die Lösung μ von (1.100) mit $\mu(\tau) = (c_1(\tau, \eta), \eta, c_2(\tau, \eta))$ die eindeutig bestimmte Lösung μ von (1.100) mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\mu_2(\tau) = \eta$.
- (ii) μ ist $(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2})^+$ -quasibeschränkt.
- (iii) μ ist $(-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2})^-$ -quasibeschränkt.

Darüberhinaus ist (c_1, c_2) stetig und eine Periodizität der rechten Seite von (1.100) in t überträgt sich auf (c_1, c_2) .

(b) Der gegebene Prozeß (1.100) ist dem Prozeß

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x \\ \dot{y} &= B(t)y + G(t, c_1(t, y), y, c_2(t, y)) \\ \dot{z} &= C(t)z \end{aligned} \quad (1.102)$$

topologisch äquivalent und es gilt:

- (i) Ist μ eine Lösung von (1.100), so ist $\mathcal{V}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (1.102).
- (ii) Ist ν eine Lösung von (1.102), so ist $\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (1.100).
- (iii) Für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ sind die Abbildungen $\mathcal{V}(\tau, \cdot)$ und $\tilde{\mathcal{V}}(\tau, \cdot)$ einander invers, mithin Homöomorphismen auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$.

(iv) Sind A, B, C, F, G und H periodisch in t mit Periode Θ , so auch \mathcal{V} und $\tilde{\mathcal{V}}$.

Bemerkung: Ist der Prozeß (1.100) autonom und endlichdimensional, d.h. ein endlichdimensionales dynamisches System der Form

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + F(x, y, z) \\ \dot{y} = By + G(x, y, z) \\ \dot{z} = Cz + H(x, y, z) \end{cases} \quad (1.103)$$

mit $A \in \mathbb{K}^{M \times M}$, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $C \in \mathbb{K}^{P \times P}$, $F: \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^P \rightarrow \mathbb{K}^M$, $G: \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^P \rightarrow \mathbb{K}^N$, $H: \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^P \rightarrow \mathbb{K}^P$, so ist die Bedingung (H1) an die Übergangsmatrizen erfüllt, wenn für die Eigenwerte von A, B und C gilt:

- Die Realteile der Eigenwerte von A sind negativ,
- die Realteile der Eigenwerte von B sind 0,
- die Realteile der Eigenwerte von C sind positiv.

Genügt (1.103) auch noch den restlichen Voraussetzungen von Satz 1.7.4, ist es also dem linearen dynamischen System

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ \dot{y} = By + G(c_1(y), y, c_2(y)) \\ \dot{z} = Cz \end{cases} \quad (1.104)$$

topologisch äquivalent: Es existiert ein Homöomorphismus $\mathcal{V}: \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^P \rightarrow \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^P$ mit $\mathcal{V}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, der Lösungen von (1.103) auf Lösungen von (1.104) abbildet; die Umkehrabbildung \mathcal{V}^{-1} bildet Lösungen von (1.104) auf Lösungen von (1.103) ab. Die Menge $\{(c_1(y), y, c_2(y)) : y \in \mathbb{K}^N\}$ ist eine globale *Zentrumsmannigfaltigkeit* für das kontinuierliche dynamische System (1.103).

Beweis: Der Beweis verläuft im wesentlichen wie der Beweis von Satz 1.7.3. Er verwendet nur Satz 1.5.3 über Faserungen des erweiterten Phasenraumes und Lemma 1.7.2.

Zunächst soll (1.100) durch zweimalige Anwendung von Satz 1.5.3 entkoppelt werden. Da dieser Satz einen zweigeteilten Prozeß erwartet, wird (1.100) in der folgenden Form geschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + F(t, x, y, z) \\ \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G(t, x, y, z) \\ H(t, x, y, z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.105)$$

Versieht man den Raum $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ mit der Norm $\| \! \| (y, z) \! \| := \|y\| + \|z\|$, erhält man für die Übergangsabbildung von

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

für beliebige $t \leq s$ die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \Psi(t, s) & 0 \\ 0 & \Xi(t, s) \end{pmatrix} \right\| &= \sup\{\|\Psi(t, s)y\| + \|\Xi(t, s)z\| : \|y\| + \|z\| \leq 1\} \leq \\ &\leq \|\Psi(t, s)\| + \|\Xi(t, s)\| \leq \\ &\leq Ke^{-\alpha_1(t-s)} + Ke^{\alpha_2(t-s)} \leq \\ &\leq 2Ke^{-\alpha_1(t-s)}. \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\left\| \begin{pmatrix} G(t, x, y, z) \\ H(t, x, y, z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ H(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{pmatrix} \right\| \leq 2L\|x - \bar{x}\| + 2L\|(y, z) - (\bar{y}, \bar{z})\| .$$

Nun ist (1.101) der Bedingung $2L < \mathcal{C}(2K, -\alpha_2, -\alpha_1)$ äquivalent, mithin sind die Voraussetzungen von Satz 1.5.3 erfüllt. Damit existieren Abbildungen $s_0^{(1)} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ und $r_0^{(1)} : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ mit

$$\|s_0^{(1)}(t, x) - s_0^{(1)}(t, \bar{x})\| \leq \|x - \bar{x}\| \quad (1.106)$$

$$\|r_0^{(1)}(t, y, z) - r_0^{(1)}(t, \bar{y}, \bar{z})\| \leq \|y - \bar{y}\| + \|z - \bar{z}\| \quad (1.107)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$, $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$ und $z, \bar{z} \in \mathcal{Z}$ (vergleiche hierzu auch (1.71)). Ferner ist (1.105) dem Prozeß

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + F(t, x, s_0^{(1)}(t, x)) \\ \dot{y} &= B(t)y + G(t, r_0^{(1)}(t, y, z), y, z) \\ \dot{z} &= C(t)z + H(t, r_0^{(1)}(t, y, z), y, z) \end{aligned} \quad (1.108)$$

topologisch äquivalent. Betrachtet man jetzt noch den Prozeß auf $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, der aus den letzten beiden Zeilen von (1.108) besteht, so sind ebenfalls die Voraussetzungen von Satz 1.5.3 erfüllt: Für G (und analog für H) gilt nämlich wegen (1.107)

$$\begin{aligned} & \|G(t, r_0^{(1)}(t, y, z), y, z) - G(t, r_0^{(1)}(t, \bar{y}, \bar{z}), \bar{y}, \bar{z})\| \leq \\ & \leq L\|r_0^{(1)}(t, y, z) - r_0^{(1)}(t, \bar{y}, \bar{z})\| + L\|y - \bar{y}\| + L\|z - \bar{z}\| \leq \\ & \leq 2L\|y - \bar{y}\| + 2L\|z - \bar{z}\| \end{aligned}$$

und (1.101) impliziert — wie man durch Nachrechnen leicht bestätigt — die Ungleichung $2L < \mathcal{C}(K, \alpha_1, \alpha_2)$. Also existieren Abbildungen $s_0^{(2)} : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ und $r_0^{(2)} : \mathbb{R} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit

$$\begin{aligned} \|s_0^{(2)}(t, y) - s_0^{(2)}(t, \bar{y})\| & \leq \|y - \bar{y}\| \\ \|r_0^{(2)}(t, z) - r_0^{(2)}(t, \bar{z})\| & \leq \|z - \bar{z}\| , \end{aligned} \quad (1.109)$$

für beliebige $t \in \mathbb{R}$, $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$ und $z, \bar{z} \in \mathcal{Z}$, so daß (1.108) — und damit auch (1.105) und (1.100) — dem Prozeß

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + F(t, x, s_0^{(1)}(t, x)) \\ \dot{y} &= B(t)y + G(t, r_0^{(1)}(t, y, s_0^{(2)}(t, y)), y, s_0^{(2)}(t, y)) \\ \dot{z} &= C(t)z + H(t, r_0^{(1)}(t, r_0^{(2)}(t, z), z), r_0^{(2)}(t, z), z) \end{aligned} \quad (1.110)$$

topologisch äquivalent ist. Setzt man

$$\begin{aligned} c_1(t, y) &:= r_0^{(1)}(t, y, s_0^{(2)}(t, y)) \\ c_2(t, y) &:= s_0^{(2)}(t, y) , \end{aligned}$$

erhält man mit Satz 1.3.1 leicht die Aussagen von (a).

Betrachte nun den Teilprozeß

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, x, s_0^{(1)}(t, x)) \quad (1.111)$$

von (1.110). Für beliebige $t \in \mathbb{R}$ und $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$ folgt aus (1.106):

$$\|F(t, x, s_0^{(1)}(t, x)) - F(t, \bar{x}, s_0^{(1)}(t, \bar{x}))\| \leq L\|x - \bar{x}\| + L\|s_0^{(1)}(t, x) - s_0^{(1)}(t, \bar{x})\| \leq 2L\|x - \bar{x}\|.$$

Ferner impliziert (1.101) die Ungleichung $2L < \frac{\alpha_2}{K}$, d.h. (1.111) erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 1.7.2(a) und ist somit dem linearen Prozeß $\dot{x} = A(t)x$ topologisch äquivalent.

Als nächstes soll der Teilprozeß

$$\dot{z} = C(t)z + H(t, r_0^{(1)}(t, r_0^{(2)}(t, z), z), r_0^{(2)}(t, z), z) \quad (1.112)$$

von (1.110) linearisiert werden. Für beliebige $t \in \mathbb{R}$ und $z, \bar{z} \in \mathcal{Z}$ folgt aus (1.107) und (1.109):

$$\begin{aligned} & \|H(t, r_0^{(1)}(t, r_0^{(2)}(t, z), z), r_0^{(2)}(t, z), z) - H(t, r_0^{(1)}(t, r_0^{(2)}(t, \bar{z}), \bar{z}), r_0^{(2)}(t, \bar{z}), \bar{z})\| \leq \\ & \leq L\|r_0^{(1)}(t, r_0^{(2)}(t, z), z) - r_0^{(1)}(t, r_0^{(2)}(t, \bar{z}), \bar{z})\| + L\|r_0^{(2)}(t, z) - r_0^{(2)}(t, \bar{z})\| + L\|z - \bar{z}\| \leq \\ & \leq 2L\|r_0^{(2)}(t, z) - r_0^{(2)}(t, \bar{z})\| + 2L\|z - \bar{z}\| \leq \\ & \leq 4L\|z - \bar{z}\|. \end{aligned}$$

Aus (1.101) folgt durch leichte Abschätzungen die Ungleichung $4L < \frac{\alpha_2}{K}$, d.h. (1.112) erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 1.7.2(b) und ist somit dem linearen Prozeß $\dot{z} = C(t)z$ topologisch äquivalent.

Insgesamt ist schließlich der Prozeß (1.110) — und damit auch (1.100) — dem Prozeß (1.102) topologisch äquivalent. Die in (b) angegebene stetige Abbildung \mathcal{V} ist die Hintereinanderausführung der obigen Entkoppelungs- und Linearisierungsabbildungen. Da diese Abbildungen von Satz 1.5.3 und Lemma 1.7.2 geliefert wurden, folgen die Aussagen zur Periodizität von \mathcal{V} aus den entsprechenden Ergebnissen in diesem Satz bzw. Lemma; $\mathcal{V}(\tau, 0, 0, 0) \equiv (0, 0, 0)$ auf \mathbb{R} zeigt man wie in Satz 1.7.3. Die Aussagen über $\tilde{\mathcal{V}}$ folgen ebenfalls unmittelbar. Damit ist alles bewiesen. \diamond

Kapitel 2

Diskrete dynamische Prozesse

Die Methoden und Ergebnisse des letzten Kapitels sollen nun auf *diskrete dynamische Prozesse* — d.h. auf *nichtautonome Differenzgleichungen* — in beliebigen Banachräumen übertragen werden. Dabei treten zunächst einige Komplikationen auf, denn einerseits muß bei Differenzgleichungen mit nichtinvertierbarer rechter Seite eine Lösung nicht auf dem ganzen betrachteten diskreten Intervall existieren, andererseits ist es nicht ohne weiteres möglich, die im ersten Kapitel mehrfach benutzte Zeitumkehr anzuwenden — man bräuchte eine mehr oder weniger explizite Darstellung der Umkehrabbildung der rechten Seite der Differenzgleichung, oder weitere Voraussetzungen. Diese Komplikationen können jedoch umgangen werden. Der dabei entstehende beweistechnische Mehraufwand wird an anderer Stelle wieder ausgeglichen: Die diskrete Topologie der ganzen Zahlen \mathbb{Z} vereinfacht einige Stetigkeitsbeweise enorm.

Alles in allem erhält man analoge Ergebnisse zum Fall der kontinuierlichen dynamischen Prozesse. Der Aufbau dieses zweiten Kapitels stimmt mit dem des ersten Kapitels überein.

- Im ersten Abschnitt werden grundlegende Definitionen und Ergebnisse über nichtautonome Differenzgleichungen zusammengestellt. Insbesondere werden die Differenzgleichung der gestörten Bewegung, lineare Prozesse, Übergangsabbildungen, Variation der Konstanten und das diskrete Gronwall-Lemma behandelt.
- Hierauf wird der Begriff der quasibeschränkten Lösung eingeführt und einige Aussagen über quasibeschränkte Lösungen linearer Prozesse werden bewiesen.
- Mit diesen Ergebnissen kann im nächsten Abschnitt der Hauptsatz über invariante Faserbündel angegeben werden.
- Wie im Fall der Differentialgleichungen werden anschließend invariante Faserbündel durch Lösungen behandelt,
- und horizontale und vertikale Faserungen des erweiterten Phasenraumes konstruiert.
- Diese Ergebnisse werden sodann verwendet, um das Reduktionsprinzip
- und die Sätze von Hartman-Grobman für diskrete dynamische Prozesse zu beweisen.

Alle Ergebnisse werden mit minimalen Voraussetzungen an die rechte Seite formuliert und bewiesen. Insbesondere wird die Invertierbarkeit der rechten Seite nur dann gefordert, wenn dies unbedingt erforderlich ist. So werden etwa der Hauptsatz über invariante Faserbündel und das Reduktionsprinzip für nicht notwendigerweise invertierbare Prozesse bewiesen.

Da die Entwicklung der Theorie — wenn der Hauptsatz einmal zur Verfügung steht — keine speziellen Eigenschaften von Differential- oder Differenzgleichungen verwendet, können die meisten Beweise ab dem vierten Abschnitt fast wörtlich aus dem ersten Kapitel übernommen werden. Deshalb werden diese Beweise entweder gar nicht, oder nur sehr knapp angegeben.

2.1 Grundlegende Definitionen und Ergebnisse

Im Gegensatz zu den nichtautonomen Differentialgleichungen waren nichtautonome Differenzgleichungen bis heute nur sehr selten Gegenstand eingehender Untersuchungen. Erst vor wenigen Jahren erschien das erste Lehrbuch zu diesem Thema: LAKSHMIKANTHAM, TRIGIANTE [21]. Deshalb werden im folgenden zunächst alle grundlegenden Definitionen und Ergebnisse über nichtautonome Differenzgleichungen, sowie einige Sätze über lineare Prozesse angegeben. Die Darstellung orientiert sich im wesentlichen an der Vorlesung AULBACH [5].

Der wichtigste Unterschied zwischen den Differential- und den Differenzgleichungen liegt in der unterschiedlichen Zeitskala — an die Stelle der kontinuierlichen Zeit in Form reeller Intervalle tritt bei den Differenzgleichungen eine diskrete Zeitskala in Form von “ \mathbb{Z} -Intervallen”: Ein *diskretes Intervall* oder *\mathbb{Z} -Intervall* I ist der Durchschnitt eines reellen Intervalls mit der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen. I heißt *nach rechts unbeschränkt*, wenn es von der Form

$$I = \{k \in \mathbb{Z} : k \geq \kappa_0\} =: \mathbb{Z}_{\kappa_0} \quad \text{mit einem } \kappa_0 \in \mathbb{Z}$$

ist; analog erklärt man *nach links unbeschränkte \mathbb{Z} -Intervalle*. Mit diesen Bezeichnungen kann nun der Begriff der *nichtautonomen Differenzgleichung* definiert werden.

Dazu sei im folgenden $I \subset \mathbb{Z}$ ein diskretes Intervall, \mathcal{X} und \mathcal{P} seien beliebige Banachräume und $f : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ sei eine stetige Abbildung. Dann nennt man

$$\boxed{x' = f(k, x, p)} \tag{2.1}$$

eine *nichtautonome, parameterabhängige Differenzgleichung (erster Ordnung)*, bzw. einen *parameterabhängigen, diskreten dynamischen Prozeß*. Eine auf einem diskreten Intervall $J \subset I$ erklärte Funktion $\lambda : J \rightarrow \mathcal{X}$ heißt *Lösung von (2.1) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$* , wenn für alle $k \in J$ mit $k + 1 \in J$ gilt:

$$\lambda(k + 1) = f(k, \lambda(k), p).$$

Eine *Anfangsbedingung* zu (2.1) ist eine Beziehung der Form

$$x(\kappa_0) = \xi_0 \quad \text{mit } \kappa_0 \in I \quad \text{und } \xi_0 \in \mathcal{X}. \tag{2.2}$$

λ heißt *Lösung des Anfangswertproblems (2.1), (2.2) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$* , wenn $\kappa_0 \in J$ und $\lambda(\kappa_0) = \xi_0$ erfüllt sind. Lösungen diskreter dynamischer Prozesse werden im *erweiterten Phasenraum* $I \times \mathcal{X}$ in naheliegender Weise als Punktfolgen dargestellt. (Vergleiche dazu auch Abbildung 2.1.)

An diese Definitionen schließt sich natürlich sofort die Frage an, unter welchen Bedingungen zu einem gegebenen Anfangswertproblem eine Lösung existiert, ob diese Lösung eindeutig bestimmt und wie groß ihr maximales Existenzintervall ist. Die Antwort auf diese Frage ist (im wahrsten Sinne des Wortes) *einerseits* leichter, *andererseits* komplizierter als bei den Differentialgleichungen:

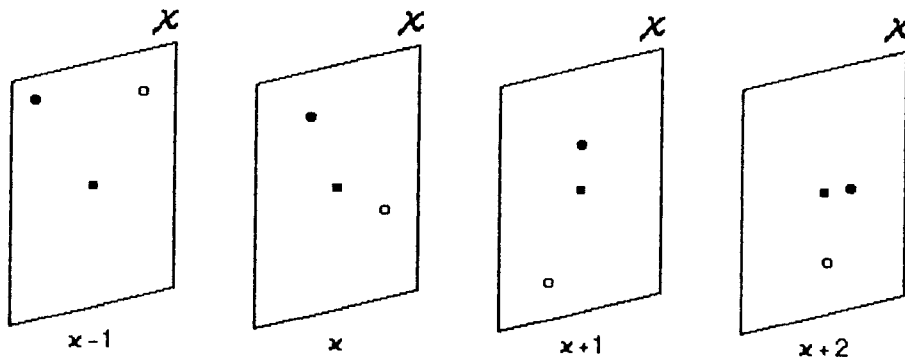


Abbildung 2.1: Der diskrete erweiterte Phasenraum

- Betrachtet man das Anfangswertproblem (2.1), (2.2) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$, so wird durch die rekursive Definition

$$\begin{aligned}\lambda(\kappa_0) &:= \xi_0, \\ \lambda(k+1) &:= f(k, \lambda(k), p) \quad \text{für alle } k \geq \kappa_0 \text{ mit } k+1 \in I\end{aligned}$$

die offensichtlich eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems auf $I \cap \mathbb{Z}_{\kappa_0}$ erklärt. Auf der einen Seite von κ_0 , nämlich in positiver Zeitrichtung, ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung also eine Trivialität.

- Auf der anderen Seite von κ_0 ist im allgemeinen jedoch keine Aussage möglich. Betrachte dazu die Funktion $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(k, x) \equiv 0$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Das Anfangswertproblem

$$x' = f(k, x) = 0 \quad , \quad x(0) = 1$$

besitzt keine Lösung mit Definitionsbereich $\mathbb{Z}_{-\kappa}$, für $\kappa \in \mathbb{N}$. Dagegen besitzt das Anfangswertproblem

$$x' = f(k, x) = 0 \quad , \quad x(0) = 0$$

unendlich viele Lösungen mit Definitionsbereich $\mathbb{Z}_{-\kappa}$, für $\kappa \in \mathbb{N}$, nämlich die Funktionenschar $\lambda_\xi: \mathbb{Z}_{-\kappa} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$, mit $\lambda_\xi(-\kappa) := \xi$ und $\lambda_\xi(k) := 0$ für $k > -\kappa$. Diese Schwierigkeiten mit der negativen Zeitrichtung verschwinden jedoch sofort, wenn man von der Abbildung $f(k, \cdot, p): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ für beliebiges $k \in I$ und $p \in \mathcal{P}$ Bijektivität verlangt. In diesem Fall ist dann die Lösung eines Anfangswertproblems auch links von κ_0 eindeutig festgelegt.

Diese Bemerkungen zeigen, daß bei der Definition der allgemeinen Lösung einer Differenzgleichung einige Vorsicht angebracht ist, sofern die rechte Seite nicht invertierbar ist. Aus diesem Grund werden nun zwei Arten von allgemeiner Lösung definiert: Die *allgemeine Lösung* ist für beliebige Differenzgleichungen erklärt und beinhaltet die eindeutig bestimmten Lösungen aller Anfangswertprobleme in positiver Zeitrichtung, während die *erweiterte allgemeine Lösung* nur für invertierbare Prozesse erklärt ist und die eindeutig bestimmten Lösungen auf dem gesamten Definitionsintervall beschreibt. Zur Definition wird wieder die Differenzgleichung (2.1) betrachtet. Die Abbildung

$$\lambda: \{(k, \kappa_0, \xi_0, p_0) \in I \times I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} : k \geq \kappa_0\} \rightarrow \mathcal{X}$$

definiert durch

$$\lambda(k; \kappa_0, \xi_0, p_0) := \begin{cases} \xi_0 & \text{für } k = \kappa_0 \\ f(k-1, \lambda(k-1; \kappa_0, \xi_0, p_0), p_0) & \text{für } k > \kappa_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

nennt man die *allgemeine Lösung des Prozesses (2.1)*. Für eine beliebige rechte Seite f ist dann die Abbildung $\lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, p_0)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (2.1), (2.2) zum Parameter $p_0 \in \mathcal{P}$ auf dem diskreten Intervall $I \cap \mathbb{Z}_{\kappa_0}$. Ferner folgt aus der vorausgesetzten Stetigkeit von f mit Induktion leicht die Stetigkeit der allgemeinen Lösung λ .

Ist für beliebige $k \in I$ und $p \in \mathcal{P}$ die Abbildung $f(k, \cdot, p) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bijektiv mit Umkehrabbildung $f^{-1}(k, \cdot, p) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, so nennt man die Abbildung

$$\lambda : I \times I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$$

definiert durch

$$\lambda(k; \kappa_0, \xi_0, p_0) := \begin{cases} \xi_0 & \text{für } k = \kappa_0 \\ f(k-1, \lambda(k-1; \kappa_0, \xi_0, p_0), p_0) & \text{für } k > \kappa_0 \\ f^{-1}(k, \lambda(k+1; \kappa_0, \xi_0, p_0), p_0) & \text{für } k < \kappa_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

die *erweiterte allgemeine Lösung des Prozesses (2.1)*. Man erkennt unmittelbar, daß die Abbildung $\lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, p_0)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (2.1), (2.2) zum Parameter $p_0 \in \mathcal{P}$ auf dem gesamten diskreten Intervall I ist. Setzt man noch voraus, daß auch die Abbildung $f^{-1} : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig ist, so folgt mit Induktion sofort die Stetigkeit der erweiterten allgemeinen Lösung λ .

Darüberhinaus implizieren diese beiden Definitionen für beliebige $\kappa, k_1, k_2 \in I$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ die Gleichung

$$\boxed{\lambda(k_2; \kappa, \xi, p) = \lambda(k_2; k_1, \lambda(k_1; \kappa, \xi, p), p)}, \quad (2.5)$$

wobei im Fall der allgemeinen Lösung noch $\kappa \leq k_1 \leq k_2$ vorausgesetzt werden muß. Für die erweiterte allgemeine Lösung ist (2.5) ohne Einschränkung gültig.

Möchte man das Verhalten einer Differenzgleichung in der Umgebung einer speziellen Lösung untersuchen, so bedient man sich — analog zu den Differentialgleichungen — einer neuen Differenzgleichung mit trivialer Lösung, die sich in der Umgebung der trivialen Lösung genauso wie der ursprüngliche Prozeß in der Umgebung der gegebenen speziellen Lösung verhält. Diese *Differenzgleichung der gestörten Bewegung* ist Gegenstand des folgenden Satzes, der nur für parameterunabhängige Differenzgleichungen formuliert ist.

Satz 2.1.1 *Gegeben seien ein diskretes Intervall $I \subset \mathbb{Z}$, ein Banachraum \mathcal{X} und eine stetige Abbildung $f : I \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Betrachte neben dem diskreten dynamischen Prozeß*

$$\boxed{x' = f(k, x)} \quad (2.6)$$

mit der speziellen Lösung $\mu : J \rightarrow \mathcal{X}$, auf einem diskreten Intervall $J \subset I$, die sogenannte Differenzgleichung der gestörten Bewegung (von (2.6) zur Lösung μ)

$$\boxed{x' = f(k, x + \mu(k)) - f(k, \mu(k))}, \quad (2.7)$$

wobei $J \times \mathcal{X}$ der Definitionsbereich der rechten Seite von (2.7) sei. Dann gilt:

(a) *Die Differenzgleichung der gestörten Bewegung besitzt die triviale Lösung auf J .*

(b) Eine auf dem diskreten Intervall $J_0 \subset J$ definierte Funktion $\nu : J_0 \rightarrow \mathcal{X}$ ist genau dann eine Lösung der Differenzgleichung der gestörten Bewegung (2.7), wenn $\nu + \mu|_{J_0} : J_0 \rightarrow \mathcal{X}$ eine Lösung des ursprünglichen Prozesses (2.6) ist.

Beweis: Die Aussage in (a) ist offensichtlich. Da μ nach Voraussetzung eine Lösung von (2.6) ist, erhält man für beliebiges $k \in J_0$ mit $k+1 \in J_0$ die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \nu(k+1) &= f(k, \nu(k) + \mu(k)) - f(k, \mu(k)) \\ \Leftrightarrow \nu(k+1) + f(k, \mu(k)) &= f(k, \nu(k) + \mu(k)) \\ \Leftrightarrow \nu(k+1) + \mu(k+1) &= f(k, \nu(k) + \mu(k)). \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar (b). ◇

Die Differenzgleichung der gestörten Bewegung wird — wie bei den Differentialgleichungen im ersten Kapitel — das zentrale Hilfsmittel zur Konstruktion invarianter Faserbündel durch Lösungen sein. Ferner ist auch hier die Bemerkung angebracht, daß die Differenzgleichung der gestörten Bewegung im Rahmen einer rein autonomen Theorie nicht verwendet werden kann: Selbst wenn die Ausgangsgleichung (2.6) autonom ist, d.h. wenn die rechte nicht von k abhängt, ist die Differenzgleichung der gestörten Bewegung (2.7) im allgemeinen nicht autonom!

Nach diesen allgemeinen Definitionen und Ergebnissen über nichtautonome Differenzgleichungen soll nun speziell auf die Klasse der nichtautonomen linearen Prozesse eingegangen werden.

Dazu sei $I \subset \mathbb{Z}$ wieder ein diskretes Intervall und \mathcal{X} ein beliebiger Banachraum. Ferner seien Abbildungen $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ und $b : I \rightarrow \mathcal{X}$ gegeben. Dann nennt man die Differenzgleichung

$$\boxed{x' = A(k)x + b(k)} \quad (2.8)$$

eine (*inhomogene*) *nichtautonome lineare Differenzgleichung*. Die zugehörige *homogene nichtautonome lineare Differenzgleichung* ist durch

$$\boxed{x' = A(k)x} \quad (2.9)$$

gegeben. (Parameterabhängige lineare Prozesse können analog zum Fall allgemeiner Differenzgleichungen definiert werden.)

Möchte man die allgemeine Lösung von (2.8) bzw. (2.9) möglichst übersichtlich beschreiben, bedient man sich — wie bei den Differentialgleichungen — der Übergangsabbildung des homogenen Prozesses. Im Gegensatz zum kontinuierlichen Fall ist die Übergangsabbildung im diskreten Fall jedoch äußerst leicht angebar: Die Abbildung

$$\Phi : \{(m, n) \in I \times I : m \geq n\} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$$

definiert durch

$$\Phi(m, n) := \begin{cases} \text{id} & \text{für } m = n \\ A(m-1) \cdots A(n) & \text{für } m > n \end{cases}$$

heißt *Übergangsabbildung des (homogenen) linearen Prozesses (2.9)*. Man überzeugt sich leicht, daß mit dieser Definition die allgemeine Lösung von (2.9) durch

$$\lambda(k; \kappa_0, \xi_0) = \Phi(k, \kappa_0)\xi_0$$

gegeben ist.

Ist für beliebiges $k \in I$ die lineare Abbildung $A(k)$ bijektiv, so ist auch die rechte Seite von (2.9) bzw. (2.8) für beliebiges k bijektiv. Ferner ist nach dem Satz von der offenen Abbildung (vergleiche YOSIDA [29, pp. 75ff]) mit $A(k)$ auch $A(k)^{-1}$ stetig. Für die Prozesse (2.9) und (2.8) sind also die erweiterten allgemeinen Lösungen erklärt und stetig. Um auch diese Abbildungen mittels der Übergangsabbildung beschreiben zu können, wird die folgende Definition benötigt.

Sei für beliebiges $k \in I$ die Abbildung $A(k)$ ein Element des Raumes $\mathcal{GL}(\mathcal{X})$. Dann nennt man die Abbildung

$$\Phi : I \times I \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{X})$$

definiert durch

$$\Phi(m, n) := \begin{cases} \text{id} & \text{für } m = n \\ A(m-1) \cdot \dots \cdot A(n) & \text{für } m > n \\ A(m)^{-1} \cdot \dots \cdot A(n-1)^{-1} & \text{für } m < n \end{cases} \quad (2.10)$$

die *erweiterte Übergangsabbildung des (homogenen) linearen Prozesses (2.9)*. Die erweiterte allgemeine Lösung von (2.9) lautet dann wieder

$$\lambda(k; \kappa_0, \xi_0) = \Phi(k, \kappa_0) \xi_0 .$$

Bevor als nächstes die Darstellung der (erweiterten) allgemeinen Lösung des inhomogenen Prozesses (2.8) angegeben wird, sollen noch einige Eigenschaften der erweiterten Übergangsabbildung notiert werden: Für beliebige $k, m, n \in I$ gelten für die erweiterte Übergangsabbildung die Beziehungen

$$\Phi(k+1, m) = A(k) \Phi(k, m) , \quad (2.11)$$

$$\Phi(k, m) = \Phi(k, n) \Phi(n, m) , \quad (2.12)$$

$$\Phi(k, m)^{-1} = \Phi(m, k) .$$

Die Gleichungen (2.11) und (2.12) gelten auch für die Übergangsabbildung, wenn man noch $k \geq n \geq m$ fordert.

Die bereits angekündigte Formel zur Darstellung der allgemeinen Lösung des inhomogenen nichtautonomen linearen Prozesses (2.8) ist Gegenstand des folgenden Satzes.

Satz 2.1.2 (Variation der Konstanten) *Gegeben sei der lineare Prozeß (2.8). Dann ist die allgemeine Lösung λ von (2.8) gegeben durch*

$$\lambda(k; \kappa_0, \xi_0) = \Phi(k, \kappa_0) \xi_0 + \sum_{i=\kappa_0}^{k-1} \Phi(k, i+1) b(i)$$

für $k \geq \kappa_0$. Sind darüberhinaus alle Abbildungen $A(k)$ bijektiv, so erhält man für die erweiterte allgemeine Lösung die Beziehung

$$\lambda(k; \kappa_0, \xi_0) = \Phi(k, \kappa_0) \xi_0 - \sum_{i=k}^{\kappa_0-1} \Phi(k, i+1) b(i)$$

für beliebiges $k \leq \kappa_0$.

Bemerkung: Wie üblich definiert man $\sum_{i=m}^n a_i := 0$ für $m > n$.

Beweis: Da unter den jeweils angegebenen Voraussetzungen die Lösung eines Anfangswertproblems in positiver bzw. negativer Zeitrichtung eindeutig bestimmt ist, genügt es zu zeigen, daß die aufgeführten Abbildungen das entsprechende Anfangswertproblem lösen. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(\kappa_0, \kappa_0)\xi_0 + \sum_{i=\kappa_0}^{\kappa_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1)b(i) &= \xi_0, \\ \Phi(\kappa_0, \kappa_0)\xi_0 - \sum_{i=\kappa_0}^{\kappa_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1)b(i) &= \xi_0,\end{aligned}$$

d.h. die Anfangsbedingungen sind erfüllt. Für $k \geq \kappa_0$ folgt mit (2.11)

$$\begin{aligned}A(k) \left(\Phi(k, \kappa_0)\xi_0 + \sum_{i=\kappa_0}^{k-1} \Phi(k, i+1)b(i) \right) + b(k) &= \\ = \Phi(k+1, \kappa_0)\xi_0 + \sum_{i=\kappa_0}^{k-1} \Phi(k+1, i+1)b(i) + \Phi(k+1, k+1)b(k) &= \\ = \Phi(k+1, \kappa_0)\xi_0 + \sum_{i=\kappa_0}^k \Phi(k+1, i+1)b(i),\end{aligned}$$

analog erhält man für $k < \kappa_0$ die Gleichung

$$\begin{aligned}A(k) \left(\Phi(k, \kappa_0)\xi_0 - \sum_{i=k}^{\kappa_0-1} \Phi(k, i+1)b(i) \right) + b(k) &= \\ = \Phi(k+1, \kappa_0)\xi_0 - \sum_{i=k}^{\kappa_0-1} \Phi(k+1, i+1)b(i) + \Phi(k+1, k+1)b(k) &= \\ = \Phi(k+1, \kappa_0)\xi_0 - \sum_{i=k+1}^{\kappa_0-1} \Phi(k+1, i+1)b(i).\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ◇

Im nächsten Satz wird das diskrete Analogon zum Gronwall-Lemma behandelt.

Satz 2.1.3 (Diskretes Gronwall-Lemma) Gegeben seien feste Zahlen $\kappa \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt:

(a) Erfüllen die Abbildungen $a, c : \mathbb{Z}_\kappa \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ für alle $k \geq \kappa$ die Ungleichung

$$a(k) \leq c(k) + b \sum_{i=\kappa}^{k-1} a(i),$$

so folgt für beliebiges $k \geq \kappa$:

$$a(k) \leq (1+b)^{k-\kappa} c(\kappa) + \sum_{i=\kappa+1}^k (1+b)^{k-i} (c(i) - c(i-1)).$$

(b) Ist $b < 1$ und erfüllen die Abbildungen $a, c : (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ für alle $k \leq \kappa$ die Ungleichung

$$a(k) \leq c(k) + b \sum_{i=k}^{\kappa-1} a(i),$$

so folgt für beliebiges $k < \kappa$:

$$a(k) \leq (1-b)^{k-\kappa} c(\kappa-1) + \sum_{i=k}^{\kappa-2} (1-b)^{k-i-1} (c(i) - c(i+1)).$$

Beweis: (a) Setzt man

$$\alpha_k := c(k) + b \sum_{i=\kappa}^{k-1} a(i) \quad \text{für } k \geq \kappa,$$

so gilt nach Voraussetzung für beliebiges $k \geq \kappa$ die Abschätzung $a(k) \leq \alpha_k$. Damit erhält man sofort

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = c(k+1) - c(k) + ba(k) \leq c(k+1) - c(k) + b\alpha_k,$$

und weiter

$$\alpha_{k+1} \leq c(k+1) - c(k) + (1+b)\alpha_k \quad \text{für alle } k \geq \kappa.$$

Mit vollständiger Induktion folgt hieraus

$$\alpha_k \leq (1+b)^{k-\kappa} \alpha_\kappa + \sum_{i=\kappa+1}^k (1+b)^{k-i} (c(i) - c(i-1)) \quad \text{für } k \geq \kappa,$$

und wegen $\alpha_\kappa = c(\kappa)$ und $a(k) \leq \alpha_k$ gilt schließlich für alle $k \geq \kappa$:

$$a(k) \leq (1+b)^{k-\kappa} c(\kappa) + \sum_{i=\kappa+1}^k (1+b)^{k-i} (c(i) - c(i-1)).$$

Damit ist der erste Teil von Satz 2.1.3 bewiesen.

(b) Definiert man

$$\beta_k := \frac{1}{1-b} \left(c(k) + b \sum_{i=k+1}^{\kappa-1} a(i) \right) \quad \text{für } k \leq \kappa-1,$$

so impliziert die Voraussetzung des Satzes für beliebiges $k \leq \kappa-1$ die Ungleichung $a(k) \leq \beta_k$. Damit folgt sofort

$$\beta_k - \beta_{k+1} = \frac{1}{1-b} (c(k) - c(k+1) + ba(k+1)) \leq \frac{1}{1-b} (c(k) - c(k+1) + b\beta_{k+1})$$

und

$$\beta_k \leq \frac{1}{1-b} (c(k) - c(k+1) + \beta_{k+1}) \quad \text{für } k \leq \kappa-2,$$

woraus man mit vollständiger Induktion die Abschätzung

$$\beta_k \leq (1-b)^{k-\kappa+1} \beta_{\kappa-1} + \sum_{i=k}^{\kappa-2} (1-b)^{k-i-1} (c(i) - c(i+1)) \quad \text{für } k \leq \kappa-2$$

erhält. Die Definition von $\beta_{\kappa-1}$ impliziert jetzt mit $a(k) \leq \beta_k$ für alle $k \leq \kappa-2$:

$$a(k) \leq (1-b)^{k-\kappa} c(\kappa-1) + \sum_{i=k}^{\kappa-2} (1-b)^{k-i-1} (c(i) - c(i+1)).$$

Beachtet man noch, daß die Voraussetzung des Satzes für $k = \kappa - 1$ die Ungleichung

$$a(\kappa - 1) \leq c(\kappa - 1) + ba(\kappa - 1)$$

zur Folge hat, ist auch der zweite Teil bewiesen. \diamond

Zum Abschluß dieses ersten Abschnittes sollen die linearen Prozesse noch einmal zugunsten beliebiger Differenzgleichungen verlassen werden. Wie bei den Differentialgleichungen ist auch bei den nichtautonomen Differenzgleichungen der autonome Spezialfall von besonderem Interesse: Sei \mathcal{X} ein beliebiger Banachraum und $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Abbildung. Dann nennt man eine Differenzgleichung der Form

$$\boxed{x' = f(x)} \quad (2.13)$$

eine *autonome Differenzgleichung* bzw. ein *diskretes dynamisches System*. Autonome Differenzgleichungen sind also "nichtautonome" Differenzgleichungen, deren rechte Seite von der Zeit nicht abhängt. Bei festem $\xi_0 \in \mathcal{X}$ unterscheiden sich die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$x' = f(x) \quad , \quad x(\kappa_0) = \xi_0$$

für $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ lediglich durch eine Translation in der Zeit. Aus diesem Grund wird in der allgemeinen Lösung von (2.13) die Anfangszeit o.B.d.A. gleich 0 gesetzt. Definiert man für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\varphi(k; \xi_0) := \lambda(k; 0, \xi_0) \quad , \quad (2.14)$$

so nennt man die Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ die *allgemeine Lösung des diskreten dynamischen Systems (2.13)*. Ist die Abbildung f darüberhinaus ein Homöomorphismus, so ist in (2.14) sogar $k \in \mathbb{Z}$ zulässig und man nennt die entstehende Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ die *erweiterte allgemeine Lösung des diskreten dynamischen Systems (2.13)*.

2.2 Quasibeschränkte Lösungen linearer Prozesse

Wie bereits bei den kontinuierlichen dynamischen Prozessen im ersten Kapitel, ist auch bei den diskreten dynamischen Prozessen der Begriff der *Quasibeschränktheit* der Schlüssel zum Hauptsatz über invariante Faserbündel. In diesem Abschnitt sollen — nach der Definition der Quasibeschränktheit für Funktionen, die auf diskreten Intervallen erklärt sind — vier Lemmata bewiesen werden, die den vier Hilfssätzen des ersten Kapitels entsprechen.

Zur Motivation der diskreten Quasibeschränktheit werden zunächst endlichdimensionale, homogene lineare Differenzgleichungen betrachtet. Sei dazu die M -dimensionale Differenzgleichung

$$\boxed{x' = Ax} \quad (2.15)$$

mit einer nicht notwendigerweise invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{K}^{M \times M}$ gegeben. Die Übergangsabbildung Φ , die in diesem Spezialfall wieder Übergangsmatrix genannt wird, kann leicht angegeben werden. Sie lautet für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq n$

$$\Phi(m, n) = A^{m-n} \quad , \quad A^0 := \text{id} \quad ,$$

weshalb die allgemeine Lösung von (2.15) durch

$$\lambda(k; \kappa, \xi) = A^{k-\kappa} \xi$$

gegeben ist. Im Anhang wird gezeigt (Satz A.3.5, Seite 131), daß für beliebiges $\alpha > \sigma_{\max}^b(A)$ eine Konstante $K = K(\alpha) \geq 1$ existiert, mit

$$\|A^{k-\kappa}\| \leq K\alpha^{k-\kappa} \quad \text{für alle } k \geq \kappa.$$

Für beliebige $k, \kappa \in \mathbb{Z}$ und $\xi \in \mathbb{K}^M$ erhält man somit

$$\|\lambda(k; \kappa, \xi)\| \leq K\|\xi\|\alpha^{k-\kappa} \quad \text{für alle } k \geq \kappa.$$

Bei gegebenem $\alpha > 0$ weisen also — unter gewissen Voraussetzungen an die Beträge der Eigenwerte von A — alle Lösungen von (2.15) für $k \rightarrow \infty$ dieselbe, von α abhängige, “exponentielle Abklingrate” auf, die sich jedoch von der Abklingrate im kontinuierlichen Fall leicht unterscheidet. Dieser neue Begriff der *Quasibeschränktheit* wird in der nächsten Definition exakt eingeführt.

Definition 2.2.1 *Gegeben seien ein $\eta \in \mathbb{R}^+$, ein Banachraum \mathcal{X} , ein diskretes Intervall $I \subset \mathbb{Z}$ und eine Abbildung $g : I \rightarrow \mathcal{X}$.*

- (a) *g heißt η^+ -quasibeschränkt oder η -quasibeschränkt für $k \rightarrow \infty$, wenn I nach rechts unbeschränkt ist und für ein $\kappa \in I$ gilt:*

$$\sup\{\|g(k)\|\eta^{-k} : k \geq \kappa\} < \infty.$$

In diesem Fall definiert man $\|g\|_{\kappa, \eta}^+ := \sup\{\|g(k)\|\eta^{-k} : k \geq \kappa\}$.

- (b) *g heißt η^- -quasibeschränkt oder η -quasibeschränkt für $k \rightarrow -\infty$, wenn I nach links unbeschränkt ist und für ein $\kappa \in I$ gilt:*

$$\sup\{\|g(k)\|\eta^{-k} : k \leq \kappa\} < \infty.$$

In diesem Fall definiert man $\|g\|_{\kappa, \eta}^- := \sup\{\|g(k)\|\eta^{-k} : k \leq \kappa\}$.

- (c) *g heißt η -quasibeschränkt, wenn $I = \mathbb{Z}$ ist und g die folgende Abschätzung erfüllt:*

$$\sup\{\|g(k)\|\eta^{-k} : k \in \mathbb{Z}\} < \infty.$$

Man setzt dann $\|g\|_{\eta} := \sup\{\|g(k)\|\eta^{-k} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Wie im ersten Kapitel sollen einige Bemerkungen diese Definition näher erläutern. Sei dazu $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ eine beliebige Abbildung.

- (a) *g ist genau dann η -quasibeschränkt, wenn für alle $k \in \mathbb{Z}$*

$$\|g(k)\| \leq C\eta^k$$

gilt, mit einer Konstanten $C \geq 0$. (Siehe Abbildung 2.2(a). Die Kreise geben den Verlauf von $C\eta^k$ an, die Rauten den von $\|g(k)\|$.)

- (b) *Für $\eta = 1$ entspricht die η -Quasibeschränktheit der gewöhnlichen Beschränktheit von \mathcal{X} -wertigen Abbildungen. Ferner ist g genau dann η^+ -quasibeschränkt, wenn für ein $\kappa \in \mathbb{Z}$ die Einschränkung von g auf \mathbb{Z}_{κ} beschränkt ist. Analog läßt sich die η^- -Quasibeschränktheit charakterisieren. (Siehe Abbildung 2.2(b).)*

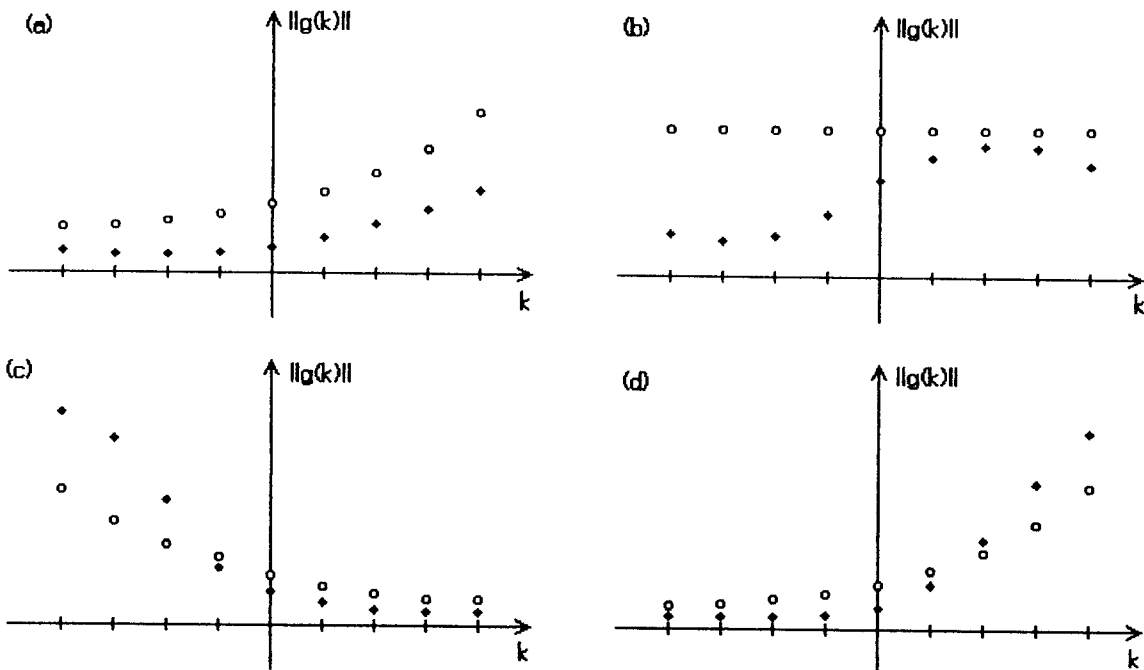


Abbildung 2.2: Diskrete quasibeschränkte Abbildungen

- (c) Gilt $0 < \eta < 1$, so klingt eine η^+ -quasibeschränkte Abbildung g für $k \rightarrow \infty$ exponentiell ab. (Siehe Abbildung 2.2(c).)
- (d) Ist $\eta > 1$, so klingt eine η^- -quasibeschränkte Abbildung g für $k \rightarrow -\infty$ exponentiell ab. (Siehe Abbildung 2.2(d).)
- (e) Die Nullabbildung ist η -quasibeschränkt für beliebiges $\eta \in \mathbb{R}^+$.

Möchte man jetzt die vier Lemmata des ersten Kapitels über quasibeschränkte Lösungen linearer Prozesse auf die diskrete Situation dieses Kapitels übertragen, so wird man mit den folgenden beiden Problemen konfrontiert:

- Lemma 1.2.2 garantiert für gewisse lineare Prozesse eine eindeutig bestimmte quasibeschränkte Lösung für $t \rightarrow -\infty$. Während jedoch im kontinuierlichen Fall alle Lösungen der betrachteten Prozesse auf dem gesamten Intervall existierten, ist die Existenzfrage bei den diskreten dynamischen Prozessen durchaus nichttrivial — es sei denn man verlangt von der rechten Seite des Prozesses Invertierbarkeit, und gerade das soll ja vermieden werden.
- Desweiteren wurde im ersten Kapitel mehrfach das Konzept der Zeitumkehr verwendet. Eine Übertragung dieser Beweismethode auf den diskreten Fall scheitert zum einen wieder an der im allgemeinen nichtinvertierbaren rechten Seite, zum anderen würde man selbst im invertierbaren Fall eine mehr oder weniger explizite Darstellung der Umkehrabbildung der rechten Seite benötigen, die jedoch ohne weitere Voraussetzungen nicht angebar ist.

Diese Probleme können zwar gelöst werden, haben aber einen (noch erträglichen) beweistechnischen Mehraufwand zur Folge: Da es nicht mehr möglich ist, zwei der vier Lemmata auf

die anderen beiden zurückzuführen, müssen alle vier Hilfssätze eigens bewiesen werden. Als Entschädigung kann man im nächsten Abschnitt den Hauptsatz über invariante Faserbündel für *nicht notwendigerweise invertierbare* diskrete dynamische Prozesse formulieren. Der Beweis des Hauptsatzes benötigt jetzt alle vier Lemmata.

Zunächst soll das diskrete Analogon zu Lemma 1.2.2 bewiesen werden. Ruft man sich noch einmal das Beispiel

$$x' = 0$$

des letzten Abschnittes ins Gedächtnis zurück, könnte man auf den ersten Blick leicht entmutigt werden: Lemma 1.2.2 garantiert im kontinuierlichen Fall genau eine für $t \rightarrow -\infty$ quasibeschränkte Lösung, während das obige diskrete Beispiel überhaupt nur eine einzige Lösung auf ganz \mathbb{Z} besitzt! Diese Lösung ist aber zum Glück die Nullabbildung — und damit quasibeschränkt für $k \rightarrow -\infty$. Es wird sich bald zeigen, daß dies kein Zufall ist. Die folgende diskrete Version von Lemma 1.2.2 garantiert unter ähnlichen Voraussetzungen eine eindeutig bestimmte, für $k \rightarrow -\infty$ quasibeschränkte Lösung auf dem gesamten betrachteten Intervall, ohne eine Invertierbarkeit der rechten Seite vorauszusetzen.

Lemma 2.2.2 *Gegeben sei der parameterabhängige, diskrete dynamische Prozeß*

$$\boxed{x' = A(k)x + f(k, x, p) + f_0(k, p)} \quad (2.16)$$

mit einem nach links unbeschränkten, diskreten Intervall $I \subset \mathbb{Z}$, Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{P} , sowie stetigen Abbildungen $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $f : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ und $f_0 : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$; Φ sei die Übergangsabbildung des linearen Prozesses $x' = A(k)x$. Ferner gelte für beliebige $m, n \in I$, $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$:

$$\|\Phi(m, n)\| \leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für } m \geq n, \quad (2.17)$$

$$f(k, 0, p) = 0, \quad (2.18)$$

$$\|f(k, x, p) - f(k, \bar{x}, p)\| \leq L\|x - \bar{x}\|, \quad (2.19)$$

mit Konstanten $\alpha > 0$, $K \geq 1$ und $L \geq 0$. Dann gilt für beliebiges $\gamma > \alpha + KL$ und $\kappa \in I$: Ist für alle $p \in \mathcal{P}$ die Abbildung $f_0(\cdot, p)$ γ^- -quasibeschränkt mit

$$\|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq M \quad \text{für ein } M \in \mathbb{R}_0^+, \quad (2.20)$$

so besitzt (2.16) für jedes $p \in \mathcal{P}$ genau eine γ^- -quasibeschränkte Lösung $\mu(\cdot, p) : I \rightarrow \mathcal{X}$ und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^-. \quad (2.21)$$

Darüberhinaus ist die Abbildung $\mu : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig. Ist $I = \mathbb{Z}$ und $f_0(\cdot, p)$ sogar γ -quasibeschränkt, so ist auch $\mu(\cdot, p)$ γ -quasibeschränkt und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\gamma} \leq \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\gamma}. \quad (2.22)$$

Bemerkung: Wie bereits Lemma 1.2.2 ist auch dieses Lemma auf Prozesse der Form

$$\boxed{x' = A(k)x + F(k, x, p)}$$

anwendbar, wenn die Abbildung $F : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ den Bedingungen

$$\|F(k, x, p) - F(k, \bar{x}, p)\| \leq L\|x - \bar{x}\| \quad \text{und} \quad \|F(k, 0, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq M$$

genügt: Man setzt dazu

$$\begin{aligned} f(k, x, p) &:= F(k, x, p) - F(k, 0, p), \\ f_0(k, p) &:= F(k, 0, p). \end{aligned}$$

Diese Bemerkung kann auch auf die folgenden drei Lemmata angewandt werden.

Beweis: Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von Lemma 1.2.2 aufgebaut.

(I) Sei zunächst $I = (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z}$, $f_0(k, p) \equiv 0$ auf $I \times \mathcal{P}$ und $L = 0$, d.h. $f(k, x, p) \equiv 0$ auf $I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$. Ist $\mu : I \rightarrow \mathcal{X}$ eine γ^- -quasibeschränkte Lösung von $x' = A(k)x$ und $\kappa_0 \in I$ beliebig, aber fest, so impliziert die Definition der Übergangsabbildung für beliebige $k \leq \kappa_0$ die Beziehung

$$\mu(\kappa_0) = \Phi(\kappa_0, k)\mu(k),$$

und mit (2.17) folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \|\mu(\kappa_0)\| &= \|\Phi(\kappa_0, k)\mu(k)\| \leq \|\Phi(\kappa_0, k)\| \cdot \|\mu(k)\| \leq K\alpha^{\kappa_0-k}\gamma^k \|\mu(k)\| \gamma^{-k} \leq \\ &\leq K\alpha^{\kappa_0} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^k \|\mu\|_{\kappa_0, \gamma}^- \rightarrow 0, \quad \text{für } k \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

denn nach Voraussetzung ist $\gamma > \alpha + KL = \alpha > 0$, d.h. $\frac{\gamma}{\alpha} > 1$. Also gilt $\mu(\kappa_0) = 0$ für beliebige $\kappa_0 \in I$, weswegen die triviale Lösung die einzige γ^- -quasibeschränkte Lösung von (2.16) ist. Die Abschätzung (2.21) ist dann offensichtlich erfüllt.

(II) Sei nun $I = (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z}$, f_0 beliebig und $L = 0$, d.h. $f(k, x, p) \equiv 0$ auf $I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}$. Die Eindeutigkeitsaussage des Lemmas folgt unmittelbar aus (I), denn die Differenz zweier verschiedener γ^- -quasibeschränkter Lösungen von $x' = A(k)x + f_0(k, p)$ zum Parameter $p \in \mathcal{P}$ wäre eine nichttriviale γ^- -quasibeschränkte Lösung von $x' = A(k)x$. Zum Beweis der Existenzaussage definiert man

$$\mu(k, p) := \sum_{i=-\infty}^{k-1} \Phi(k, i+1)f_0(i, p).$$

Diese Reihe konvergiert für beliebiges $k \in I$ und $p \in \mathcal{P}$, denn es gilt

$$\|\Phi(k, i+1)f_0(i, p)\| \leq K\alpha^{k-i-1}\|f_0(i, p)\| \leq K\alpha^{k-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^i \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \quad \text{für alle } i < k,$$

und nach Voraussetzung ist $\gamma > \alpha + KL = \alpha > 0$. Für alle $k \in I$ mit $k+1 \in I$ und beliebiges $p \in \mathcal{P}$ folgt nun aus (2.11) unter Beachtung der Stetigkeit und Linearität von $A(k)$:

$$\begin{aligned} A(k)\mu(k, p) + f_0(k, p) &= A(k) \sum_{i=-\infty}^{k-1} \Phi(k, i+1)f_0(i, p) + f_0(k, p) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{k-1} A(k)\Phi(k, i+1)f_0(i, p) + \Phi(k+1, k+1)f_0(k, p) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^k \Phi(k+1, i+1)f_0(i, p) = \mu(k+1, p), \end{aligned}$$

d.h. $\mu(\cdot, p) : I \rightarrow \mathcal{X}$ ist eine Lösung von $x' = A(k)x + f_0(k, p)$. Die Abschätzung (2.21) ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \|\mu(k, p)\| &\leq \sum_{i=-\infty}^{k-1} \|\Phi(k, i+1)\| \cdot \|f_0(i, p)\| \leq \sum_{i=-\infty}^{k-1} K\alpha^{k-i-1}\gamma^i \|f_0(i, p)\| \gamma^{-i} \leq \\ &\leq K\alpha^{k-1} \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \sum_{i=-\infty}^{k-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^i = K\alpha^{k-1} \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \frac{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{1-k}}{1 - \frac{\alpha}{\gamma}} = \\ &= \frac{K}{\gamma - \alpha} \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \gamma^k \end{aligned}$$

für alle $k \in I$ und $p \in \mathcal{P}$, also

$$\|\mu(k, p)\| \gamma^{-k} \leq \frac{K}{\gamma - \alpha} \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \quad \text{für alle } k \leq \kappa,$$

$$\text{d.h. } \|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha} \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- = \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^-.$$

Bleibt nur noch die Stetigkeit von $\mu : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ nachzuweisen. Wegen der diskreten Topologie auf I genügt es offensichtlich zu zeigen, daß für beliebiges festes $\kappa_0 \in I$ die Abbildung $\mu(\kappa_0, \cdot) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig ist.

Seien also $p_0 \in \mathcal{P}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der leicht einsehbaren Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=-\infty}^{\kappa_0-1} 2KM\alpha^{\kappa_0-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^i$$

existiert ein $\tilde{\kappa}_0 < \kappa_0$ mit

$$\sum_{i=-\infty}^{\tilde{\kappa}_0-1} 2KM\alpha^{\kappa_0-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus erhält man mit (2.17) und (2.20) für beliebiges $p \in \mathcal{P}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=-\infty}^{\tilde{\kappa}_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1) f_0(i, p) - \sum_{i=-\infty}^{\tilde{\kappa}_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1) f_0(i, p_0) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=-\infty}^{\tilde{\kappa}_0-1} \|\Phi(\kappa_0, i+1)\| \cdot \|f_0(i, p) - f_0(i, p_0)\| \leq \\ &\leq \sum_{i=-\infty}^{\tilde{\kappa}_0-1} K\alpha^{\kappa_0-i-1}\gamma^i (\|f_0(i, p)\| \gamma^{-i} + \|f_0(i, p_0)\| \gamma^{-i}) \leq \\ &\leq \sum_{i=-\infty}^{\tilde{\kappa}_0-1} 2KM\alpha^{\kappa_0-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^i < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f_0 und $A(k)$, $k \in I$, existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $p \in B_\delta(p_0)$ gilt:

$$\left\| \sum_{\tilde{\kappa}_0}^{\kappa_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1) f_0(i, p) - \sum_{\tilde{\kappa}_0}^{\kappa_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1) f_0(i, p_0) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen mit (2.23) folgt hieraus für alle $p \in B_\delta(p_0)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\mu(\kappa_0, p) - \mu(\kappa_0, p_0)\| &= \left\| \sum_{i=-\infty}^{\kappa_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1) f_0(i, p) - \sum_{i=-\infty}^{\kappa_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1) f_0(i, p_0) \right\| \leq \\
&\leq \left\| \sum_{i=-\infty}^{\bar{\kappa}_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1) f_0(i, p) - \sum_{i=-\infty}^{\bar{\kappa}_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1) f_0(i, p_0) \right\| + \\
&\quad + \left\| \sum_{i=\bar{\kappa}_0}^{\kappa_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1) f_0(i, p) - \sum_{i=\bar{\kappa}_0}^{\kappa_0-1} \Phi(\kappa_0, i+1) f_0(i, p_0) \right\| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist (II) vollständig bewiesen.

(III) Seien nun $L \geq 0$ und f_0 beliebig, $I = (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z}$. Der Beweis kann fast wörtlich vom kontinuierlichen Fall übernommen werden und verwendet wieder den Banachschen Fixpunktsatz. Sei dazu \mathcal{B} der lineare Raum aller stetigen Abbildungen $\nu : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$, die die folgenden beiden Eigenschaften besitzen:

- Für jedes $p \in \mathcal{P}$ ist $\nu(\cdot, p) : I \rightarrow \mathcal{X}$ eine γ^- -quasibeschränkte Abbildung.
- Die Menge $\{\|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- : p \in \mathcal{P}\}$ ist nach oben beschränkt.

Definiert man auf \mathcal{B} eine Norm durch

$$\|\nu\| := \sup\{\|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- : p \in \mathcal{P}\},$$

so wird \mathcal{B} dadurch zu einem Banachraum.

Zur Konstruktion einer Kontraktion auf \mathcal{B} sei $\nu \in \mathcal{B}$ beliebig. Betrachte nun den diskreten dynamischen Prozeß

$$x' = A(k)x + f(k, \nu(k, p), p) + f_0(k, p). \quad (2.24)$$

Da für alle $k \in I$ wegen (2.18), (2.19) und (2.20) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|f(k, \nu(k, p), p) + f_0(k, p)\| \gamma^{-k} &\leq L\|\nu(k, p)\| \gamma^{-k} + \|f_0(k, p)\| \gamma^{-k} \leq \\
&\leq L\|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- + \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \\
&\leq L\|\nu\| + M
\end{aligned} \quad (2.25)$$

erfüllt ist, kann man (II) auf (2.24) anwenden. Es existiert demnach eine stetige Abbildung $\nu^* : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß $\nu^*(\cdot, p)$ die eindeutig bestimmte γ^- -quasibeschränkte Lösung von (2.24) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$ ist, und für beliebige $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\|\nu^*(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha} \|f(\cdot, \nu(\cdot, p), p) + f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha} (L\|\nu\| + M),$$

d.h. $\nu^* \in \mathcal{B}$. Definiert man nun

$$T\nu := \nu^* \in \mathcal{B},$$

so folgt hieraus mit (2.25):

$$\|(T\nu)(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha} (L\|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- + \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^-). \quad (2.26)$$

Behauptung: Die Abbildung $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ ist eine Kontraktion.

Seien dazu $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{B}$ beliebig. Dann ist für jedes $p \in \mathcal{P}$ die Abbildung $(T\nu_1 - T\nu_2)(\cdot, p)$ eine γ^- -quasibeschränkte Lösung des diskreten Prozesses

$$x' = A(k)x + f(k, \nu_1(k, p), p) - f(k, \nu_2(k, p), p). \quad (2.27)$$

Wie (2.24) erfüllt auch (2.27) die Voraussetzungen von (II). Mit (2.19) und (2.21) erhält man für beliebiges $p \in \mathcal{P}$

$$\|(T\nu_1 - T\nu_2)(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha} \|(\nu_1 - \nu_2)(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha} \|\nu_1 - \nu_2\|,$$

und damit schließlich durch Bildung des Supremums

$$\|T\nu_1 - T\nu_2\| \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha} \|\nu_1 - \nu_2\|.$$

Gemäß Voraussetzung ist $\gamma > \alpha + KL$, d.h. $\frac{KL}{\gamma - \alpha} < 1$. T ist also eine Kontraktion und besitzt nach dem Banachschen Fixpunktsatz A.2.1 einen eindeutig bestimmten Fixpunkt in \mathcal{B} .

Sei $\mu \in \mathcal{B}$ dieser eindeutige Fixpunkt und $p \in \mathcal{P}$ beliebig, aber fest. Die Anwendung der obigen Fixpunktargumentation auf den diskreten dynamischen Prozeß (2.16) bei festem p impliziert wie im kontinuierlichen Fall, daß (2.16) genau eine γ^- -quasibeschränkte Lösung besitzt, und die ist nach Konstruktion von T gerade $\mu(\cdot, p)$.

Da wegen $\mu \in \mathcal{B}$ die Abbildung μ stetig ist, bleibt nur noch die Abschätzung (2.21) zu zeigen. Unter Beachtung von $T\mu(\cdot, p) = \mu(\cdot, p)$ folgt dazu aus (2.26):

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{KL}{\gamma - \alpha} \|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- + \frac{K}{\gamma - \alpha} \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^-,$$

und schließlich

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^-.$$

Damit ist (III) vollständig bewiesen.

(IV) Ist $I \subset \mathbb{Z}$ ein beliebiges nach links unbeschränktes, diskretes Intervall und $\kappa \in I$ beliebig, so existiert wegen (III) zu jedem $p \in \mathcal{P}$ eine eindeutig bestimmte γ^- -quasibeschränkte Lösung $\tilde{\mu}(\cdot, p) : (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ von (2.16), und die Abbildung $\tilde{\mu}$ ist stetig. Man überzeugt sich leicht, daß dann $\mu : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$, definiert durch

$$\mu(k, p) := \begin{cases} \tilde{\mu}(k, p) & , \quad k \leq \kappa \\ \lambda(k; \kappa, \tilde{\mu}(\kappa, p), p) & , \quad k > \kappa \end{cases},$$

die Forderungen des Lemmas erfüllt. (λ sei die allgemeine Lösung von (2.16) gemäß (2.3).)

(V) Sei nun $I = \mathbb{Z}$, $f_0(\cdot, p)$ für jedes $p \in \mathcal{P}$ eine γ -quasibeschränkte Funktion und $L \geq 0$ beliebig. Gemäß (IV) existiert für $p \in \mathcal{P}$ eine eindeutig bestimmte γ^- -quasibeschränkte Lösung $\mu(\cdot, p)$ von (2.16), und mit $\|f_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \|f_0(\cdot, p)\|_{\gamma}$ für alle $\kappa \in \mathbb{Z}$ folgt aus (2.21):

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\gamma} \quad \text{für alle } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Für $\kappa \rightarrow \infty$ erhält man schließlich:

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\gamma} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0(\cdot, p)\|_{\gamma},$$

d.h. $\mu(\cdot, p)$ ist γ -quasibeschränkt und erfüllt die Abschätzung (2.22). \diamond

Das nun folgende Gegenstück zu Lemma 1.2.3 wird völlig analog unter Verwendung der Variation der Konstanten (Satz 2.1.2) und des diskreten Gronwall-Lemmas (Satz 2.1.3) bewiesen. Da nur Aussagen bezüglich der Quasibeschränktheit von Lösungen für $k \rightarrow \infty$ gemacht werden, ergeben sich durch die im allgemeinen nicht invertierbare rechte Seite keine zusätzlichen Probleme. Das Lemma wird wieder nur für parameterunabhängige Prozesse formuliert.

Lemma 2.2.3 *Gegeben sei der diskrete dynamische Prozeß*

$$\boxed{x' = A(k)x + f(k, x) + f_0(k)} \quad (2.28)$$

mit einem nach rechts unbeschränkten, diskreten Intervall $I \subset \mathbb{Z}$, einem Banachraum \mathcal{X} , sowie stetigen Abbildungen $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $f : I \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ und $f_0 : I \rightarrow \mathcal{X}$; Φ sei die Übergangsabbildung des linearen Prozesses $x' = A(k)x$. Ferner gelte für beliebige $m, n \in I$ und $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$:

$$\|\Phi(m, n)\| \leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für } m \geq n, \quad (2.29)$$

$$f(k, 0) = 0, \quad (2.30)$$

$$\|f(k, x) - f(k, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|, \quad (2.31)$$

mit Konstanten $\alpha > 0$, $K \geq 1$ und $L \geq 0$. Dann gilt für beliebiges $\gamma > \alpha + KL$ und $\kappa \in I$: Ist f_0 eine γ^+ -quasibeschränkte Abbildung, so ist jede Lösung $\mu : I \rightarrow \mathcal{X}$ von (2.28) ebenfalls γ^+ -quasibeschränkt und genügt der Abschätzung:

$$\|\mu\|_{\kappa, \gamma}^+ \leq K\|\mu(\kappa)\|\gamma^{-\kappa} + \frac{K}{\gamma - \alpha - KL}\|f_0\|_{\kappa, \gamma}^+. \quad (2.32)$$

Beweis: Sei $\mu : I \rightarrow \mathcal{X}$ eine beliebige Lösung von (2.28) und $\kappa \in I$ beliebig, aber fest. Dann erhält man durch Variation der Konstanten (Satz 2.1.2) für alle $k \geq \kappa$ die Gleichung

$$\mu(k) = \Phi(k, \kappa)\mu(\kappa) + \sum_{i=\kappa}^{k-1} \Phi(k, i+1)(f(i, \mu(i)) + f_0(i)),$$

und daraus unter Anwendung von (2.29), (2.30) und (2.31):

$$\begin{aligned} \|\mu(k)\| &\leq K\alpha^{k-\kappa}\|\mu(\kappa)\| + \sum_{i=\kappa}^{k-1} K\alpha^{k-i-1}(\|f(i, \mu(i)) - f(i, 0)\| + \|f_0(i)\|) \leq \\ &\leq K\alpha^{k-\kappa}\|\mu(\kappa)\| + K\alpha^{k-1} \sum_{i=\kappa}^{k-1} \alpha^{-i}(L\|\mu(i)\| + \|f_0(i)\|) = \\ &= K\alpha^{k-\kappa}\|\mu(\kappa)\| + KL\alpha^{k-1} \sum_{i=\kappa}^{k-1} \|\mu(i)\|\alpha^{-i} + K\alpha^{k-1} \sum_{i=\kappa}^{k-1} \|f_0(i)\|\gamma^{-i} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^i \leq \\ &= K\alpha^k \left(\|\mu(\kappa)\|\alpha^{-\kappa} + \frac{L}{\alpha} \sum_{i=\kappa}^{k-1} \|\mu(i)\|\alpha^{-i} + \frac{1}{\alpha} \|f_0\|_{\kappa, \gamma}^+ \sum_{i=\kappa}^{k-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^i \right). \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\Lambda(k) := \|\mu(k)\|\alpha^{-k} \quad \text{und} \quad \Gamma(k) := K\|\mu(\kappa)\|\alpha^{-\kappa} + \frac{K}{\alpha} \|f_0\|_{\kappa, \gamma}^+ \sum_{i=\kappa}^{k-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^i$$

folgt

$$\Lambda(k) \leq \Gamma(k) + \frac{KL}{\alpha} \sum_{i=\kappa}^{k-1} \Lambda(i) \quad \text{für alle } k \geq \kappa.$$

Anwendung des Gronwall-Lemmas (Satz 2.1.3(a)) liefert für alle $k \geq \kappa$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \Lambda(k) &\leq \left(1 + \frac{KL}{\alpha}\right)^{k-\kappa} \Gamma(\kappa) + \sum_{i=\kappa+1}^k (\Gamma(i) - \Gamma(i-1)) \left(1 + \frac{KL}{\alpha}\right)^{k-i} = \\ &= K \|\mu(\kappa)\| \alpha^{-\kappa} \left(1 + \frac{KL}{\alpha}\right)^{k-\kappa} + \frac{K}{\alpha} \|f_0\|_{\kappa, \gamma}^+ \sum_{i=\kappa+1}^k \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{i-1} \left(1 + \frac{KL}{\alpha}\right)^{k-i} = \\ &= K \|\mu(\kappa)\| \alpha^{-k} (\alpha + KL)^{k-\kappa} + \frac{K}{\gamma} \|f_0\|_{\kappa, \gamma}^+ \left(\frac{\alpha + KL}{\alpha}\right)^k \sum_{i=\kappa+1}^k \left(\frac{\gamma}{\alpha + KL}\right)^i = \\ &= K \|\mu(\kappa)\| \alpha^{-k} (\alpha + KL)^{k-\kappa} + \frac{K}{\gamma} \|f_0\|_{\kappa, \gamma}^+ \left(\frac{\alpha + KL}{\alpha}\right)^k \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{\frac{\gamma}{\alpha + KL} - 1} \left(\left(\frac{\gamma}{\alpha + KL}\right)^{k+1} - \left(\frac{\gamma}{\alpha + KL}\right)^{\kappa+1} \right) \leq \\ &\leq K \|\mu(\kappa)\| \alpha^{-k} \gamma^{k-\kappa} + \frac{K}{\gamma} \|f_0\|_{\kappa, \gamma}^+ \left(\frac{\alpha + KL}{\alpha}\right)^k \frac{\alpha + KL}{\gamma - \alpha - KL} \left(\frac{\gamma}{\alpha + KL}\right)^{k+1} = \\ &= K \|\mu(\kappa)\| \gamma^{-\kappa} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^k + \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0\|_{\kappa, \gamma}^+ \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^k \end{aligned}$$

und

$$\|\mu(k)\| \gamma^{-k} = \Lambda(k) \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^k \leq K \|\mu(\kappa)\| \gamma^{-\kappa} + \frac{K}{\gamma - \alpha - KL} \|f_0\|_{\kappa, \gamma}^+.$$

μ ist somit γ^+ -quasibeschränkt und genügt der Abschätzung (2.32). \diamond

Wie im ersten Kapitel werden jetzt Störungen linearer Prozesse untersucht, deren Übergangsabbildungen für $k \rightarrow -\infty$ quasibeschränkt sind. Bereits die Formulierung des letzten Satzes deutet aber an, daß man nun nicht mehr ohne jegliche Invertierbarkeitsvoraussetzung auskommen kann: Die Übergangsabbildung $\Phi(m, n)$ eines beliebigen linearen Prozesses ist nur für Argumente $m \geq n$ definiert, und diese Definition läßt sich bekanntlich bei nichtinvertierbaren Prozessen für $m < n$ auch nicht vernünftig erweitern.

Aus diesem Grund wird in den beiden folgenden Hilfssätzen stets die Invertierbarkeit des (ungestörten) linearen Prozesses vorausgesetzt. Damit ist dann die erweiterte Übergangsabbildung erklärt, und man kann die Voraussetzungen der Lemmata analog zu Lemma 1.2.4 und Lemma 1.2.5 formulieren. Zunächst wird das diskrete Analogon zu Lemma 1.2.4 behandelt.

Lemma 2.2.4 *Gegeben sei der parameterabhängige, diskrete dynamische Prozeß*

$$\boxed{x' = B(k)y + g(k, y, p) + g_0(k, p)} \quad (2.33)$$

mit einem nach rechts unbeschränkten, diskreten Intervall $J \subset \mathbb{Z}$, Banachräumen \mathcal{Y} und \mathcal{P} , sowie stetigen Abbildungen $B : J \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$, $g : J \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ und $g_0 : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$; Ψ sei die erweiterte Übergangsabbildung des linearen Prozesses $y' = B(k)y$. Ferner gelte für beliebige $m, n \in J$, $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$ und $p \in \mathcal{P}$:

$$\|\Psi(m, n)\| \leq K \beta^{m-n} \quad \text{für } m \leq n, \quad (2.34)$$

$$g(k, 0, p) = 0, \quad (2.35)$$

$$\|g(k, y, p) - g(k, \bar{y}, p)\| \leq L\|y - \bar{y}\|, \quad (2.36)$$

mit Konstanten $\beta > 0$, $K \geq 1$ und $L \geq 0$. Dann gilt für beliebiges $0 < \eta < \beta - KL$ und $\kappa \in J$: Ist für alle $p \in \mathcal{P}$ die Abbildung $g_0(\cdot, p)$ η^+ -quasibeschränkt mit

$$\|g_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ \leq M \quad \text{für ein } M \in \mathbb{R}_0^+, \quad (2.37)$$

so besitzt (2.33) für jedes $p \in \mathcal{P}$ genau eine η^+ -quasibeschränkte Lösung $\mu(\cdot, p) : J \rightarrow \mathcal{Y}$ und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ \leq \frac{K}{\beta - \eta - KL} \|g_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+. \quad (2.38)$$

Darüberhinaus ist die Abbildung $\mu : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ stetig. Ist $J = \mathbb{Z}$ und $g_0(\cdot, p)$ sogar η -quasibeschränkt, so ist auch $\mu(\cdot, p)$ η -quasibeschränkt und es gilt:

$$\|\mu(\cdot, p)\|_{\eta} \leq \frac{K}{\beta - \eta - KL} \|g_0(\cdot, p)\|_{\eta}. \quad (2.39)$$

Beweis: Da der Beweis fast wörtlich vom Beweis des Lemmas 2.2.2 abgeschrieben werden kann, soll im folgenden nur eine kurze Beweisskizze angegeben werden.

(I) Zunächst wird für den Spezialfall $J = \mathbb{Z}_{\kappa}$, $g_0(k, p) \equiv 0$, $L = 0$ gezeigt, daß eine η^+ -quasibeschränkte Lösung $\mu : J \rightarrow \mathcal{Y}$ von $y' = B(k)y$ wegen der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mu(\kappa_0)\| &= \|\Psi(\kappa_0, k)\mu(k)\| \leq \|\Psi(\kappa_0, k)\| \cdot \|\mu(k)\| \leq K\beta^{\kappa_0 - k}\eta^k \|\mu(k)\| \eta^{-k} \leq \\ &\leq K\beta^{\kappa_0} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^k \|\mu\|_{\kappa, \eta}^+ \rightarrow 0, \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

für beliebiges $\kappa_0 \in J$, gleich der Nullabbildung sein muß, d.h. die triviale Lösung ist die einzige η^+ -quasibeschränkte Lösung von (2.33), und sie erfüllt offensichtlich die Abschätzung (2.38).

(II) Im zweiten Teil wird wieder der lineare, inhomogene Spezialfall $L = 0$ untersucht, mit $J = \mathbb{Z}_{\kappa}$. Die Eindeutigkeitsaussage des Lemmas folgt unmittelbar aus (I), zum Beweis der Existenzaussage definiert man

$$\mu(k, p) := - \sum_{i=k}^{\infty} \Psi(k, i+1)g_0(i, p).$$

Die vorausgesetzte η^+ -Quasibeschränktheit von $g_0(\cdot, p)$ impliziert mit (2.34), daß diese Reihe für beliebiges $k \in J$ und $p \in \mathcal{P}$ konvergiert. Wegen $B(k) \in \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$ für $k \in J$ erhält man nun für alle $k \in J$ und beliebiges $p \in \mathcal{P}$ mit (2.11):

$$\begin{aligned} B(k)\mu(k, p) + g_0(k, p) &= -B(k) \sum_{i=k}^{\infty} \Psi(k, i+1)g_0(i, p) + g_0(k, p) = \\ &= - \sum_{i=k}^{\infty} B(k)\Psi(k, i+1)g_0(i, p) + \Psi(k+1, k+1)g_0(k, p) = \\ &= - \sum_{i=k+1}^{\infty} \Psi(k+1, i+1)g_0(i, p) = \mu(k+1, p), \end{aligned}$$

d.h. $\mu(\cdot, p) : J \rightarrow \mathcal{Y}$ ist eine Lösung von $y' = B(k)y + g_0(k, p)$. Ferner folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mu(k, p)\| &\leq \sum_{i=k}^{\infty} \|\Psi(k, i+1)\| \cdot \|g_0(i, p)\| \leq \sum_{i=k}^{\infty} K\beta^{k-i-1}\eta^i \|g_0(i, p)\| \eta^{-i} \leq \\ &\leq K\beta^{k-1} \|g_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ \sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^i = K\beta^{k-1} \|g_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ \frac{\left(\frac{\eta}{\beta}\right)^k}{1 - \frac{\eta}{\beta}} = \\ &= \frac{K}{\beta - \eta} \|g_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ \eta^k \end{aligned}$$

für alle $k \in J$ und $p \in \mathcal{P}$ schließlich: $\|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ \leq \frac{K}{\beta - \eta - KL} \|g_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+$. Die Stetigkeit von $\mu : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ zeigt man wie in Lemma 2.2.2.

(III) Der allgemeine Fall wird mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes zunächst für $J = \mathbb{Z}_\kappa$ bewiesen. Der Banachraum \mathcal{B} besteht dabei aus allen stetigen Abbildungen $\nu : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$, die die folgenden beiden Eigenschaften besitzen:

- Für jedes $p \in \mathcal{P}$ ist $\nu(\cdot, p) : J \rightarrow \mathcal{Y}$ eine η^+ -quasibeschränkte Abbildung.
- Die Menge $\{\|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ : p \in \mathcal{P}\}$ ist nach oben beschränkt.

Die Norm auf \mathcal{B} wird durch

$$\|\nu\| := \sup\{\|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ : p \in \mathcal{P}\}$$

definiert.

Zur Definition der Kontraktion $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ sei $\nu \in \mathcal{B}$ beliebig. Der diskrete dynamische Prozeß

$$y' = B(k)y + g(k, \nu(k, p), p) + g_0(k, p) \quad (2.40)$$

erfüllt wegen (2.35), (2.36) und (2.37) die Abschätzung

$$\|g(\cdot, \nu(\cdot, p), p) + g_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ \leq L\|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ + \|g_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ \leq L\|\nu\| + M,$$

d.h. wegen (II) existiert eine stetige Abbildung $\nu^* : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$, so daß $\nu^*(\cdot, p)$ die eindeutig bestimmte η^+ -quasibeschränkte Lösung von (2.40) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$ ist. Mit

$$\|\nu^*(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ \leq \frac{K}{\beta - \eta} (L\|\nu\| + M)$$

folgt ferner $\nu^* \in \mathcal{B}$. Definiert man nun

$$T\nu := \nu^* \in \mathcal{B},$$

so implizieren die letzten Ungleichungen:

$$\|(T\nu)(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ \leq \frac{K}{\beta - \eta} (L\|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+ + \|g_0(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+). \quad (2.41)$$

Wendet man jetzt für beliebige $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{B}$ Teil (II) auf den diskreten Prozeß

$$y' = B(k)y + g(k, \nu_1(k, p), p) - g(k, \nu_2(k, p), p) \quad (2.42)$$

an, so folgt wie im Beweis von Lemma 2.2.2 — da $(T\nu_1 - T\nu_2)(\cdot, p)$ nach Konstruktion die eindeutig bestimmte η^+ -quasibeschränkte Lösung von (2.42) ist — aus (2.36) und (2.38) die Abschätzung

$$\|T\nu_1 - T\nu_2\| \leq \frac{KL}{\beta - \eta} \|\nu_1 - \nu_2\| ,$$

d.h. wegen $0 < \eta < \beta - KL$ ist T eine Kontraktion, und der eindeutig bestimmte Fixpunkt $\mu \in \mathcal{B}$ besitzt die im Lemma geforderten Eigenschaften: $\mu(\cdot, p)$ ist die eindeutig bestimmte η^+ -quasibeschränkte Lösung von (2.33) zum Parameter $p \in \mathcal{P}$ und die Abschätzung (2.38) folgt unmittelbar aus (2.41).

(IV) Ist $J \subset \mathbb{Z}$ ein beliebiges nach rechts unbeschränktes, diskretes Intervall, so existiert zu beliebigem $\kappa \in J$ und $p \in \mathcal{P}$ wegen (III) eine eindeutig bestimmte η^+ -quasibeschränkte Lösung $\mu_\kappa(\cdot, p) : \mathbb{Z}_\kappa \rightarrow \mathcal{Y}$ von (2.33), und μ_κ ist stetig. Definiert man $\mu : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ durch

$$\mu(k, p) := \mu_\kappa(k, p) ,$$

so ist μ stetig und erfüllt die Forderungen des Lemmas. Man beachte dabei, daß für alle $p \in \mathcal{P}$ und $\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq k$ gilt: $\mu_{\kappa_1}(k, p) = \mu_{\kappa_2}(k, p)$.

(V) Die Abschätzung (2.39) folgt unter Beachtung von

$$\|\mu(\cdot, p)\|_\eta = \lim_{\kappa \rightarrow -\infty} \|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \eta}^+$$

sofort aus (2.38) und der vorausgesetzten η -Quasibeschränktheit von $g_0(\cdot, p)$. \diamond

Zum Abschluß dieses zweiten Abschnittes soll noch das Lösungsverhalten in negativer Zeitrichtung für parameterunabhängige Prozesse der Form (2.33) untersucht werden, wenn die Abbildung g_0 eine η^- -Quasibeschränktheit vorweisen kann. Da in der kontinuierlichen Version (Lemma 1.2.5) alle Lösungen für $t \rightarrow -\infty$ existierten, ist anzunehmen, daß man — um ein analoges Resultat zu erhalten — im diskreten Fall *zusätzlich* zu den entsprechenden Bedingungen aus Lemma 1.2.5 noch die Invertierbarkeit der rechten Seite hinzunehmen muß. Betrachtet man jedoch die diskreten Analoga der Voraussetzungen von Lemma 1.2.5, so lautet die Bedingung an die Quasibeschränktheitskonstante η einerseits $\eta < \beta - KL$, andererseits muß aber auch $\eta \in \mathbb{R}^+$ gelten. Um also überhaupt ein zulässiges η finden zu können, muß die Konstante L der Bedingung $L < \frac{\beta}{K}$ genügen! Und diese (sinnvolle) Einschränkung impliziert bereits die Bijektivität der rechten Seite für beliebiges $k \in J$. Die genauen Ergebnisse sind dem nun folgenden Lemma 2.2.5 zu entnehmen.

Lemma 2.2.5 *Gegeben sei der diskrete dynamische Prozeß*

$$\boxed{y' = B(k)y + g(k, y) + g_0(k)} \quad (2.43)$$

mit einem nach links unbeschränkten, diskreten Intervall $J \subset \mathbb{Z}$, einem Banachraum \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $B : J \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$, $g : J \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ und $g_0 : J \rightarrow \mathcal{Y}$; Ψ sei die erweiterte Übergangsabbildung des linearen Prozesses $y' = B(k)y$. Ferner gelte für beliebige $m, n \in J$ und $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$:

$$\|\Psi(m, n)\| \leq K\beta^{m-n} \quad \text{für } m \leq n , \quad (2.44)$$

$$g(k, 0) = 0 , \quad (2.45)$$

$$\|g(k, y) - g(k, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\| , \quad (2.46)$$

mit Konstanten $\beta > 0$, $K \geq 1$ und $0 \leq L < \frac{\beta}{K}$. Dann ist für jedes $k \in J$ die Abbildung $B(k) + g(k, \cdot) + g_0(k)$ ein Homöomorphismus auf \mathcal{Y} , d.h. alle Lösungen von (2.43) existieren auf ganz J und sind eindeutig bestimmt. Ferner erhält man für beliebiges $0 < \eta < \beta - KL$ und $\kappa \in J$: Ist g_0 eine η^- -quasibeschränkte Abbildung, so ist jede Lösung $\mu : J \rightarrow \mathcal{Y}$ von (2.43) ebenfalls η^- -quasibeschränkt und genügt der Abschätzung:

$$\|\mu\|_{\kappa, \eta}^- \leq K \|\mu(\kappa)\| \eta^{-\kappa} + \frac{K}{\beta - \eta - KL} \|g_0\|_{\kappa, \eta}^- . \quad (2.47)$$

Beweis: Zunächst soll die stetige Invertierbarkeit der rechten Seite von (2.43) für beliebiges k nachgewiesen werden. Sei dazu $k \in J$ beliebig. Gemäß Voraussetzung ist $B(k) \in \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$ ein stetiger Isomorphismus und die stetige Abbildung $g(k, \cdot) + g_0(k) : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ erfüllt für beliebige $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$ wegen (2.46) die Abschätzung

$$\|(g(k, y) + g_0(k)) - (g(k, \bar{y}) + g_0(k))\| \leq L \|y - \bar{y}\| .$$

Ferner gilt $L \geq 0$ und $L < \frac{\beta}{K}$ impliziert mit (2.10) und (2.44)

$$L \|B(k)^{-1}\| = L \|\Psi(k, k+1)\| \leq LK \beta^{k-(k+1)} = \frac{LK}{\beta} < 1 .$$

Mit Korollar A.2.3 (Seite 125) folgt nun unmittelbar, daß die Abbildung $B(k) + g(k, \cdot) + g_0(k)$ bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung ist.

Der nächste (und letzte) Teil des Beweises verläuft analog zum Beweis von Lemma 2.2.3. Sei $\mu : J \rightarrow \mathcal{Y}$ eine beliebige Lösung von (2.43) und $\kappa \in J$ beliebig, aber fest. Dann erhält man durch Variation der Konstanten (Satz 2.1.2) für alle $k \leq \kappa$ die Gleichung

$$\mu(k) = \Psi(k, \kappa) \mu(\kappa) - \sum_{i=k}^{\kappa-1} \Psi(k, i+1) (g(i, \mu(i)) + g_0(i)) ,$$

und daraus unter Anwendung von (2.44), (2.45) und (2.46):

$$\begin{aligned} \|\mu(k)\| &\leq K \beta^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\| + \sum_{i=k}^{\kappa-1} K \beta^{k-i-1} (\|g(i, \mu(i)) - g(i, 0)\| + \|g_0(i)\|) \leq \\ &\leq K \beta^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\| + K \beta^{k-1} \sum_{i=k}^{\kappa-1} \beta^{-i} (L \|\mu(i)\| + \|g_0(i)\|) = \\ &= K \beta^{k-\kappa} \|\mu(\kappa)\| + KL \beta^{k-1} \sum_{i=k}^{\kappa-1} \|\mu(i)\| \beta^{-i} + K \beta^{k-1} \sum_{i=k}^{\kappa-1} \|g_0(i)\| \eta^{-i} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^i \leq \\ &= K \beta^k \left(\|\mu(\kappa)\| \beta^{-\kappa} + \frac{L}{\beta} \sum_{i=k}^{\kappa-1} \|\mu(i)\| \beta^{-i} + \frac{1}{\beta} \|g_0\|_{\kappa, \eta}^- \sum_{i=k}^{\kappa-1} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^i \right) . \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\Lambda(k) := \|\mu(k)\| \beta^{-k} \quad \text{und} \quad \Gamma(k) := K \|\mu(\kappa)\| \beta^{-\kappa} + \frac{K}{\beta} \|g_0\|_{\kappa, \eta}^- \sum_{i=k}^{\kappa-1} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^i$$

folgt

$$\Lambda(k) \leq \Gamma(k) + \frac{KL}{\beta} \sum_{i=k}^{\kappa-1} \Lambda(i) \quad \text{für alle } k \leq \kappa .$$

Mit $\frac{KL}{\beta} < 1$ liefert das diskrete Gronwall-Lemma (Satz 2.1.3(b)) für alle $k \leq \kappa - 1$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\Lambda(k) &\leq \left(1 - \frac{KL}{\beta}\right)^{k-\kappa} \Gamma(\kappa - 1) + \sum_{i=k}^{\kappa-2} (\Gamma(i) - \Gamma(i+1)) \left(1 - \frac{KL}{\beta}\right)^{k-i-1} = \\
&= \left(1 - \frac{KL}{\beta}\right)^{k-\kappa} \left(K \|\mu(\kappa)\| \beta^{-\kappa} + \frac{K}{\beta} \|g_0\|_{\kappa,\eta}^- \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\kappa-1} \right) + \\
&\quad + \frac{K}{\beta} \|g_0\|_{\kappa,\eta}^- \sum_{i=k}^{\kappa-2} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^i \left(1 - \frac{KL}{\beta}\right)^{k-i-1} = \\
&= K \|\mu(\kappa)\| \beta^{-\kappa} \left(1 - \frac{KL}{\beta}\right)^{k-\kappa} + \frac{K}{\beta} \|g_0\|_{\kappa,\eta}^- \sum_{i=k}^{\kappa-1} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^i \left(1 - \frac{KL}{\beta}\right)^{k-i-1} = \\
&= K \|\mu(\kappa)\| \beta^{-k} (\beta - KL)^{k-\kappa} + \frac{K}{\beta - KL} \|g_0\|_{\kappa,\eta}^- \left(\frac{\beta - KL}{\beta}\right)^k \sum_{i=k}^{\kappa-1} \left(\frac{\eta}{\beta - KL}\right)^i \leq \\
&\leq K \|\mu(\kappa)\| \beta^{-k} (\beta - KL)^{k-\kappa} + \frac{K}{\beta - KL} \|g_0\|_{\kappa,\eta}^- \left(\frac{\beta - KL}{\beta}\right)^k \sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{\eta}{\beta - KL}\right)^i = \\
&= K \|\mu(\kappa)\| \beta^{-k} (\beta - KL)^{k-\kappa} + \frac{K}{\beta - KL} \|g_0\|_{\kappa,\eta}^- \left(\frac{\beta - KL}{\beta}\right)^k \frac{\left(\frac{\eta}{\beta - KL}\right)^k}{1 - \frac{\eta}{\beta - KL}} \leq \\
&\leq K \|\mu(\kappa)\| \eta^{-\kappa} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^k + \frac{K}{\beta - \eta - KL} \|g_0\|_{\kappa,\eta}^- \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^k
\end{aligned}$$

und

$$\|\mu(k)\| \eta^{-k} = \Lambda(k) \left(\frac{\beta}{\eta}\right)^k \leq K \|\mu(\kappa)\| \eta^{-\kappa} + \frac{K}{\beta - \eta - KL} \|g_0\|_{\kappa,\eta}^-.$$

Beachtet man noch, daß wegen $K \geq 1$ auch $\|\mu(\kappa)\| \eta^{-\kappa} \leq K \|\mu(\kappa)\| \eta^{-\kappa} + \frac{K}{\beta - \eta - KL} \|g_0\|_{\kappa,\eta}^-$ gilt, erhält man unmittelbar die geforderte Abschätzung (2.47). \diamond

Ausgestattet mit den vier Hilfssätzen dieses Abschnittes kann man sich nun im nächsten Abschnitt an den Beweis des Hauptsatzes über invariante Faserbündel für (im allgemeinen nichtinvertierbare) diskrete dynamische Prozesse wagen.

2.3 Der Hauptsatz über invariante Faserbündel

Bevor die diskrete Version des Hauptsatzes 1.3.1 formuliert und bewiesen wird, sollen die grundlegenden Aussagen am Beispiel des (nichtinvertierbaren!) linearen reellen Systems

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = 0 \\ y' = y \end{array}} \quad (2.48)$$

vorge stellt werden. Die Übergangsabbildung Φ der ersten Gleichung ist gegeben durch $\Phi(m, m) = 1$ und $\Phi(m, n) = 0$ für $m > n$; die erweiterte Übergangsabbildung der zweiten Gleichung lautet $\Psi(m, n) = 1$ für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$. Für frei wählbare Konstanten $0 < \alpha < \beta \leq 1$ sind also die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\|\Phi(m, n)\| &\leq \alpha^{m-n} \quad \text{für } m \geq n \quad \text{und} \\
\|\Psi(m, n)\| &\leq \beta^{m-n} \quad \text{für } m \leq n
\end{aligned}$$

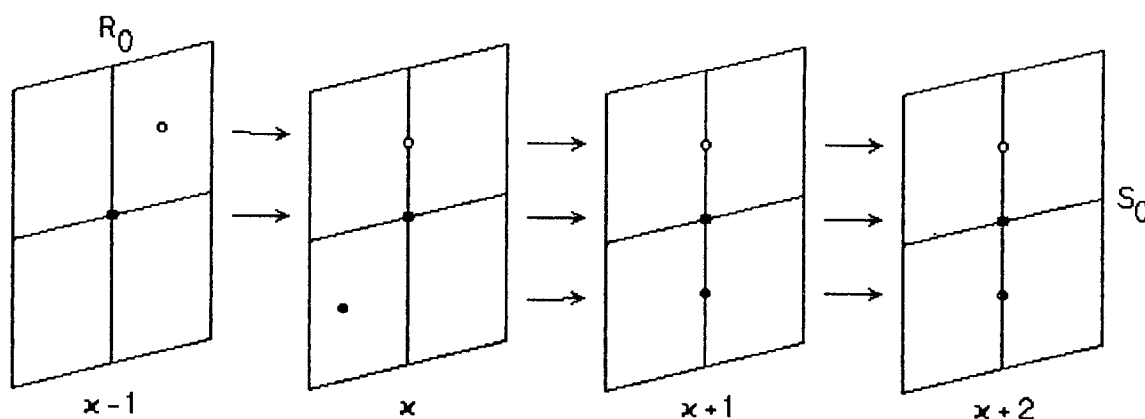


Abbildung 2.3: Ein Beispiel zur diskreten Version des Hauptsatzes

erfüllt, und mit $\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$ folgt unmittelbar (vergleiche Abbildung 2.3):

- Alle Lösungen von $x' = 0$ sind γ^+ -quasibeschränkt.
- Die triviale Lösung von $x' = 0$ ist die einzige auf ganz \mathbb{Z} definierte Lösung — und sie ist γ^- -quasibeschränkt.
- Alle Lösungen von $y' = y$ sind konstant auf \mathbb{Z} , wegen $\gamma < 1$ also γ^- -quasibeschränkt.
- Die triviale Lösung von $y' = y$ ist die einzige Lösung, die “exponentiell abklingt”, d.h. die einzige γ^+ -quasibeschränkte Lösung.

Definiert man nun in Anlehnung an den kontinuierlichen Fall zwei Faserbündel S_0 und R_0 durch

$$S_0 := \{(\kappa, \xi, \eta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 : \eta = 0\} \quad \text{und} \\ R_0 := \{(\kappa, \xi, \eta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 : \xi = 0\},$$

so implizieren die obigen Aussagen die folgenden beiden Charakterisierungen:

- S_0 besteht genau aus den Punkten $(\kappa, \xi, \eta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$, für die die Lösung $\mu : \mathbb{Z}_\kappa \rightarrow \mathbb{R}^2$ von (2.48) zur Anfangsbedingung $x(\kappa) = \xi$, $y(\kappa) = \eta$ eine γ^+ -quasibeschränkte Abbildung ist.
- R_0 besteht genau aus den Punkten $(\kappa, \xi, \eta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$, zu denen eine Lösung $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ von (2.48) existiert, die γ^- -quasibeschränkt ist und der Bedingung $\mu(\kappa) = (\xi, \eta)$ genügt.

Während also die Charakterisierung des S_0 -Faserbündels im kontinuierlichen und diskreten Fall übereinstimmt, beinhaltet die Charakterisierung des R_0 -Faserbündels im diskreten Fall noch eine *Existenzaussage*.

Ein weiterer Unterschied ist beim Begriff der *Invarianz* erkennbar: Während bei den kontinuierlichen dynamischen Prozessen mit einem Punkt stets die gesamte Lösung im jeweiligen Faserbündel enthalten ist, gilt dies diskret im allgemeinen nur für den Lösungszweig in positiver Zeitrichtung. Der Grund für diese Auszeichnung der positiven Zeitrichtung ist natürlich wieder bei der fehlenden Invertierbarkeit der rechten Seite zu suchen. Setzt man jedoch die Invertierbarkeit voraus, so ist auch im diskreten Fall mit einem Punkt stets die gesamte Lösung im S_0 - bzw. R_0 -Faserbündel enthalten.

Diese Unterschiede zwischen den kontinuierlichen und den diskreten dynamischen Prozessen sind auch im nun folgenden Hauptsatz über invariante Faserbündel erkennbar. Er basiert auf einem entsprechenden Ergebnis der Vorlesung AULBACH [5], das dort allerdings nur für endlich-dimensionale, parameterunabhängige Prozesse mit invertierbarer rechter Seite formuliert und bewiesen wurde. Desweiteren werden im Hauptsatz dieser Arbeit nicht ausschließlich auf ganz \mathbb{Z} definierte Prozesse behandelt, da die Aussagen zum S_0 -Faserbündel auch für Prozesse mit nur nach rechts unbeschränktem Definitionsintervall gelten.

Satz 2.3.1 *Gegeben sei der von einem Parameter $p \in \mathcal{P}$ abhängige, diskrete dynamische Prozeß*

$$\begin{cases} x' = A(k)x + F(k, x, y, p) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y, p) \end{cases} \quad (2.49)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{P} , einem nach rechts unbeschränkten diskreten Intervall $I \subset \mathbb{Z}$, sowie stetigen Abbildungen $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : I \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$, $F : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$, mit $F(k, 0, 0, p) \equiv 0$, $G(k, 0, 0, p) \equiv 0$ auf $I \times \mathcal{P}$. Ferner gelte:

(H1) Die Übergangsabbildung Φ des linearen Prozesses $x' = A(k)x$ und die erweiterte Übergangsabbildung Ψ von $y' = B(k)y$ erfüllen für $m, n \in I$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(m, n)\| &\leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n, \\ \|\Psi(m, n)\| &\leq K\beta^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $0 < \alpha < \beta$.

(H2) Für alle $k \in I$, $p \in \mathcal{P}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(k, x, y, p) - F(k, \bar{x}, \bar{y}, p)\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(k, x, y, p) - G(k, \bar{x}, \bar{y}, p)\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ sei die allgemeine Lösung von (2.49) gemäß (2.3). Mit $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$ gelten dann folgende Aussagen:

(a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung $s_0 : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$, so daß ein Punkt (κ, ξ, η, p) genau dann in dem Faserbündel

$$S_0 := \{(\kappa, \xi, s_0(\kappa, \xi, p), p) : \kappa \in I, \xi \in \mathcal{X}, p \in \mathcal{P}\}$$

enthalten ist, wenn die zweite Komponente $\lambda_2(\cdot; \kappa, \xi, \eta, p) : \mathbb{Z}_\kappa \rightarrow \mathcal{Y}$ der Lösung $\lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta, p) : \mathbb{Z}_\kappa \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ von (2.49) zum Parameter p und der Anfangsbedingung $x(\kappa) = \xi$, $y(\kappa) = \eta$ eine γ^+ -quasibeschränkte Abbildung ist. Die Abbildung s_0 ist stetig und man erhält weiter:

(i) Für alle $\kappa \in I$ und $p \in \mathcal{P}$ ist $s_0(\kappa, 0, p) = 0$.

(ii) Für alle $\kappa \in I$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\|s_0(\kappa, \xi_1, p) - s_0(\kappa, \xi_2, p)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|.$$

(iii) Für alle $\kappa \in I$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(\cdot; \kappa, \xi, s_0(\kappa, \xi, p), p)\|_{\kappa, \gamma}^+ &\leq \left(K + \frac{4K^3L^2}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \right) \|\xi\| \gamma^{-\kappa} \\ \|\lambda_2(\cdot; \kappa, \xi, s_0(\kappa, \xi, p), p)\|_{\kappa, \gamma}^+ &\leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi\| \gamma^{-\kappa}, \end{aligned}$$

d.h. $\lambda(\cdot; \kappa, \xi, s_0(\kappa, \xi, p), p)$ ist γ^+ -quasibeschränkt.

(iv) Der Graph S_0 ist ein invariantes Faserbündel von (2.49) in folgendem Sinne: Ist $(\kappa, \xi, \eta, p) \in S_0$, so gilt $(k, \lambda(k; \kappa, \xi, \eta, p), p) \in S_0$ für alle $k \in \mathbb{Z}_\kappa$. (Ist die rechte Seite von (2.49) für beliebige $k \in I$ und $p \in \mathcal{P}$ invertierbar, so kann in der letzten Aussage "k $\in \mathbb{Z}_\kappa$ " durch "k $\in I$ " ersetzt werden.) Man nennt S_0 das S_0 -Faserbündel von (2.49).

(b) Ist $I = \mathbb{Z}$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $r_0 : \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß ein Punkt (κ, ξ, η, p) genau dann in dem Faserbündel

$$R_0 := \{(\kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p) : \kappa \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathcal{Y}, p \in \mathcal{P}\}$$

enthalten ist, wenn eine Lösung $\lambda^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta, p) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ von (2.49) zum Parameter p existiert, die der Anfangsbedingung $x(\kappa) = \xi$, $y(\kappa) = \eta$ genügt, und deren erste Komponente $\lambda_1^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta, p) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ eine γ^- -quasibeschränkte Abbildung ist. Die Lösung $\lambda^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta, p)$ ist dann eindeutig bestimmt, r_0 ist stetig und es gilt weiter:

- (i) Für alle $\kappa \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathcal{P}$ ist $r_0(\kappa, 0, p) = 0$.
- (ii) Für alle $\kappa \in \mathbb{Z}$, $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{Y}$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\|r_0(\kappa, \eta_1, p) - r_0(\kappa, \eta_2, p)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

(iii) Für alle $\kappa \in \mathbb{Z}$, $\eta \in \mathcal{Y}$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\lambda_1^*(\cdot; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p)\|_{\kappa, \gamma}^- &\leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\eta\| \gamma^{-\kappa}, \\ \|\lambda_2^*(\cdot; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p)\|_{\kappa, \gamma}^- &\leq \left(K + \frac{4K^3L^2}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \right) \|\eta\| \gamma^{-\kappa} \end{aligned}$$

d.h. $\lambda^*(\cdot; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p)$ ist γ^- -quasibeschränkt.

(iv) Der Graph R_0 ist ein invariantes Faserbündel von (2.49), das sogenannte R_0 -Faserbündel von (2.49).

(c) Im Fall $I = \mathbb{Z}$ haben die invarianten Faserbündel S_0 und R_0 nur die triviale Lösung gemeinsam, d.h.:

$$S_0 \cap R_0 = \{(\kappa, 0, 0, p) : \kappa \in \mathbb{Z}, p \in \mathcal{P}\}.$$

Die triviale Lösung ist also die einzige γ -quasibeschränkte Lösung von (2.49).

Beweis: (a) Da in Teil (a) nur Aussagen über das Lösungsverhalten in positiver Zeitrichtung gemacht werden, und da in diesem Fall die den Differenzgleichungen eigenen Probleme nicht auftauchen, kann der Beweis ohne Schwierigkeiten analog zum Beweis von Satz 1.3.1 (a) (Seiten

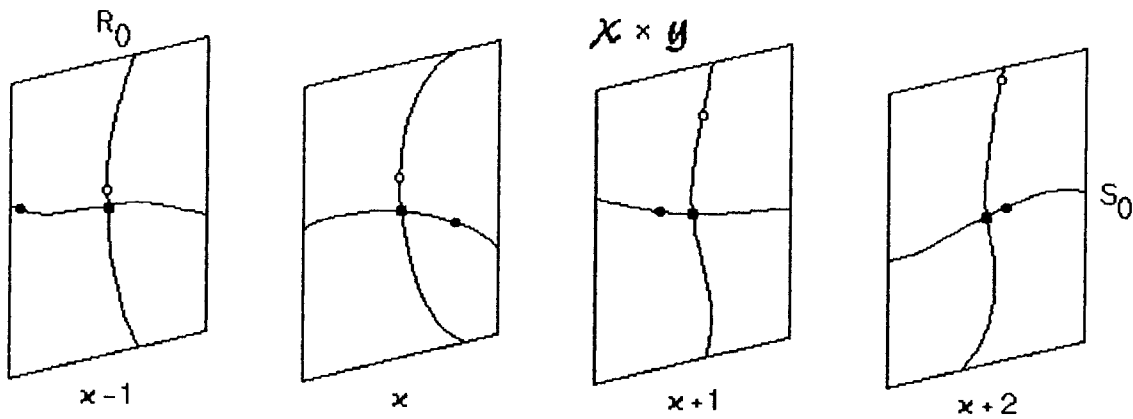


Abbildung 2.4: Die invarianten Faserbündel des Hauptsatzes

28–32) durchgeführt werden. Lediglich der Stetigkeitsbeweis des S_0 -Faserbündels vereinfacht sich: Aus der Stetigkeit von $s_0(\kappa_0, \cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ folgt wegen der diskreten Topologie auf I bereits die Stetigkeit von s_0 .

(b) Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von Satz 1.3.1(a) aufgebaut. Seien also zunächst $\kappa \in \mathbb{Z}$ und $\eta \in \mathcal{Y}$ beliebig, aber fest gewählt.

Behauptung: Zu jedem $p \in \mathcal{P}$ existiert genau ein $r_0(\kappa, \eta, p) \in \mathcal{X}$ und genau eine Lösung $\lambda^*(\cdot; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ von (2.49), so daß $\lambda_1^*(\cdot; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p)$ γ^- -quasibeschränkt ist.

Der Beweis dieser Behauptung verwendet wieder den Banachschen Fixpunktsatz. Sei $J := (-\infty, \kappa] \cap \mathbb{Z}$ und \mathcal{B}_κ der lineare Raum aller stetigen Abbildungen $\mu : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$, mit folgenden Eigenschaften:

- Für beliebiges $p \in \mathcal{P}$ ist $\mu(\cdot, p) : J \rightarrow \mathcal{X}$ eine γ^- -quasibeschränkte Abbildung.
- Die Menge $\{\|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- : p \in \mathcal{P}\}$ ist nach oben beschränkt.

Dieser Raum ist mit der Norm

$$\|\mu\| := \sup\{\|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- : p \in \mathcal{P}\}$$

ein Banachraum. Sei $\mu \in \mathcal{B}_\kappa$ beliebig. Zunächst wird das folgende Anfangswertproblem betrachtet:

$$y' = B(k)y + G(k, \mu(k, p), y, p) \quad , \quad k \in J \quad , \quad y(\kappa) = \eta . \quad (2.50)$$

Wegen $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K} < \frac{\beta}{K}$ und (H1) gilt für beliebige $k \in J$ und $p \in \mathcal{P}$ die Ungleichung

$$L\|B(k)^{-1}\| = L\|\Psi(k, k+1)\| \leq \frac{KL}{\beta} < 1 ,$$

weswegen Korollar A.2.3 anwendbar ist. Also ist die rechte Seite der Differenzgleichung in (2.50) für beliebige $k \in J$ und $p \in \mathcal{P}$ ein Homöomorphismus auf \mathcal{Y} , und die so entstehende Familie von Umkehrabbildungen erzeugt eine stetige Abbildung $J \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$. (Man vergleiche hierzu auch (2.4).) Damit besitzt (2.50) für beliebiges $p \in \mathcal{P}$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\nu(\cdot, p)$

auf J , und die Abbildung $\nu : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ ist stetig. Gemäß Lemma 2.2.5 ist $\nu(\cdot, p)$ darüberhinaus für alle $p \in \mathcal{P}$ γ^- -quasibeschränkt mit

$$\|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq K \|\eta\| \gamma^{-\kappa} + \frac{K}{\beta - \gamma - KL} \|G(\cdot, \mu(\cdot, p), 0, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq K \|\eta\| \gamma^{-\kappa} + \frac{KL}{\beta - \gamma - KL} \|\mu\| .$$

Betrachte nun die Differenzgleichung

$$x' = A(k)x + F(k, \mu(k, p), \nu(k, p), p) \quad , \quad k \in J . \quad (2.51)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \|F(k, \mu(k, p), \nu(k, p), p)\| \gamma^{-k} &\leq L \|\mu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- + L \|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \\ &\leq KL \|\eta\| \gamma^{-\kappa} + \left(L + \frac{KL^2}{\beta - \gamma - KL} \right) \|\mu\| \end{aligned} \quad (2.52)$$

für alle $k \in J$ und $p \in \mathcal{P}$ existiert nach Lemma 2.2.2 zu jedem Parameterwert $p \in \mathcal{P}$ genau eine γ^- -quasibeschränkte Lösung $\mu^*(\cdot, p) : J \rightarrow \mathcal{X}$ von (2.51). Ferner ist die Abbildung $\mu^* : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig und wegen (2.21) und (2.52) in \mathcal{B}_κ . Damit läßt sich durch

$$T_{\kappa, \eta} \mu := \mu^*$$

eine Abbildung $T_{\kappa, \eta} : \mathcal{B}_\kappa \rightarrow \mathcal{B}_\kappa$ definieren.

Bevor der Banachsche Fixpunktsatz auf diese Abbildung angewandt werden kann, müssen noch einige Abschätzungen bewiesen werden.

Seien dazu $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{Y}$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{B}_\kappa$ und $p \in \mathcal{P}$ beliebig, aber fest. $\nu_i(\cdot, p)$ sei die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = B(k)y + G(k, \mu_i(k, p), y, p) \quad , \quad k \in J \quad , \quad y(\kappa) = \eta_i .$$

Dann ist $\nu(\cdot, p) := \nu_1(\cdot, p) - \nu_2(\cdot, p)$ eine Lösung der Differenzgleichung

$$y' = B(k)y + G(k, \mu_1(k, p), y + \nu_2(k, p), p) - G(k, \mu_2(k, p), \nu_2(k, p), p) \quad , \quad k \in J ,$$

die wieder den Voraussetzungen von Lemma 2.2.5 genügt. Damit erhält man

$$\|\nu(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq K \|\nu(\kappa, p)\| \gamma^{-\kappa} + \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- ,$$

d.h.

$$\|\nu_1(\cdot, p) - \nu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq K \|\eta_1 - \eta_2\| \gamma^{-\kappa} + \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- . \quad (2.53)$$

Sei nun $\mu_i^* := T_{\kappa, \eta_i} \mu_i$. Dann ist $\mu^*(\cdot, p) := \mu_1^*(\cdot, p) - \mu_2^*(\cdot, p)$ eine Lösung der Differenzgleichung

$$x' = A(k)x + F(k, \mu_1(k, p), \nu_1(k, p), p) - F(k, \mu_2(k, p), \nu_2(k, p), p) \quad , \quad k \in J ,$$

wobei für alle $k \in J$ mit (2.53) die folgende Abschätzung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} &\|F(k, \mu_1(k, p), \nu_1(k, p), p) - F(k, \mu_2(k, p), \nu_2(k, p), p)\| \gamma^{-k} \leq \\ &\leq L \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- + L \|\nu_1(\cdot, p) - \nu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \\ &\leq L \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- + LK \|\eta_1 - \eta_2\| \gamma^{-\kappa} + \frac{2KL^2}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- = \\ &= LK \|\eta_1 - \eta_2\| \gamma^{-\kappa} + \frac{L(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- . \end{aligned}$$

Da $\mu^*(\cdot, p)$ nach Konstruktion γ^- -quasibeschränkt ist, liefert die Anwendung von Lemma 2.2.2

$$\|\mu^*(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{2K^2L}{\beta - \alpha} \|\eta_1 - \eta_2\| \gamma^{-\kappa} + \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- ,$$

und mit $T_{\kappa, \eta_i} \mu_i = \mu_i^*$ folgt schließlich

$$\|T_{\kappa, \eta_1} \mu_1(\cdot, p) - T_{\kappa, \eta_2} \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{2K^2L}{\beta - \alpha} \|\eta_1 - \eta_2\| \gamma^{-\kappa} + \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- . \quad (2.54)$$

Damit lassen sich leicht die Aussagen von (b) beweisen:

Für $\eta = \eta_1 = \eta_2$ und beliebiges $p \in \mathcal{P}$ liefert (2.54) die Ungleichung

$$\|T_{\kappa, \eta} \mu_1(\cdot, p) - T_{\kappa, \eta} \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1(\cdot, p) - \mu_2(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1 - \mu_2\| ,$$

und durch Bildung des Supremums schließlich

$$\|T_{\kappa, \eta} \mu_1 - T_{\kappa, \eta} \mu_2\| \leq \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_1 - \mu_2\| .$$

Wegen $L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$ ist $2KL < \beta - \alpha - 2KL$, d.h. $T_{\kappa, \eta}$ ist eine Kontraktion auf \mathcal{B}_κ — besitzt also genau einen Fixpunkt $\mu_{\kappa, \eta} \in \mathcal{B}_\kappa$. $\nu_{\kappa, \eta} : J \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ sei die zu $\mu_{\kappa, \eta}$ gehörige Lösung von (2.50). Setzt man $r_0(\kappa, \eta, p) := \mu_{\kappa, \eta}(\kappa, p)$ und

$$\lambda^*(k; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p) := \begin{cases} (\mu_{\kappa, \eta}(k, p), \nu_{\kappa, \eta}(k, p)) & \text{für } k \leq \kappa \\ \lambda(k; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p) & \text{für } k \geq \kappa \end{cases}$$

(λ ist die allgemeine Lösung von (2.49)), so ist λ^* offensichtlich eine globale Lösung von (2.49) zum Parameter p und zur Anfangsbedingung $x(\kappa) = r_0(\kappa, \eta, p)$, $y(\kappa) = \eta$, und $\lambda_1^*(k; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p)$ ist γ^- -quasibeschränkt.

Ist umgekehrt $\tilde{\lambda}^*$ eine Lösung von (2.49) mit diesen Eigenschaften, so erhält man wie im Beweis von Satz 1.3.1, daß die Einschränkung der ersten Komponente $\tilde{\lambda}_1^*$ auf J gleich $\mu_{\kappa, \eta}(\cdot, p)$ sein muß, woraus sofort $\tilde{\lambda}^* = \lambda^*$ folgt.

Beweis von (i): Gemäß Voraussetzung ist die Nullabbildung für jedes $p \in \mathcal{P}$ eine globale Lösung von (2.49), und zwar eine γ^- -quasibeschränkte. Somit folgt $r_0(\kappa, 0, p) = 0$ aus der bereits bewiesenen Eindeutigkeitsaussage.

Beweis von (ii) und (iii): Seien μ_{κ, η_1} und μ_{κ, η_2} die Fixpunkte von T_{κ, η_1} bzw. T_{κ, η_2} . Dann gilt wegen (2.54) für beliebige $p \in \mathcal{P}$

$$\|\mu_{\kappa, \eta_1}(\cdot, p) - \mu_{\kappa, \eta_2}(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{2K^2L}{\beta - \alpha} \|\eta_1 - \eta_2\| \gamma^{-\kappa} + \frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \|\mu_{\kappa, \eta_1}(\cdot, p) - \mu_{\kappa, \eta_2}(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^-$$

oder

$$\|\mu_{\kappa, \eta_1}(\cdot, p) - \mu_{\kappa, \eta_2}(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\eta_1 - \eta_2\| \gamma^{-\kappa} , \quad (2.55)$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned} \|r_0(\kappa, \eta_1, p) - r_0(\kappa, \eta_2, p)\| &= \|\mu_{\kappa, \eta_1}(\kappa, p) - \mu_{\kappa, \eta_2}(\kappa, p)\| \leq \\ &\leq \|\mu_{\kappa, \eta_1}(\cdot, p) - \mu_{\kappa, \eta_2}(\cdot, p)\|_{\kappa, \gamma}^- \gamma^\kappa \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\eta_1 - \eta_2\| . \end{aligned}$$

Für $\eta_2 = 0$ gilt offensichtlich $\mu_{\kappa, \eta_2} = 0$ — und (2.55) ergibt mit $\eta = \eta_1$ genau die in (iii) geforderte Abschätzung für $\lambda_1^*(\cdot; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p)$. Mit Lemma 2.2.5, angewandt auf

$$y' = B(k)y + G(k, \lambda_1^*(k; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p), y, p),$$

folgt daraus auch unmittelbar die Abschätzung für $\lambda_2^*(\cdot; \kappa, r_0(\kappa, \eta, p), \eta, p)$.

Beweis von (iv): Seien $(\kappa, \xi, \eta, p) \in R_0$ und $\kappa_0 \in \mathbb{Z}_\kappa$ beliebig. Dann ist nach dem bereits bewiesenen $\lambda_1^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta, p)$ γ^- -quasibeschränkt. Wegen $(\kappa_0, \lambda(\kappa_0; \kappa, \xi, \eta, p), p) = (\kappa_0, \lambda^*(\kappa_0; \kappa, \xi, \eta, p), p)$ erfüllt also auch $(\kappa_0, \lambda(\kappa_0; \kappa, \xi, \eta, p), p)$ die Charakterisierung in (b), und liegt somit ebenfalls in R_0 . Ist die rechte Seite von (2.49) für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathcal{P}$ invertierbar, erhält man völlig analog die obige Aussage für alle $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$.

Bleibt nur noch die Stetigkeit von r_0 nachzuweisen. Sei dazu $(\kappa_0, \eta_0, p_0) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P}$ beliebig. Wegen $r_0(\kappa_0, \eta_0, p) = \mu_{\kappa_0, \eta_0}(\kappa_0, p)$ und $\mu_{\kappa_0, \eta_0} \in \mathcal{B}_{\kappa_0}$ ist die Abbildung $r_0(\kappa_0, \eta_0, \cdot) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig, woraus man mit Lemma A.2.5 und (ii) sofort die Stetigkeit der Abbildung $r_0(\kappa_0, \cdot, \cdot) : \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ erhält. Die diskrete Topologie auf \mathbb{Z} liefert jetzt unmittelbar die Stetigkeit von r_0 .

(c) Sei $(\kappa, \xi, \eta, p) \in S_0 \cap R_0$ beliebig. Dann existiert wegen (a) und (b) eine eindeutig bestimmte Lösung $\mu = (\mu_1, \mu_2) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ von (2.49) zum Parameter p mit $\mu_1(\kappa) = \xi$, $\mu_2(\kappa) = \eta$, die γ^+ - und γ^- -, also γ -quasibeschränkt ist. Die Voraussetzung (H2) impliziert nun unmittelbar die γ -Quasibeschränktheit von $F(\cdot, \mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot), p)$ und $G(\cdot, \mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot), p)$, und Lemma 2.2.4 liefert: μ_2 ist die eindeutig bestimmte γ -quasibeschränkte Lösung von

$$y' = B(k)y + G(k, \mu_1(k), \mu_2(k), p).$$

Ferner ist μ_1 gemäß Lemma 2.2.2 die eindeutig bestimmte γ -quasibeschränkte Lösung von

$$x' = A(k)x + F(k, \mu_1(k), \mu_2(k), p),$$

und wie im Beweis von Satz 1.3.1(c) erhält man mittels (2.22) und (2.39) die Abschätzungen

$$\|\mu_i\|_\gamma \leq \left(\frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} \right)^2 \|\mu_i\|_\gamma \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Wegen $L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$ ist $\frac{2KL}{\beta - \alpha - 2KL} < 1$, weswegen die obigen beiden Ungleichungen nur für $\|\mu_i\|_\gamma = 0$ erfüllbar sind, d.h. μ ist die Nullabbildung. Folglich gilt $\xi = \mu_1(\kappa) = 0$, $\eta = \mu_2(\kappa) = 0$. Damit ist alles bewiesen. \diamond

Wie im kontinuierlichen Fall übertragen sich Periodizitätseigenschaften der rechten Seite von (2.49) auf die invarianten Faserbündel des Hauptsatzes. Die entsprechenden Ergebnisse sind im folgenden Analogon zu Korollar 1.3.2 enthalten.

Korollar 2.3.2 Gegeben sei wieder der von einem Parameter $p \in \mathcal{P}$ abhängige Prozeß

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = A(k)x + F(k, x, y, p) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y, p) \end{array}} \quad (2.56)$$

mit den Voraussetzungen von Satz 2.3.1. s_0 und r_0 seien die Abbildungen aus Satz 2.3.1. Dann gilt:

(a) Sind die Abbildungen A , B , F und G periodisch in k mit Periode $\Theta \in \mathbb{N}$, so gilt für alle $\kappa \in I$, $p \in \mathcal{P}$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $\eta \in \mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned} s_0(\kappa + \Theta, \xi, p) &= s_0(\kappa, \xi, p) \quad \text{und} \\ r_0(\kappa + \Theta, \eta, p) &= r_0(\kappa, \eta, p), \end{aligned}$$

d.h. auch s_0 und r_0 sind periodisch in k mit Periode Θ .

(b) Ist der Prozeß (2.56) autonom, d.h. sind die Abbildungen A , B , F und G von k unabhängig, so sind auch s_0 und r_0 von k unabhängig. Die Mengen

$$\begin{aligned} S_0 &:= \{(\xi, s_0(\xi, p), p) : \xi \in \mathcal{X}, p \in \mathcal{P}\} \quad \text{und} \\ R_0 &:= \{(r_0(\eta, p), \eta, p) : \eta \in \mathcal{Y}, p \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

sind also invariante Mannigfaltigkeiten im Phasenraum.

Beweis: Die Aussagen von (b) sind unmittelbare Konsequenzen aus (a).

Zum Beweis von (a) seien $\kappa \in I$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ beliebig, aber fest. Bezeichnet $\mu = (\mu_1, \mu_2) : \mathbb{Z}_\kappa \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ die Lösung von (2.56) mit $\mu_1(\kappa) = \xi$ und $\mu_2(\kappa) = s_0(\kappa, \xi, p)$, so ist μ_2 gemäß Satz 2.3.1 γ^+ -quasibeschränkt. Definiert man $\nu = (\nu_1, \nu_2) : \mathbb{Z}_{\kappa+\Theta} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ durch

$$\nu_1(k) := \mu_1(k - \Theta) \quad \text{und} \quad \nu_2(k) := \mu_2(k - \Theta),$$

so ist wegen der Periodizität von A , B , F und G auch ν eine Lösung von (2.56). Ferner ist ν_2 γ^+ -quasibeschränkt. Satz 2.3.1 liefert dann

$$\begin{aligned} s_0(\kappa + \Theta, \xi, p) &= s_0(\kappa + \Theta, \mu_1(\kappa + \Theta - \Theta), p) = s_0(\kappa + \Theta, \nu_1(\kappa + \Theta), p) = \\ &= \nu_2(\kappa + \Theta) = \mu_2(\kappa) = s_0(\kappa, \mu_1(\kappa), p) = s_0(\kappa, \xi, p). \end{aligned}$$

Die Periodizität von r_0 wird völlig analog bewiesen. \diamond

Verwandte Ergebnisse für diskrete dynamische Systeme findet man etwa in IRWIN [15, pp. 144ff], IRWIN [16] oder SHUB [28, pp. 33ff]. Dabei behandeln die beiden letztgenannten Arbeiten Systeme mit nichtinvertierbarer rechter Seite.

Wie im ersten Kapitel wird der Hauptsatz in den nun folgenden vier Abschnitten verwendet, um invariante Faserbündel durch Lösungen und Faserungen des erweiterten Phasenraumes zu konstruieren, und um schließlich das Reduktionsprinzip, sowie die Sätze von Hartman-Grobman für diskrete dynamische Prozesse zu beweisen.

2.4 Invariante Faserbündel durch Lösungen

Wie bereits mehrfach deutlich wurde, ist bei diskreten dynamischen Prozessen mit nichtinvertierbarer rechter Seite im allgemeinen keine Aussage zur Lösbarkeit eines Anfangswertproblems links von der Anfangszeit möglich. Man kann demnach das Korollar 1.4.1 über invariante Faserbündel durch Lösungen nicht einfach auf diskrete Prozesse umschreiben: Möchte man nämlich die S - und R -Faserbündel durch einen Punkt des erweiterten Phasenraumes konstruieren, so muß zunächst einmal eine Lösung auf ganz \mathbb{Z} existieren, die den betrachteten Punkt enthält — und die gibt es eben im allgemeinen nicht!

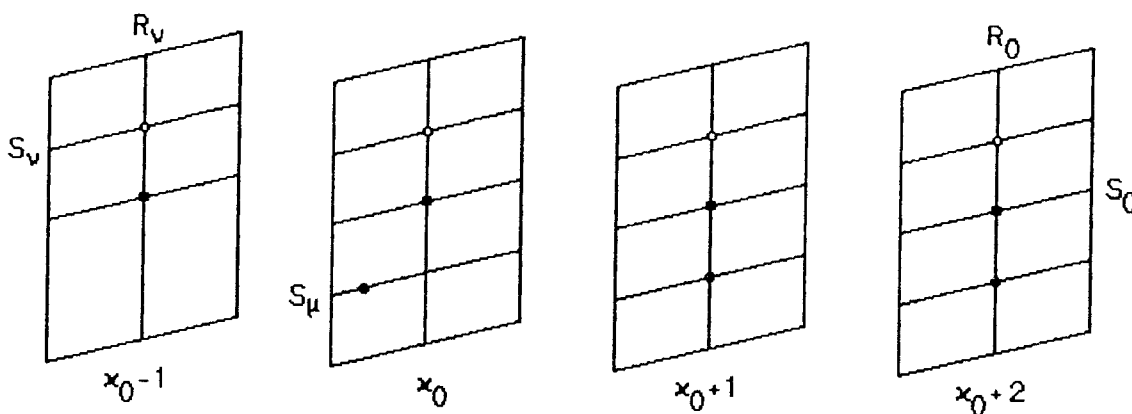


Abbildung 2.5: Invariante Faserbündel durch Lösungen: Ein Beispiel

Ein Ausweg bietet sich sofort an: Man verlangt von der rechten Seite des diskreten dynamischen Prozesses Invertierbarkeit, erreicht also, daß durch jeden Punkt des erweiterten Phasenraumes genau eine auf \mathbb{Z} definierte Lösung verläuft — und ignoriert damit die äußerst interessanten nichtinvertierbaren Differenzgleichungen. Trotzdem ist in gewissen Situationen diese Lösung durchaus sinnvoll, wenn etwa a priori bekannt ist, daß das zu beweisende Ergebnis im allgemeinen nur für invertierbare Prozesse gilt. (Man vergleiche dazu Lemma 2.7.6 im Hinblick auf die Sätze von Hartman-Grobman.)

Auf der anderen Seite ist natürlich zu erwarten, daß bei der Untersuchung nichtinvertierbarer diskreter dynamischer Prozesse nur noch stark reduzierte Aussagen möglich sind. Das Trivialbeispiel

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = y \end{cases} \tag{2.57}$$

des letzten Abschnittes soll dies verdeutlichen (vergleiche Abbildung 2.5). Betrachtet man einen Punkt $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ des erweiterten Phasenraumes mit $\xi_0 \neq 0$, so existiert genau eine Lösung μ von (2.57) durch diesen Punkt, und diese Lösung ist nur auf \mathbb{Z}_{κ_0} erklärt. Definiert man

$$S_\mu := \{(\kappa, \xi, \eta) : \kappa \geq \kappa_0, \xi \in \mathbb{R}, \eta = \eta_0\},$$

und bezeichnet λ die allgemeine Lösung von (2.57), so besteht S_μ aus genau den Punkten (κ, ξ, η) mit $\kappa \in \mathbb{Z}_{\kappa_0}$, für die die Abbildung $\lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta) - \mu(\cdot)$ γ^+ -quasibeschränkt ist ($0 < \gamma < 1$). Es ist jedoch nicht möglich, dieses Faserbündel auf vernünftige Art und Weise in negativer Zeitrichtung fortzusetzen, oder gar ein R -Faserbündel durch μ zu definieren — dazu wäre das Verhalten von μ in negativer Zeitrichtung vonnöten.

Ganz anders ist die Situation bei Punkten der Form $(\kappa_0, 0, \eta_0)$. Die Definition $\nu(k) := (0, \eta_0)$, $k \in \mathbb{Z}$, liefert eine globale Lösung von (2.57) durch diesen Punkt und man erhält leicht zwei invariante Faserbündel

$$\begin{aligned} S_\nu &:= \{(\kappa, \xi, \eta) : \kappa \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathbb{R}, \eta = \eta_0\} \quad \text{und} \\ R_\nu &:= \{(\kappa, \xi, \eta) : \kappa \in \mathbb{Z}, \xi = 0, \eta \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

die analog zu Satz 2.3.1 und Korollar 1.4.1 charakterisiert werden können.

Die Untersuchung invarianter Faserbündel durch Lösungen ist also bei diskreten dynamischen Prozessen vielschichtiger als im kontinuierlichen Fall. Aus diesem Grund werden drei Ergebnisse bewiesen, die dieser Vielschichtigkeit Rechnung tragen.

- In Korollar 2.4.1 wird eine Differenzgleichung wie im Hauptsatz 2.3.1 betrachtet (allerdings parameterunabhängig), und eine spezielle Lösung μ dieses Prozesses, die auf einem nach rechts unbeschränkten, diskreten Intervall definiert ist. Es zeigt sich, daß dann ein invariantes S -Faserbündel durch μ wie in Korollar 1.4.1 existiert, natürlich nur auf dem Definitionsintervall von μ . Ist μ auf ganz \mathbb{Z} definiert, kann auch das R -Faserbündel durch μ konstruiert werden.
- Auch das zweite Ergebnis (Korollar 2.4.2) untersucht nicht notwendigerweise invertierbare Prozesse. Es wird gezeigt, daß die stets vorhandenen S -Faserbündel durch Lösungen stetig von den Anfangswerten der Lösungen abhängen.
- In Korollar 2.4.3 werden schließlich invertierbare Differenzgleichungen behandelt. Man erhält das exakte Analogon zu Korollar 1.4.1.

Zunächst aber wird der allgemeinere, d.h. nicht notwendigerweise invertierbare Fall untersucht.

Korollar 2.4.1 *Gegeben sei der diskrete dynamische Prozeß*

$$\begin{cases} x' = A(k)x + F(k, x, y) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y) \end{cases} \quad (2.58)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} , \mathcal{Y} , einem nach rechts unbeschränkten, diskreten Intervall $I \subset \mathbb{Z}$, sowie stetigen Abbildungen $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : I \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$, $F : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : I \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, mit $F(k, 0, 0) \equiv 0$, $G(k, 0, 0) \equiv 0$ auf I . Ferner gelte wie in Satz 2.3.1:

(H1) Die Übergangsabbildung Φ des linearen Prozesses $x' = A(k)x$ und die erweiterte Übergangsabbildung Ψ von $y' = B(k)y$ erfüllen für $m, n \in I$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(m, n)\| &\leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n, \\ \|\Psi(m, n)\| &\leq K\beta^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $0 < \alpha < \beta$.

(H2) Für alle $k \in I$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(k, x, y) - F(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(k, x, y) - G(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$.

Wieder sei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ die allgemeine Lösung von (2.58) gemäß (2.3) und $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$. Darüberhinaus sei eine Lösung $\mu : J \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ von (2.58) gegeben, mit einem nach rechts unbeschränkten, diskreten Intervall $J \subset I$. Dann gilt:

(a) Es existiert eine stetige Abbildung $s_\mu : J \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit

$$\begin{aligned} S_\mu &:= \{(\kappa, \xi, s_\mu(\kappa, \xi)) : \kappa \in J, \xi \in \mathcal{X}\} \\ &= \{(\kappa, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta) - \mu(\cdot) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt}\} \end{aligned}$$

und

$$\|s_\mu(\kappa, \xi_1) - s_\mu(\kappa, \xi_2)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|$$

für beliebige $\kappa \in J$ und $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$. Ferner ist S_μ ein invariantes Faserbündel für (2.58) (im Sinne von Satz 2.3.1(a),(iv)), das S -Faserbündel durch die Lösung μ .

(b) Im Fall $I = J = \mathbb{Z}$ existiert darüberhinaus eine stetige Abbildung $r_\mu : \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß ein Punkt (κ, ξ, η) genau dann in dem Faserbündel

$$R_\mu := \{(\kappa, r_\mu(\kappa, \eta), \eta) : \kappa \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathcal{Y}\}$$

enthalten ist, wenn eine Lösung $\lambda^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ von (2.58) existiert, die der Anfangsbedingung $x(\kappa) = \xi$, $y(\kappa) = \eta$ genügt, und für die die Differenz $\lambda^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta) - \mu(\cdot)$ eine γ^- -quasibeschränkte Abbildung ist. Ferner gilt die Abschätzung

$$\|r_\mu(\kappa, \eta_1) - r_\mu(\kappa, \eta_2)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\eta_1 - \eta_2\|$$

für beliebige $\kappa \in \mathbb{Z}$ und $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{Y}$, und R_μ ist ein invariantes Faserbündel für (2.58), das R -Faserbündel durch die Lösung μ .

Beweis: Der Beweis verwendet (wie im kontinuierlichen Fall) außer dem Hauptsatz 2.3.1 nur den Satz 2.1.1 über die Differenzgleichung der gestörten Bewegung.

Betrachte also neben (2.58) noch den auf $J \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ erklärten, parameterunabhängigen diskreten dynamischen Prozeß

$$\begin{aligned} x' &= A(k)x + F(k, x + \mu_1(k), y + \mu_2(k)) - F(k, \mu_1(k), \mu_2(k)) \\ y' &= B(k)y + G(k, x + \mu_1(k), y + \mu_2(k)) - G(k, \mu_1(k), \mu_2(k)) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß (2.59) den Voraussetzungen von Satz 2.3.1 genügt. Somit existiert eine stetige Abbildung $s_0 : J \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ für (2.59) gemäß Satz 2.3.1(a). Definiert man

$$s_\mu(\kappa, \xi) := s_0(\kappa, \xi - \mu_1(\kappa)) + \mu_2(\kappa),$$

so ist s_μ offensichtlich stetig und erfüllt die in (a) geforderte Abschätzung.

Sei nun (κ, ξ, η) ein Punkt in $J \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, so daß $\nu : J \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, definiert durch $\nu(k) := \lambda(k; \kappa, \xi, \eta) - \mu(k)$, eine γ^+ -quasibeschränkte Abbildung ist. Gemäß Satz 2.1.1(b) ist dann ν eine Lösung der Differenzgleichung (2.59), woraus sofort $\nu_2(\kappa) = s_0(\kappa, \nu_1(\kappa))$ folgt. Die Beziehungen $\nu_1(\kappa) = \xi - \mu_1(\kappa)$ und $\nu_2(\kappa) = \eta - \mu_2(\kappa)$ implizieren jetzt

$$\begin{aligned} \eta &= \nu_2(\kappa) + \mu_2(\kappa) = s_0(\kappa, \nu_1(\kappa)) + \mu_2(\kappa) = \\ &= s_0(\kappa, \xi - \mu_1(\kappa)) + \mu_2(\kappa) = s_\mu(\kappa, \xi), \end{aligned}$$

d.h. $(\kappa, \xi, \eta) \in S_\mu$. Ist nun umgekehrt $(\kappa, \xi, \eta) \in S_\mu$, so erhält man für $\nu(\cdot) := \lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta) - \mu(\cdot)$: ν ist eine Lösung von (2.59) mit $\nu_1(\kappa) = \xi - \mu_1(\kappa)$ und $\nu_2(\kappa) = \eta - \mu_2(\kappa)$. Mit $\eta = s_\mu(\kappa, \xi)$ folgt

$$\begin{aligned} \nu_2(\kappa) &= \eta - \mu_2(\kappa) = s_\mu(\kappa, \xi) - \mu_2(\kappa) = \\ &= s_0(\kappa, \xi - \mu_1(\kappa)) = s_0(\kappa, \nu_1(\kappa)), \end{aligned}$$

d.h. $\nu(\cdot) := \lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta) - \mu(\cdot)$ ist γ^+ -quasibeschränkt. Die Invarianz von S_μ folgt wie im Beweis von Satz 2.3.1. Damit ist (a) bewiesen. Der Beweis von (b) verläuft völlig analog. \diamond

Korollar 2.4.1 zeigt, daß in der Situation des Hauptsatzes 2.3.1 durch einen Punkt $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ des erweiterten Phasenraumes stets ein invariantes S -Faserbündel auf \mathbb{Z}_{κ_0} existiert. Das nun folgende Korollar untersucht die stetige Abhängigkeit dieser Faserbündel von den Anfangswerten. Damit wird es im sechsten Abschnitt möglich sein, das Reduktionsprinzip für nichtinvertierbare diskrete dynamische Prozesse zu beweisen.

Korollar 2.4.2 Gegeben sei der diskrete dynamische Prozeß

$$\begin{cases} x' = A(k)x + F(k, x, y) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y) \end{cases} \quad (2.60)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$, $F : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit $F(k, 0, 0) \equiv 0$, $G(k, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{Z} . Ferner gelte:

(H1) Die Übergangsabbildung Φ des linearen Prozesses $x' = A(k)x$ und die erweiterte Übergangsabbildung Ψ von $y' = B(k)y$ erfüllen für $m, n \in \mathbb{Z}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(m, n)\| &\leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n, \\ \|\Psi(m, n)\| &\leq K\beta^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $0 < \alpha < \beta$.

(H2) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(k, x, y) - F(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(k, x, y) - G(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$.

λ bezeichne wieder die allgemeine Lösung von (2.60), die Menge $D \subset \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ sei definiert durch

$$D := \{(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) : \kappa \geq \kappa_0\}.$$

Dann gilt mit $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$: Es existiert eine stetige Abbildung $s : D \rightarrow \mathcal{Y}$ mit

$$\begin{aligned} S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0} &:= \{(\kappa, \xi, s(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) : \kappa \geq \kappa_0, \xi \in \mathcal{X}\} \\ &= \{(\kappa, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt}\} \end{aligned}$$

und

$$\|s(\kappa, \xi_1, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) - s(\kappa, \xi_2, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|$$

für beliebige $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$, $\kappa \geq \kappa_0$, $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$ und $\eta_0 \in \mathcal{Y}$. Ferner ist $S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}$ ein invariantes Faserbündel für (2.60) im Sinne von Satz 2.3.1(a), (iv), das S -Faserbündel durch $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ bzw. durch die Lösung $\lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)$.

Beweis: Sei $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ beliebig, aber fest. Analog zum Beweis von Korollar 1.4.1 betrachtet man nun für beliebiges $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ den auf $\mathbb{Z}_{\kappa_0} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ erklärten diskreten dynamischen Prozeß

$$\begin{aligned} x' &= A(k)x + \tilde{F}_{\kappa_0}(k, x, y, \xi_0, \eta_0) \\ y' &= B(k)y + \tilde{G}_{\kappa_0}(k, x, y, \xi_0, \eta_0) \end{aligned} \quad (2.61)$$

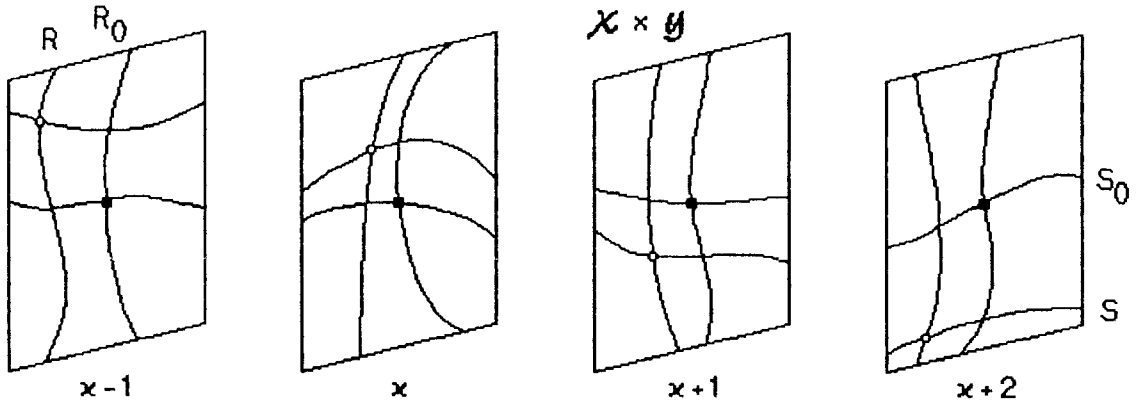


Abbildung 2.6: Diskrete invariante Faserbündel durch Lösungen

mit

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\kappa_0}(k, x, y, \xi_0, \eta_0) &:= F(k, x + \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), y + \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) - \\ &\quad F(k, \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)), \\ \tilde{G}_{\kappa_0}(k, x, y, \xi_0, \eta_0) &:= G(k, x + \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), y + \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) - \\ &\quad G(k, \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)),\end{aligned}$$

und Parameterraum $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. (κ_0 ist fest, wird also nicht als Parameter betrachtet.) Dieser Prozeß ist die Differenzgleichung der gestörten Bewegung zur Lösung $\lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ von (2.60). Da die allgemeine Lösung λ gemäß (2.3) stetig ist, erfüllt (2.61) die Voraussetzungen von Satz 2.3.1.

Damit existiert eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $s_{\kappa_0} : \mathbb{Z}_{\kappa_0} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ für (2.61) gemäß Satz 2.3.1(a). Definiert man für $\kappa \geq \kappa_0$

$$s(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) := s_{\kappa_0}(\kappa, \xi - \lambda_1(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \xi_0, \eta_0) + \lambda_2(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0),$$

so ist $s(\cdot, \cdot, \kappa_0, \cdot, \cdot)$, und damit — wegen der diskreten Topologie auf \mathbb{Z} — auch s stetig. Wie im Beweis von Korollar 2.4.1 erhält man die übrigen Aussagen von Korollar 2.4.2. \diamond

Abschließend soll nun noch das exakte Analogon zu Korollar 1.4.1 bewiesen werden: Korollar 2.4.3 behandelt diskrete dynamische Prozesse mit invertierbarer rechter Seite. Es wird beim Beweis der Sätze von Hartman-Grobman im siebten Abschnitt Verwendung finden.

Korollar 2.4.3 Gegeben sei der diskrete dynamische Prozeß

$$\begin{cases} x' = A(k)x + F(k, x, y) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y) \end{cases} \quad (2.62)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$, $F : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit $F(k, 0, 0) \equiv 0$, $G(k, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{Z} . Ferner gelte:

(H1) Die Übergangsabbildung Φ des linearen Prozesses $x' = A(k)x$ und die erweiterte Übergangsabbildung Ψ von $y' = B(k)y$ erfüllen für $m, n \in \mathbb{Z}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\|\Phi(m, n)\| &\leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n, \\ \|\Psi(m, n)\| &\leq K\beta^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n\end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $0 < \alpha < \beta$.

(H2) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(k, x, y) - F(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(k, x, y) - G(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$.

(H3) Für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ ist die rechte Seite von (2.62) ein Homöomorphismus auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Damit existiert die erweiterte allgemeine Lösung $\lambda(k; \kappa, \xi, \eta) = (\lambda_1(k; \kappa, \xi, \eta), \lambda_2(k; \kappa, \xi, \eta))$ gemäß (2.4) und $\lambda : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ist stetig.

Mit $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$ gilt dann:

(a) Es existiert eine stetige Abbildung $s : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit

$$\begin{aligned} S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0} &:= \{(\kappa, \xi, s(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) : \kappa \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathcal{X}\} \\ &= \{(\kappa, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt}\} \end{aligned}$$

und

$$\|s(\kappa, \xi_1, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) - s(\kappa, \xi_2, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|$$

für beliebige $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$, $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}$ und $\eta_0 \in \mathcal{Y}$. Ferner ist $S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}$ ein invariantes Faserbündel für (2.62) in folgendem Sinne: Ist $(\kappa, \xi, \eta) \in S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}$, so gilt $(k, \lambda(k; \kappa, \xi, \eta)) \in S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Man nennt $S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}$ das S -Faserbündel durch $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ bzw. durch die Lösung $\lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)$.

(b) Es existiert eine stetige Abbildung $r : \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ mit

$$\begin{aligned} R_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0} &:= \{(\kappa, r(\kappa, \eta, \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \eta) : \kappa \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathcal{Y}\} \\ &= \{(\kappa, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\} \end{aligned}$$

und

$$\|r(\kappa, \eta_1, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) - r(\kappa, \eta_2, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\| \leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\eta_1 - \eta_2\|$$

für beliebige $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$, $\xi_0 \in \mathcal{X}$ und $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{Y}$. Ferner ist $R_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}$ ein invariantes Faserbündel für (2.62), das R -Faserbündel durch $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ bzw. durch die Lösung $\lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)$.

Beweis: Sei $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ beliebig, aber fest. Wie im Beweis von Korollar 2.4.2 betrachtet man für beliebiges $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ den auf $\mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ definierten, diskreten dynamischen Prozeß

$$\begin{aligned} x' &= A(k)x + \tilde{F}_{\kappa_0}(k, x, y, \xi_0, \eta_0) \\ y' &= B(k)y + \tilde{G}_{\kappa_0}(k, x, y, \xi_0, \eta_0) \end{aligned} \tag{2.63}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\kappa_0}(k, x, y, \xi_0, \eta_0) &:= F(k, x + \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), y + \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) - \\ &\quad F(k, \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)), \\ \tilde{G}_{\kappa_0}(k, x, y, \xi_0, \eta_0) &:= G(k, x + \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), y + \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) - \\ &\quad G(k, \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)). \end{aligned}$$

Dieser Prozeß ist die Differenzgleichung der gestörten Bewegung zur Lösung $\lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ von (2.62). Die rechte Seite von (2.63) ist für festes $k \in \mathbb{Z}$ und $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ein Homöomorphismus auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, d.h. alle Lösungen existieren auf ganz \mathbb{Z} und sind eindeutig bestimmt. Ferner überzeugt man sich leicht, daß (2.63) den Voraussetzungen von Satz 2.3.1 genügt, mit dem Parameter $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Also existiert wieder eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $s_{\kappa_0} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ für (2.63) gemäß Satz 2.3.1 (a). Definiert man

$$s(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) := s_{\kappa_0}(\kappa, \xi - \lambda_1(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \xi_0, \eta_0) + \lambda_2(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0),$$

so ist s offensichtlich stetig und wie im Beweis von Korollar 1.4.1 erhält man die restlichen Aussagen von (a). Der Beweis von (b) wird analog durchgeführt. \diamond

Wie im vierten Abschnitt des ersten Kapitels kann man diese Ergebnisse auch speziell auf diskrete dynamische Systeme anwenden. Da man hierbei völlig analoge Aussagen erhält, werden sie in diesem Abschnitt nicht eigens aufgeführt.

2.5 Faserungen des erweiterten Phasenraumes

Bei den kontinuierlichen dynamischen Prozessen wurden mit Hilfe von Korollar 1.4.1 horizontale und vertikale Faserungen des erweiterten Phasenraumes konstruiert — die zentralen Hilfsmittel zum Beweis des Reduktionsprinzips und der Sätze von Hartman-Grobman. Bei den diskreten dynamischen Prozessen geht man natürlich völlig analog vor, mit einem kleinen Unterschied: Im Hinblick auf spätere Anwendungen werden die Betrachtungen zweigleisig durchgeführt.

- In Definition 2.5.1 wird für nicht notwendigerweise invertierbare dynamische Prozesse die *horizontale Faserung* eingeführt, Satz 2.5.2 gibt Bedingungen an, unter denen jeder Punkt des erweiterten Phasenraumes auf genau einer horizontalen Faser liegt.
- In Definition 2.5.3 und Satz 2.5.4 werden invertierbare diskrete dynamische Prozesse behandelt, und man erhält die exakten Analoga zu Definition 1.5.1 und Satz 1.5.3.

Zunächst sollen also Differenzgleichungen untersucht werden, deren rechte Seite nicht notwendigerweise invertierbar ist. Gegenstand dieser Untersuchungen ist wieder ein diskreter dynamischer Prozeß der Form

$$\begin{array}{l} x' = A(k)x + F(k, x, y) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y) \end{array} \quad (2.64)$$

Dabei seien \mathcal{X}, \mathcal{Y} beliebige Banachräume, $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$, $F : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ seien stetige Abbildungen mit $F(k, 0, 0) \equiv 0$, $G(k, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{Z} . Ferner gelte wie in Satz 2.3.1 und Korollar 2.4.2:

(H1) Die Übergangsabbildung Φ des linearen Prozesses $x' = A(k)x$ und die erweiterte Übergangsabbildung Ψ von $y' = B(k)y$ erfüllen für $m, n \in \mathbb{Z}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(m, n)\| &\leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n, \\ \|\Psi(m, n)\| &\leq K\beta^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $0 < \alpha < \beta$.

(H2) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(k, x, y) - F(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(k, x, y) - G(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$.

$\lambda(k; \kappa, \xi, \eta) = (\lambda_1(k; \kappa, \xi, \eta), \lambda_2(k; \kappa, \xi, \eta))$ sei wieder die allgemeine Lösung von (2.64) gemäß (2.3), ferner sei $\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$. Damit erfüllt (2.64) die Voraussetzungen von Satz 2.3.1 und Korollar 2.4.2; s_0, r_0 seien die Abbildungen aus Satz 2.3.1, s sei die Abbildung aus Korollar 2.4.2. In Anlehnung an den kontinuierlichen Fall ist nun die folgende Definition möglich.

Definition 2.5.1 Sei $D \subset \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{Y}$ definiert durch $D := \{(\kappa, \xi, \kappa_0, \eta_0) : \kappa \geq \kappa_0\}$. Dann heißt die mittels

$$f_H(\kappa, \xi, \kappa_0, \eta_0) := s(\kappa, \xi, \kappa_0, r_0(\kappa_0, \eta_0), \eta_0)$$

erklärte Abbildung $f_H : D \rightarrow \mathcal{Y}$ horizontale Faserung von (2.64). Die invariante Menge (im Sinne von Satz 2.3.1(a), (iv))

$$F_H(\kappa_0, \eta_0) := \{(\kappa, \xi, f_H(\kappa, \xi, \kappa_0, \eta_0)) : \kappa \in \mathbb{Z}_{\kappa_0}, \xi \in \mathcal{X}\}$$

heißt horizontale Faser durch (κ_0, η_0) .

Die horizontale Faser durch (κ_0, η_0) ist also nichts anderes als das S -Faserbündel durch diejenige Lösung des R_0 -Faserbündels, die durch den Anfangswert $(\kappa_0, r_0(\kappa_0, \eta_0), \eta_0)$ bestimmt ist. Wie im kontinuierlichen Fall erreicht man durch eine verschärfte Bedingung an L , daß jeder Punkt des erweiterten Phasenraumes auf genau einer horizontalen Faser liegt. Dieses Ergebnis ist in dem folgenden Satz enthalten, der — wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird — unmittelbar das Reduktionsprinzip für nicht notwendigerweise invertierbare diskrete dynamische Prozesse impliziert.

Satz 2.5.2 Gegeben sei wieder der diskrete dynamische Prozeß

$$\begin{aligned} x' &= A(k)x + F(k, x, y) \\ y' &= B(k)y + G(k, x, y) \end{aligned} \tag{2.65}$$

mit den zu Beginn dieses Abschnittes aufgeführten Eigenschaften. Darüberhinaus erfülle die Konstante L die Bedingung

$$0 \leq L < C(K, \alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{4K^2} (2 + K - \sqrt{4 + K^2}). \tag{2.66}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Es existiert eine stetige Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, so daß für beliebige $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt: $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ liegt auf genau einer horizontalen Faser $F_H(\kappa_0, \eta_0)$, und zwar auf der Faser $F_H(\kappa_0, \mathcal{F}(\kappa_0, \xi_0, \eta_0))$.

(b) Ist μ eine beliebige Lösung von (2.65), so ist $\mathcal{F}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung des Prozesses

$$y' = B(k)y + G(k, r_0(k, y), y) \tag{2.67}$$

(c) Sind die Abbildungen A , B , F und G in (2.65) periodisch in k mit Periode $\Theta \in \mathbb{N}$, so ist auch die Abbildung \mathcal{F} periodisch in k mit Periode Θ .

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 1.5.3.

(a) Sei $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ beliebig, aber fest. Es soll gezeigt werden, daß für beliebiges $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ der Punkt $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ auf genau einer horizontalen Faser $F_H(\kappa_0, \eta)$ liegt. Dazu definiert man die folgende Abbildung:

$$T_{\kappa_0} : \begin{cases} \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} & \rightarrow & \mathcal{Y} \\ (\eta, \xi_0, \eta_0) & \mapsto & s(\kappa_0, r_0(\kappa_0, \eta), \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \end{cases}$$

T_{κ_0} ist wegen der Stetigkeit von r_0 und s ebenfalls stetig. Für beliebige $\xi_0 \in \mathcal{X}$, $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{Y}$ implizieren Satz 2.3.1 und Korollar 2.4.2 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|T_{\kappa_0}(\eta_1, \xi_0, \eta_0) - T_{\kappa_0}(\eta_2, \xi_0, \eta_0)\| &\leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|r_0(\kappa_0, \eta_1) - r_0(\kappa_0, \eta_2)\| \leq \\ &\leq \left(\frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \right)^2 \|\eta_1 - \eta_2\|, \end{aligned}$$

d.h. T_{κ_0} ist wegen (2.66) und (1.70) eine gleichmäßige Kontraktion, besitzt also gemäß Satz A.2.2 für beliebige (ξ_0, η_0) einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\mathcal{F}(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ in \mathcal{Y} , und $\mathcal{F}(\kappa_0, \cdot, \cdot)$ ist stetig. Ferner ist $\eta \in \mathcal{Y}$ genau dann ein Fixpunkt von $T_{\kappa_0}(\cdot, \xi_0, \eta_0)$, wenn gilt:

$$\eta = s(\kappa_0, r_0(\kappa_0, \eta), \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \Leftrightarrow (\kappa_0, r_0(\kappa_0, \eta), \eta) \in S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0} \Leftrightarrow (\kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in F_H(\kappa_0, \eta).$$

Also liegt $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ genau dann in der horizontalen Faser $F_H(\kappa_0, \eta)$, wenn η Fixpunkt von $T_{\kappa_0}(\cdot, \xi_0, \eta_0)$ ist. Da wegen der diskreten Topologie auf \mathbb{Z} mit $\mathcal{F}(\kappa_0, \cdot, \cdot)$ auch \mathcal{F} stetig ist, ist (a) vollständig bewiesen.

(b) Sei nun $I \subset \mathbb{Z}$ ein nach rechts unbeschränktes diskretes Intervall, $\mu : I \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ eine Lösung von (2.65) und $\kappa_0 \in I$ beliebig. Ferner sei $\eta := \mathcal{F}(\kappa_0, \mu(\kappa_0))$. Dann existiert gemäß (a) und Satz 2.3.1 eine eindeutig bestimmte, γ^- -quasibeschränkte Lösung $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ von (2.65), so daß $\nu - \mu$ γ^+ -quasibeschränkt ist, und zwar $\lambda^*(\cdot; \kappa_0, r_0(\kappa_0, \eta), \eta)$.

Betrachte nun ein beliebiges $\kappa \geq \kappa_0$. Der Punkt $\eta^* := \mathcal{F}(\kappa, \mu(\kappa))$ ist der (wegen (a) eindeutig bestimmte) Punkt in \mathcal{Y} , für den die Differenz $\lambda^*(\cdot; \kappa, r_0(\kappa, \eta^*), \eta^*) - \mu$ eine γ^+ -quasibeschränkte Abbildung ist. Dann folgt aber unmittelbar, daß $\eta^* = \nu_2(\kappa)$ gelten muß. Für alle $\kappa \geq \kappa_0$ gilt demnach:

$$\nu_2(\kappa) = \mathcal{F}(\kappa, \mu(\kappa)).$$

Desweiteren ist ν eine Lösung auf dem R_0 -Faserbündel von (2.65), d.h. $\nu_1(\kappa) = r_0(\kappa, \nu_2(\kappa))$, und somit ist ν_2 eine Lösung des diskreten dynamischen Prozesses (2.67). Insgesamt ist also $\mathcal{F}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (2.67) auf \mathbb{Z}_{κ_0} , und — da $\kappa_0 \in I$ beliebig war — auch auf I .

(c) Diese letzte Aussage von Satz 2.5.2 erhält man leicht wie im Beweis von Korollar 2.3.2. \diamond

In der nun folgenden zweiten Hälfte dieses Abschnittes werden die Betrachtungen wieder auf diskrete dynamische Prozesse mit invertierbarer rechter Seite eingeschränkt. Gegenstand der Untersuchungen ist ein Prozeß der Form (2.64), mit den eingangs aufgeführten Eigenschaften. Zusätzlich genüge dieser Prozeß noch der Bedingung:

(H3) Für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ ist die rechte Seite von (2.64) ein Homöomorphismus auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Damit existiert die erweiterte allgemeine Lösung $\lambda(k; \kappa, \xi, \eta) = (\lambda_1(k; \kappa, \xi, \eta), \lambda_2(k; \kappa, \xi, \eta))$ gemäß (2.4) und $\lambda : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ist stetig. Ferner existieren die Abbildungen s_0, r_0, s und r aus Satz 2.3.1 und Korollar 2.4.3.

Wie bereits in den vergangenen Abschnitten deutlich wurde, ist man unter dieser Voraussetzung aller Schwierigkeiten entledigt — und die Ergebnisse des kontinuierlichen Teils können nahezu wortwörtlich übernommen werden. Die Konstruktion horizontaler und vertikaler Faserungen des erweiterten Phasenraumes macht da keine Ausnahme. Zunächst also zum Analogon von Definition 1.5.1.

Definition 2.5.3 *Mit obigen Bezeichnungen definiert man:*

(a) Die Abbildung $f_H : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ definiert durch

$$f_H(\kappa, \xi, \kappa_0, \eta_0) := s(\kappa, \xi, \kappa_0, r_0(\kappa_0, \eta_0), \eta_0),$$

für beliebige $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$, $\xi \in \mathcal{X}$ und $\eta_0 \in \mathcal{Y}$, heißt horizontale Faserung von (2.64). Die invariante Menge

$$F_H(\kappa_0, \eta_0) := \{(\kappa, \xi, f_H(\kappa, \xi, \kappa_0, \eta_0)) : \kappa \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathcal{X}\}$$

heißt horizontale Faser durch (κ_0, η_0) .

(b) Die Abbildung $f_V : \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ definiert durch

$$f_V(\kappa, \eta, \kappa_0, \xi_0) := r(\kappa, \eta, \kappa_0, \xi_0, s_0(\kappa_0, \xi_0)),$$

für beliebige $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$, $\xi_0 \in \mathcal{X}$ und $\eta \in \mathcal{Y}$, heißt vertikale Faserung von (2.64). Die invariante Menge

$$F_V(\kappa_0, \xi_0) := \{(\kappa, f_V(\kappa, \eta, \kappa_0, \xi_0), \eta) : \kappa \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathcal{Y}\}$$

heißt vertikale Faser durch (κ_0, ξ_0) .

Das Analogon zu Satz 1.5.3 wird beim Beweis der Sätze von Hartman-Grobman Verwendung finden, da diese Sätze nur für invertierbare diskrete dynamische Prozesse bewiesen werden.

Satz 2.5.4 *Gegeben sei ein diskreter dynamischer Prozeß*

$$\begin{array}{l} x' = A(k)x + F(k, x, y) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y) \end{array} \quad (2.68)$$

mit den Eigenschaften (H1), (H2) und (H3). Die Konstante L genüge der Ungleichung

$$0 \leq L < C(K, \alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{4K^2} (2 + K - \sqrt{4 + K^2}). \quad (2.69)$$

Dann gilt:

- (a) Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12}) : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, so daß für beliebige $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} (\kappa_0, \xi_0, \eta_0) &\in F_V(\kappa_0, \mathcal{F}_{11}(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)) \quad \text{und} \\ (\kappa_0, \xi_0, \eta_0) &\in F_H(\kappa_0, \mathcal{F}_{12}(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)) \end{aligned}$$

erfüllt sind. Jeder Punkt des erweiterten Phasenraumes von (2.68) liegt demnach auf genau einer horizontalen und genau einer vertikalen Faser. Die Abbildung \mathcal{F}_1 ist stetig, für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathcal{F}_1(k, 0, 0) = (0, 0)$, und man erhält weiter: Ist μ eine beliebige Lösung von (2.68), so ist $\mathcal{F}_1(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung des entkoppelten Prozesses

$$\begin{aligned} x' &= A(k)x + F(k, x, s_0(k, x)) \\ y' &= B(k)y + G(k, r_0(k, y), y) \end{aligned} \quad (2.70)$$

- (b) Es existiert eine stetige Abbildung $\mathcal{F}_2 : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, so daß für beliebiges $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ der Punkt $(\kappa_0, \mathcal{F}_2(\kappa_0, \xi_0, \eta_0))$ der eindeutig bestimmte Schnittpunkt der horizontalen Faser $F_H(\kappa_0, \eta_0)$ mit der vertikalen Faser $F_V(\kappa_0, \xi_0)$ in der "Hyperebene" $k = \kappa_0$ ist. Insbesondere gilt also $\mathcal{F}_2(k, 0, 0) = (0, 0)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, und man erhält ferner: Ist ν eine Lösung des entkoppelten Prozesses (2.70), so ist $\mathcal{F}_2(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (2.68).
- (c) Für beliebiges $\kappa \in \mathbb{Z}$ sind die Abbildungen $\mathcal{F}_1(\kappa, \cdot, \cdot)$ und $\mathcal{F}_2(\kappa, \cdot, \cdot)$ einander invers, also Homöomorphismen auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Damit sind die Prozesse (2.68) und (2.70) topologisch äquivalent.
- (d) Sind die Abbildungen A, B, F und G in (2.68) periodisch in k mit Periode $\Theta \in \mathbb{N}$, so sind auch die Abbildungen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 periodisch in k mit Periode Θ . Ist (2.68) insbesondere autonom, dann sind die Abbildungen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 von k unabhängig, und damit Homöomorphismen auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Bemerkung: Die obige vertikale Faserung stimmt mit der vertikalen Faserung in KIRCHGRABER, PALMER [19] überein, falls der Prozeß (2.68) autonom und endlichdimensional ist, die Eigenwerte von A im Innern oder auf dem Rand, die Eigenwerte von B dagegen außerhalb des Einheitskreises liegen.

Beweis: Der Beweis kann nahezu wortwörtlich vom Beweis des Satzes 1.5.3 abgeschrieben werden. Lediglich die Definition der Abbildungen T_1 und T_2 sollte bei festem $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ erfolgen, wie beim Beweis von Satz 2.5.2. Diese Abbildungen sind dann wegen (2.69) und (1.70) gleichmäßige Kontraktionen mit Parameterraum $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$; die Stetigkeit der Abbildungen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 folgt leicht aus der Stetigkeit von $\mathcal{F}_1(\kappa_0, \cdot, \cdot)$ und $\mathcal{F}_2(\kappa_0, \cdot, \cdot)$, sowie der diskreten Topologie auf \mathbb{Z} . Desweiteren müssen einige τ 's durch κ 's ersetzt werden. \diamond

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll der in Korollar 2.5.4 erwähnte Begriff der *topologischen Äquivalenz diskreter dynamischer Prozesse* näher erläutert werden. Seien dazu

$$\begin{aligned} P(k, x, y) &:= (A(k)x + F(k, x, y), B(k)y + G(k, x, y)) \quad \text{bzw.} \\ Q(k, x, y) &:= (A(k)x + F(k, x, s_0(k, x)), B(k)y + G(k, r_0(k, y), y)) \end{aligned}$$

die rechten Seiten der Prozesse (2.68) bzw. (2.70). Gemäß Satz 2.5.4(a) wird eine Lösung von (2.68) mittels \mathcal{F}_1 auf eine Lösung von (2.70) abgebildet, d.h. für beliebige $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{X}$ und $y \in \mathcal{Y}$ gilt:

$$Q(k, \mathcal{F}_1(k, x, y)) = \mathcal{F}_1(k+1, P(k, x, y)). \quad (2.71)$$

Diese Beziehung nimmt für autonome Prozesse eine besonders interessante Form an: In diesem Fall sind nämlich die Abbildungen P, Q, \mathcal{F}_1 von k unabhängig und \mathcal{F}_1 ist ein Homöomorphismus auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Die Beziehung (2.71) impliziert dann für beliebige $x \in \mathcal{X}$ und $y \in \mathcal{Y}$

$$Q(\mathcal{F}_1(x, y)) = \mathcal{F}_1(P(x, y)),$$

und schließlich

$$Q\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1P \quad \Leftrightarrow \quad Q = \mathcal{F}_1P\mathcal{F}_1^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad P = \mathcal{F}_1^{-1}Q\mathcal{F}_1. \quad (2.72)$$

Die Abbildungen P und Q sind demnach *topologisch konjugiert*.

2.6 Das Reduktionsprinzip

In den letzten beiden Abschnitten verursachte die parallele Behandlung nicht notwendigerweise invertierbarer bzw. invertierbarer diskreter dynamischer Prozesse doch einen beträchtlichen Mehraufwand. Die Entschädigung für diesen Mehraufwand wird in diesem Abschnitt geliefert: das Reduktionsprinzip kann für Differenzgleichungen mit nicht notwendigerweise invertierbarer rechter Seite angegeben werden.

Satz 2.6.1 (Reduktionsprinzip) *Gegeben sei der diskrete dynamische Prozeß*

$$\begin{cases} x' = A(k)x + F(k, x, y) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y) \end{cases} \quad (2.73)$$

mit Banachräumen \mathcal{X}, \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}), B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y}), F : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, G : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit $F(k, 0, 0) \equiv 0, G(k, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{Z} . Ferner gelte:

(H1) Die Übergangsabbildung Φ des linearen Prozesses $x' = A(k)x$ und die erweiterte Übergangsabbildung Ψ von $y' = B(k)y$ erfüllen für $m, n \in \mathbb{Z}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(m, n)\| &\leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n, \\ \|\Psi(m, n)\| &\leq K\beta^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $0 < \alpha < \beta \leq 1$.

(H2) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(k, x, y) - F(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(k, x, y) - G(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit $0 \leq L < C(K, \alpha, \beta)$. (Vergleiche (2.66).)

Mit $\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2} < 1$ erfüllt dann (2.73) die Voraussetzungen von Satz 2.3.1; r_0 sei die zum R_0 -Faserbündel gehörige Abbildung. Neben (2.73) betrachtet man den reduzierten Prozeß

$$y' = B(k)y + G(k, r_0(k, y), y) \quad (2.74)$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\mathcal{R} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, so daß für beliebiges $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt:

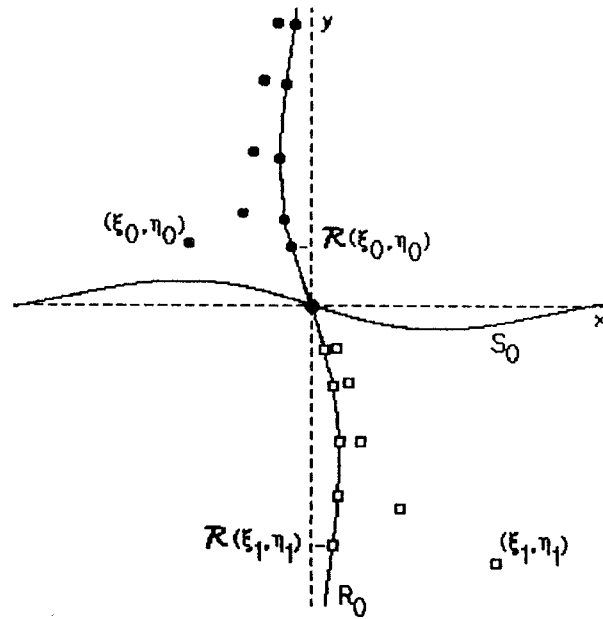


Abbildung 2.7: Das diskrete Reduktionsprinzip

Bezeichnet $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) : \mathbb{Z}_{\kappa_0} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ die Lösung von (2.73) mit $\lambda(\kappa_0) = (\xi_0, \eta_0)$ und $\mu : \mathbb{Z}_{\kappa_0} \rightarrow \mathcal{Y}$ die Lösung von (2.74) mit $\mu(\kappa_0) = \mathcal{R}(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$, so sind für alle $k \in \mathbb{Z}_{\kappa_0}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(k) - r_0(k, \mu(k))\| &\leq \left(K + \frac{4K^3L^2}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \right) \|\xi_0 - r_0(\kappa_0, \mathcal{R}(\kappa_0, \xi_0, \eta_0))\| \gamma^{\kappa - \kappa_0} \\ \|\lambda_2(k) - \mu(k)\| &\leq \frac{2K^2L(\beta - \alpha - 2KL)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha - 4KL)} \|\xi_0 - r_0(\kappa_0, \mathcal{R}(\kappa_0, \xi_0, \eta_0))\| \gamma^{\kappa - \kappa_0} \end{aligned}$$

erfüllt. Es existiert demnach eine eindeutig bestimmte Lösung auf dem R_0 -Faserbündel von (2.73), der sich λ für $k \rightarrow \infty$ exponentiell annähert, nämlich $(r_0(\cdot, \mu(\cdot)), \mu(\cdot))$.

Damit ist die triviale Lösung von (2.73) genau dann stabil (instabil, asymptotisch stabil), wenn die triviale Lösung von (2.74) stabil (instabil, asymptotisch stabil) ist.

Die Abbildung \mathcal{R} ist stetig und es gilt ferner: Ist die rechte Seite von (2.73) periodisch in k mit Periode $\Theta \in \mathbb{N}$, so ist auch \mathcal{R} periodisch in k mit Periode Θ . Speziell für diskrete dynamische Systeme ist also \mathcal{R} unabhängig von k .

Bemerkung: Für endlichdimensionale, diskrete dynamische Systeme ist (H1) erfüllt, falls die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\sigma_{\max}^b(A) < 1 \quad \text{und} \quad \sigma_{\min}^b(B) \geq 1,$$

d.h. wenn die Eigenwerte von A im Inneren, die Eigenwerte von B auf dem Rand oder im Äußeren des Einheitskreises liegen. Die Aussagen des Satzes für diskrete dynamische Systeme sind in Abbildung 2.7 veranschaulicht.

Beweis: Der diskrete dynamische Prozeß (2.73) erfüllt die Voraussetzungen der Sätze 2.3.1 und 2.5.2; $\mathcal{F} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ sei die Abbildung aus Satz 2.5.2. Definiert man $\mathcal{R}(\kappa_0, \xi_0, \eta_0) :=$

$\mathcal{F}(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ und bezeichnet μ die Lösung von (2.74) mit $\mu(\kappa_0) = \mathcal{R}(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$, so impliziert Satz 2.5.2 unmittelbar, daß $(r_0(\cdot, \mu(\cdot)), \mu(\cdot))$ die eindeutig bestimmte Lösung von (2.73) ist, die im R_0 -Faserbündel verläuft und für die gilt:

$$\lambda(\cdot) - (r_0(\cdot, \mu(\cdot)), \mu(\cdot)) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt.}$$

Diese Funktion ist also eine γ^+ -quasibeschränkte Lösung der Differenzgleichung der gestörten Bewegung zu λ von (2.73). Wendet man jetzt Satz 2.3.1 (a), (iii) auf diese Differenzgleichung der gestörten Bewegung an, erhält man unmittelbar die oben behaupteten Abschätzungen.

Die Aussagen zur Periodizität von \mathcal{R} sind direkte Konsequenzen aus Satz 2.5.2 (c). \diamond

Nichtinvertierbare, zweidimensionale autonome Beispiele zum Reduktionsprinzip lassen sich an zwei Stellen innerhalb dieser Arbeit finden:

- Das lineare Beispiel (2.57) auf Seite 93 und
- das nichtlineare Beispiel (2.105) auf Seite 114.

In beiden Beispielen ist die y -Achse die invariante R_0 -Mannigfaltigkeit im Phasenraum und die Abbildung \mathcal{R} ist durch $\mathcal{R}(\xi_0, \eta_0) := \eta_0$ definiert.

Abschließend noch eine Bemerkung zum reduzierten Prozeß (2.74). Die verschärfte Bedingung an L impliziert bekanntlich die Abschätzung (1.70), woraus mit (H2) und Satz 2.3.1 (b), (ii) für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$ die Ungleichung

$$\|G(k, r_0(k, y), y) - G(k, r_0(k, \bar{y}), \bar{y})\| \leq 2L\|y - \bar{y}\|$$

folgt. Beachtet man ferner, daß wegen $L < \mathcal{C}(k, \alpha, \beta) < \frac{\beta - \alpha}{4K} < \frac{\beta}{2K}$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ die Abschätzung $2L\|B(k)^{-1}\| \leq \frac{2KL}{\beta} < 1$ erfüllt ist, so impliziert Korollar A.2.3:

Die rechte Seite von (2.74) ist für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ ein Homöomorphismus auf \mathcal{Y} .

Auch für einen nichtinvertierbaren Ausgangsprozeß (2.73) erhält man also einen invertierbaren reduzierten Prozeß. In den oben genannten Beispielen lauten diese reduzierten Prozesse $y' = y$ bzw. $y' = 2y$.

2.7 Die Sätze von Hartman-Grobman

Das Ende des zweiten Kapitels bilden die Beweise der Sätze von Hartman-Grobman. Im Gegensatz zum Reduktionsprinzip ist es nun aber nicht möglich, diskrete dynamische Prozesse mit nicht notwendigerweise invertierbarer rechter Seite zu behandeln: Auf Seite 114 wird ein diskretes dynamisches System im \mathbb{R}^2 vorgestellt, das zwar allen Voraussetzungen des klassischen Satzes von Hartman-Grobman — mit Ausnahme der Invertierbarkeit — genügt, das jedoch nicht entkoppelt, geschweige denn linearisiert werden kann. Für invertierbare diskrete dynamische Prozesse erhält man Ergebnisse wie im kontinuierlichen Fall.

2.7.1 Vorbereitende Ergebnisse

Zunächst müssen die Lemmata 1.7.1 und 1.7.2 auf den diskreten Fall übertragen werden. Bereits bei dieser Übertragung verursachen nichtinvertierbare Prozesse einige Probleme. Sei dazu das diskrete dynamische System

$$\boxed{x' = Ax + f(x)} \tag{2.75}$$

gegeben, mit einem Banachraum \mathcal{X} , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ und einer stetigen Abbildung $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ mit $f(0) = 0$. Ein Analogon zu Lemma 1.7.2 sollte, unter gewissen Voraussetzungen an die Übergangsabbildung von $x' = Ax$ und die Abbildung f , einen Homöomorphismus \mathcal{H} auf \mathcal{X} mit $\mathcal{H}(0) = 0$ liefern, der Lösungen von (2.75) auf Lösungen von $x' = Ax$ abbildet. Die Bemerkung von Seite 104 zur topologischen Äquivalenz diskreter dynamischer Systeme ergibt dann

$$Ax + f(x) = \mathcal{H}^{-1}(A\mathcal{H}(x)) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X}. \quad (2.76)$$

Formuliert man nun die Forderungen an die Übergangsabbildung von $x' = Ax$ in Anlehnung an Lemma 1.7.2, so erkennt man sofort, daß die Nullabbildung $A = 0$ diesen Forderungen stets genügt — und Einsetzen in (2.76) impliziert $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{X}$. Mit anderen Worten: (2.75) ist genau dann dem linearen Prozeß $x' = Ax = 0$ topologisch äquivalent, wenn $f = 0$ erfüllt ist.

Dieses Beispiel zeigt, daß diskrete dynamische Prozesse mit nichtinvertierbarer rechter Seite vermutlich selbst dann nicht linearisiert werden können, wenn sie Voraussetzungen wie in Lemma 1.7.2 erfüllen. Fordert man jedoch von der rechten Seite Invertierbarkeit, so erhält man ohne große Mühe exakte Analoga zum kontinuierlichen Fall. Zunächst soll Lemma 1.7.1 auf den diskreten Fall übertragen werden.

Lemma 2.7.1 *Gegeben seien die diskreten dynamischen Prozesse*

$$\boxed{x' = A(k)x + f_1(k, x)} \quad (2.77)$$

und

$$\boxed{x' = A(k)x + f_2(k, x)} \quad (2.78)$$

mit einem Banachraum \mathcal{X} , stetigen Abbildungen $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ und $f_1, f_2 : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Φ sei die Übergangsabbildung des linearen Prozesses $x' = A(k)x$. Ferner gelte für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$, $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$:

$$\|\Phi(m, n)\| \leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für } m \geq n, \quad (2.79)$$

$$\|f_1(k, x)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|f_1(k, x) - f_1(k, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|, \quad (2.80)$$

$$\|f_2(k, x)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|f_2(k, x) - f_2(k, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|, \quad (2.81)$$

mit Konstanten $K \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $M \geq 0$ und $0 \leq L < \frac{1-\alpha}{K}$. Die rechten Seiten der Prozesse (2.77) und (2.78) seien für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ Homöomorphismen auf \mathcal{X} , mithin existieren die erweiterten allgemeinen Lösungen $\lambda^{(1)}(k; \kappa, \xi)$ bzw. $\lambda^{(2)}(k; \kappa, \xi)$ von (2.77) bzw. (2.78) und sind stetig.

Ferner existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\mathcal{L} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß für beliebige $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ und $\xi_0 \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \kappa_0, \mathcal{L}(\kappa_0, \xi_0)) - \lambda^{(1)}(\cdot; \kappa_0, \xi_0) \quad \text{ist beschränkt.} \quad (2.82)$$

Darüberhinaus besitzt \mathcal{L} die folgenden Eigenschaften:

(a) \mathcal{L} ist stetig.

(b) Für beliebige $\kappa \in \mathbb{Z}$ und $\xi \in \mathcal{X}$ gilt

$$\|\mathcal{L}(\kappa, \xi) - \xi\| \leq \frac{2KM}{1 - \alpha - KL} \quad (2.83)$$

(c) Ist μ eine Lösung von (2.77), so ist $\mathcal{L}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (2.78).

(d) Sind A , f_1 und f_2 periodisch in k mit Periode $\Theta \in \mathbb{N}$, so auch \mathcal{L} .

Beweis: Sei $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ beliebig, aber fest. Wie im Beweis von Lemma 1.7.1 wird nun der vom Parameter $\xi_0 \in \mathcal{X}$ abhängige Prozeß

$$x' = A(k)x + f_2(k, x + \lambda^{(1)}(k; \kappa_0, \xi_0)) - f_1(k, \lambda^{(1)}(k; \kappa_0, \xi_0)) \quad (2.84)$$

betrachtet. Man überzeugt sich leicht, daß auch die rechte Seite von (2.84) für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ ein Homöomorphismus auf \mathcal{X} ist, daß also die erweiterte allgemeine Lösung $\lambda_{\kappa_0}^{(3)}(k; \kappa, \xi, \xi_0)$ existiert, und daß diese erweiterte allgemeine Lösung von allen Argumenten — inklusive Parameter ξ_0 — stetig abhängt. (κ_0 ist fest, zählt also nicht als Parameter.) Wie im Beweis von Lemma 1.7.1 zeigt man ferner, daß (2.84) wegen (2.79), (2.80) und (2.81) die Voraussetzungen von Lemma 2.2.2 erfüllt. Es existiert demnach eine eindeutig bestimmte Abbildung $b_{\kappa_0} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß für beliebige $\kappa \in \mathbb{Z}$ und $\xi_0 \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\lambda_{\kappa_0}^{(3)}(\cdot; \kappa, b_{\kappa_0}(\kappa, \xi_0), \xi_0) \text{ ist beschränkt.} \quad (2.85)$$

Darüberhinaus ist b_{κ_0} stetig und (2.22) liefert:

$$\|b_{\kappa_0}(\kappa, \xi_0)\| \leq \frac{2KM}{1 - \alpha - KL} \quad \text{für beliebige } \kappa \in \mathbb{Z}, \xi_0 \in \mathcal{X}. \quad (2.86)$$

Nun ist eine Funktion $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ genau dann Lösung von (2.84), wenn $\nu(\cdot) + \lambda^{(1)}(\cdot; \kappa_0, \xi_0)$ Lösung von (2.78) ist. Die zu (2.82) gehörige Aussage des Lemmas ist damit der folgenden Aussage äquivalent:

Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\mathcal{B} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, so daß für alle $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ und $\xi_0 \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\lambda_{\kappa_0}^{(3)}(\cdot; \kappa_0, \mathcal{B}(\kappa_0, \xi_0), \xi_0) \text{ ist beschränkt.} \quad (2.87)$$

Zwischen \mathcal{L} und \mathcal{B} besteht dann die folgende Beziehung:

$$\mathcal{L}(\kappa, \xi) = \xi + \mathcal{B}(\kappa, \xi) \quad \text{für beliebige } \kappa \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathcal{X}. \quad (2.88)$$

Setzt man jetzt $\mathcal{B}(\kappa_0, \xi_0) := b_{\kappa_0}(\kappa_0, \xi_0)$, so folgt (2.87) unmittelbar aus (2.85), und durch (2.88) wird die eindeutig bestimmte Abbildung \mathcal{L} definiert, die der Bedingung (2.82) genügt. Auch die restlichen Aussagen des Lemmas erhält man nun leicht:

(a) Die Stetigkeit von \mathcal{L} folgt aus der Stetigkeit von $b_{\kappa_0}(\kappa_0, \cdot)$, der diskreten Topologie auf \mathbb{Z} und den Definitionen von \mathcal{B} und \mathcal{L} .

(b) Die Abschätzung (2.83) folgt aus (2.86), (2.88) und der Definition von \mathcal{B} .

(c), (d) Die Beweise dieser letzten beiden Aussagen des Lemmas können fast wortwörtlich vom Beweis des Lemmas 1.7.1 übernommen werden. \diamond

Im kontinuierlichen Fall genügte Lemma 1.7.1 bereits, um das Linearisierungsergebnis 1.7.2 zu beweisen — der Beweis verwendete jedoch einmal mehr die Zeitumkehr. Da diese Beweistechnik im diskreten Fall nicht zur Verfügung steht, ist noch das folgende Lemma nötig.

Lemma 2.7.2 *Gegeben seien die diskreten dynamischen Prozesse*

$$\boxed{y' = B(k)y + g_1(k, y)} \quad (2.89)$$

und

$$\boxed{y' = B(k)y + g_2(k, y)} \quad (2.90)$$

mit einem Banachraum \mathcal{Y} , stetigen Abbildungen $B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$ und $g_1, g_2 : \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Ψ sei die erweiterte Übergangsabbildung des linearen Prozesses $y' = B(k)y$. Ferner gelte für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$, $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned} \|\Psi(m, n)\| &\leq K\beta^{m-n} \quad \text{für } m \leq n, \\ \|g_1(k, y)\| &\leq M \quad \text{und} \quad \|g_1(k, y) - g_1(k, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\|, \\ \|g_2(k, y)\| &\leq M \quad \text{und} \quad \|g_2(k, y) - g_2(k, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\|, \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$, $\beta > 1$, $M \geq 0$ und $0 \leq L < \frac{\beta-1}{K}$. Die rechten Seiten der Prozesse (2.89) und (2.90) sind dann für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ Homöomorphismen auf \mathcal{Y} , mithin existieren die erweiterten allgemeinen Lösungen $\lambda^{(1)}(k; \kappa, \eta)$ bzw. $\lambda^{(2)}(k; \kappa, \eta)$ von (2.89) bzw. (2.90) und sind stetig.

Ferner existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\mathcal{L} : \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, so daß für beliebige $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ und $\eta_0 \in \mathcal{Y}$ gilt:

$$\lambda^{(2)}(\cdot; \kappa_0, \mathcal{L}(\kappa_0, \eta_0)) - \lambda^{(1)}(\cdot; \kappa_0, \eta_0) \quad \text{ist beschränkt.}$$

Darüberhinaus besitzt \mathcal{L} die folgenden Eigenschaften:

- (a) \mathcal{L} ist stetig.
- (b) Für beliebige $\kappa \in \mathbb{Z}$ und $\eta \in \mathcal{Y}$ gilt

$$\|\mathcal{L}(\kappa, \eta) - \eta\| \leq \frac{2KM}{\beta - 1 - KL}$$

- (c) Ist μ eine Lösung von (2.89), so ist $\mathcal{L}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (2.90).
- (d) Sind B , g_1 und g_2 periodisch in k mit Periode $\Theta \in \mathbb{N}$, so auch \mathcal{L} .

Beweis: Der Beweis kann völlig analog zum Beweis von Lemma 2.7.1 unter Verwendung von Lemma 2.2.4 durchgeführt werden. Der einzige Unterschied ist, daß die Invertierbarkeit der rechten Seiten von (2.89) bzw. (2.90) bereits von den Voraussetzungen und Korollar A.2.3 impliziert wird. (Vergleiche etwa Lemma 2.2.5, Anfang des Beweises.) \diamond

Mit diesem Lemma sind nun aber alle Hilfsmittel bereitgestellt, um Lemma 1.7.2 für diskrete dynamische Prozesse zu beweisen.

Lemma 2.7.3 Für beliebige $K \geq 1$, $0 < \alpha < 1 < \beta$ und $M \geq 0$ gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Gegeben sei der diskrete dynamische Prozeß

$$\boxed{x' = A(k)x + f(k, x)} \quad (2.91)$$

und der zugehörige lineare Prozeß

$$\boxed{x' = A(k)x} \quad (2.92)$$

mit einem Banachraum \mathcal{X} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{X})$ und $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Φ sei die erweiterte Übergangsabbildung von (2.92); die rechte Seite von (2.91) sei für

beliebiges $k \in \mathcal{X}$ ein Homöomorphismus auf \mathcal{X} . Ferner gelte für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$, $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$:

$$\|\Phi(m, n)\| \leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für } m \geq n,$$

$$\|f(k, x)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|f(k, x) - f(k, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|,$$

mit $0 \leq L < \frac{1-\alpha}{K}$. Dann existieren stetige Abbildungen $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Ist μ eine Lösung von (2.91), so ist $\mathcal{H}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (2.92).
- (ii) Ist ν eine Lösung von (2.92), so ist $\tilde{\mathcal{H}}(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (2.91).
- (iii) Für beliebiges $\kappa \in \mathbb{Z}$ sind die Abbildungen $\mathcal{H}(\kappa, \cdot)$ und $\tilde{\mathcal{H}}(\kappa, \cdot)$ einander invers, mithin Homöomorphismen auf \mathcal{X} .
- (iv) Sind A und f periodisch in k mit Periode $\Theta \in \mathbb{N}$, so auch \mathcal{H} und $\tilde{\mathcal{H}}$.

Die diskreten dynamischen Prozesse (2.91) und (2.92) sind also topologisch äquivalent.

(b) Gegeben sei der diskrete dynamische Prozeß

$$\boxed{y' = B(k)y + g(k, y)} \quad (2.93)$$

und der zugehörige lineare Prozeß

$$\boxed{y' = B(k)y} \quad (2.94)$$

mit einem Banachraum \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Ψ sei die erweiterte Übergangsabbildung von (2.94). Ferner gelte für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$, $y, \bar{y} \in \mathcal{Y}$:

$$\|\Psi(m, n)\| \leq K\beta^{m-n} \quad \text{für } m \leq n,$$

$$\|g(k, y)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|g(k, y) - g(k, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\|,$$

mit $0 \leq L < \frac{\beta-1}{K}$. Dann existieren stetige Abbildungen $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}} : \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Ist μ eine Lösung von (2.93), so ist $\mathcal{H}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (2.94).
- (ii) Ist ν eine Lösung von (2.94), so ist $\tilde{\mathcal{H}}(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (2.93).
- (iii) Für beliebiges $\kappa \in \mathbb{Z}$ sind die Abbildungen $\mathcal{H}(\kappa, \cdot)$ und $\tilde{\mathcal{H}}(\kappa, \cdot)$ einander invers, mithin Homöomorphismen auf \mathcal{Y} .
- (iv) Sind B und g periodisch in k mit Periode $\Theta \in \mathbb{N}$, so auch \mathcal{H} und $\tilde{\mathcal{H}}$.

Die diskreten dynamischen Prozesse (2.93) und (2.94) sind also topologisch äquivalent.

Beweis: Der Beweis dieses Lemmas kann ohne große Änderungen vom Beweis des Lemmas 1.7.2 übernommen werden: (a) wird durch dreimalige Anwendung von Lemma 2.7.1, (b) durch dreimalige Anwendung von Lemma 2.7.2 bewiesen. Man beachte, daß wegen der Anwendung von Lemma 2.7.1 mit $f_1(k, x) := f(k, x)$ und $f_2(k, x) := 0$ der lineare Operator $A(k)$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ ein stetiger Isomorphismus sein muß; deshalb wurde in (a) auch " $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{X})$ " gefordert. \diamond

Bemerkung: Analog zu den kontinuierlichen dynamischen Prozessen impliziert die Gültigkeit von $f(k, 0) = 0$ und $g(k, 0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ auch im obigen Lemma 2.7.3, daß

$$\mathcal{H}(k, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{H}}(k, 0) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

erfüllt ist.

Mit Lemma 2.7.3 und Satz 2.5.4 werden auf den verbleibenden Seiten des zweiten Kapitels nun der klassische und der verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman für diskrete dynamische Prozesse bewiesen.

2.7.2 Der klassische Satz von Hartman-Grobman

Zunächst zum klassischen Satz von Hartman-Grobman. Autonome Versionen dieses Satzes gibt es seit geraumer Zeit: man vergleiche dazu etwa HARTMAN [12, pp. 245ff], IRWIN [15, p. 114] oder PUGH [26]. Der nichtautonome Fall wurde bereits in HILGER [13] behandelt.

Im folgenden wird der klassische Satz von Hartman-Grobman für diskrete dynamische Prozesse mit invertierbarer rechter Seite formuliert und bewiesen. Eine Rechtfertigung dieser Einschränkung wird im Anschluß an den Beweis gegeben.

Satz 2.7.4 (Klassischer Satz von Hartman-Grobman) *Gegeben sei der diskrete dynamische Prozeß*

$$\begin{array}{l} x' = A(k)x + F(k, x, y) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y) \end{array} \quad (2.95)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} und \mathcal{Y} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$, $F : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit $F(k, 0, 0) \equiv 0$, $G(k, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{Z} . Ferner gelte:

(H1) Die erweiterten Übergangsabbildungen Φ bzw. Ψ der linearen Prozesse $x' = A(k)x$ bzw. $y' = B(k)y$ erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(m, n)\| &\leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n, \\ \|\Psi(m, n)\| &\leq K\beta^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n \end{aligned}$$

mit Konstanten $K \geq 1$, $0 < \alpha < 1$ und $\beta := 2 - \alpha > 1$.

(H2) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(k, x, y) - F(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \\ \|G(k, x, y) - G(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

mit

$$0 \leq L < \frac{1 - \alpha}{2K^2} (2 + K - \sqrt{4 + K^2}) = C(K, \alpha, 2 - \alpha). \quad (2.96)$$

(Vergleiche (2.69).)

(H3) Für alle $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{X}$ und $y \in \mathcal{Y}$ gilt

$$\|F(k, x, y)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|G(k, x, y)\| \leq M$$

mit einer Konstanten $M \geq 0$.

(H4) Für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ ist die rechte Seite von (2.95) ein Homöomorphismus auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
Damit existiert die erweiterte allgemeine Lösung von (2.95) gemäß (2.4) und ist stetig.

Neben (2.95) wird der lineare Prozeß

$$\begin{cases} x' = A(k)x \\ y' = B(k)y \end{cases} \quad (2.97)$$

betrachtet. Dann existieren stetige Abbildungen $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ mit $\mathcal{H}(\kappa, 0, 0) \equiv \tilde{\mathcal{H}}(\kappa, 0, 0) \equiv (0, 0)$ auf \mathbb{Z} , sowie folgenden Eigenschaften:

- (a) Ist μ eine Lösung von (2.95), so ist $\mathcal{H}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (2.97).
- (b) Ist ν eine Lösung von (2.97), so ist $\tilde{\mathcal{H}}(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (2.95).
- (c) Für beliebiges $\kappa \in \mathbb{Z}$ sind die Abbildungen $\mathcal{H}(\kappa, \cdot)$ und $\tilde{\mathcal{H}}(\kappa, \cdot)$ einander invers, mithin Homöomorphismen auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
- (d) Sind A, B, F und G periodisch in k mit Periode $\Theta \in \mathbb{N}$, so auch \mathcal{H} und $\tilde{\mathcal{H}}$.

Die diskreten dynamischen Prozesse (2.95) und (2.97) sind also topologisch äquivalent.

Bemerkung: Bei einem endlichdimensionalen diskreten dynamischen Prozeß der Form

$$\begin{cases} x' = Ax + F(x, y) \\ y' = By + G(x, y) \end{cases} \quad (2.98)$$

mit $A \in \mathbb{K}^{M \times M}$, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $F : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^M$, $G : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$, ist die Bedingung (H1) an die Übergangsabbildungen erfüllt, wenn alle Eigenwerte von A im Innern, und alle Eigenwerte von B im Äußern des Einheitskreises liegen. Genügt (2.98) auch noch den restlichen Voraussetzungen von Satz 2.7.4, so ist (2.98) dem linearen System

$$\begin{cases} x' = Ax \\ y' = By \end{cases} \quad (2.99)$$

topologisch äquivalent: Es existiert ein Homöomorphismus $\mathcal{H} : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N$ mit $\mathcal{H}(0, 0) = (0, 0)$, der Lösungen von (2.98) auf Lösungen von (2.99) abbildet. Kürzt man die rechten Seiten dieser Systeme durch

$$P(x, y) := (Ax + F(x, y), By + G(x, y)) \quad , \quad Q(x, y) := (Ax, By)$$

ab, erhält man unter Beachtung von (2.72) ferner:

$$Q\mathcal{H} = \mathcal{H}P \quad \text{oder} \quad P = \mathcal{H}^{-1}Q\mathcal{H} . \quad (2.100)$$

Die Abbildungen P und Q sind somit topologisch konjugiert.

Beweis: Der Prozeß (2.95) erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.5.4, ist also dem Prozeß

$$\begin{cases} x' = A(k)x + F(k, x, s_0(k, x)) \\ y' = B(k)y + G(k, r_0(k, y), y) \end{cases} \quad (2.101)$$

topologisch äquivalent. Die Abbildung \mathcal{F}_1 aus Satz 2.5.4(a) bildet Lösungen von (2.95) auf Lösungen von (2.101) ab, und $\mathcal{F}_1(\kappa, \cdot)$ ist für beliebiges $\kappa \in \mathbb{Z}$ ein Homöomorphismus auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ mit $\mathcal{F}_1(\kappa, 0, 0) = (0, 0)$.

Nun betrachtet man den diskreten dynamischen Prozeß

$$x' = A(k)x + F(k, x, s_0(k, x)). \quad (2.102)$$

Für beliebiges festes $k \in \mathbb{Z}$ ist die rechte Seite dieses Prozesses ein Homöomorphismus auf \mathcal{X} : Definiert man nämlich $P(k, x, y) := (A(k)x + F(k, x, y), B(k)y + G(k, x, y))$, so bildet $P(k, \cdot, \cdot)$ wegen Satz 2.3.1(a) und (H4) die Menge $S_{0,k} := \{(k, x, s_0(k, x)) : x \in \mathcal{X}\}$ homöomorph auf die Menge $S_{0,k+1} := \{(k+1, x, s_0(k+1, x)) : x \in \mathcal{X}\}$ ab, weswegen sich die rechte Seite von (2.102) als Hintereinanderausführung dreier Homöomorphismen darstellen läßt:

- Zunächst wird $x \in \mathcal{X}$ auf $(x, s_0(k, x))$ abgebildet. Die stetige Umkehrabbildung ist die Einschränkung der Projektion $\pi : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, definiert durch $\pi(x, y) := x$, auf $S_{0,k}$.
- Der Punkt $(x, s_0(k, x))$ wird sodann mittels $P(k, \cdot, \cdot)$ homöomorph nach $S_{0,k+1}$ abgebildet,
- und von dort mittels der Einschränkung von π auf $S_{0,k+1}$ auf den gewünschten Bildpunkt $A(k)x + F(k, x, s_0(k, x))$; die stetige Umkehrabbildung dieser letzten Teilabbildung ist durch $x \mapsto (x, s_0(k+1, x))$ gegeben.

Ferner gilt für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ und $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$ wegen (2.96), (2.69) und (1.70):

$$\begin{aligned} \|F(k, x, s_0(k, x)) - F(k, \bar{x}, s_0(k, \bar{x}))\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|s_0(k, x) - s_0(k, \bar{x})\| \leq \\ &\leq L\|x - \bar{x}\| + L \frac{2K^2L(2 - 2\alpha - 2KL)}{(2 - 2\alpha)(2 - 2\alpha - 4KL)} \|x - \bar{x}\| < \\ &< 2L\|x - \bar{x}\|. \end{aligned}$$

Beachtet man schließlich, daß wegen (2.96) die Ungleichungskette

$$0 \leq L < C(K, \alpha, 2 - \alpha) < \frac{(2 - \alpha) - \alpha}{4K} = \frac{1 - \alpha}{2K} < \frac{1 - \alpha}{K}$$

erfüllt ist, so genügt (2.102) den Voraussetzungen von Lemma 2.7.3(a). Damit existiert eine stetige Abbildung $\mathcal{L}_1 : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, die Lösungen von (2.102) auf Lösungen von $x' = A(k)x$ abbildet, mit $\mathcal{L}_1(k, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{Z} . Völlig analog erhält man eine stetige Abbildung $\mathcal{L}_2 : \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ mit $\mathcal{L}_2(k, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{Z} , die Lösungen von

$$y' = B(k)y + G(k, r_0(k, y), y)$$

auf Lösungen von $y' = B(k)y$ abbildet. Ferner ist für beliebige $\kappa \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $\mathcal{L}_1(\kappa, \cdot)$ ein Homöomorphismus auf \mathcal{X} , und $\mathcal{L}_2(\kappa, \cdot)$ ein Homöomorphismus auf \mathcal{Y} .

Die Definition

$$\mathcal{H}(\kappa, \xi, \eta) := (\mathcal{L}_1(\kappa, \mathcal{F}_{11}(\kappa, \xi, \eta)), \mathcal{L}_2(\kappa, \mathcal{F}_{12}(\kappa, \xi, \eta)))$$

liefert nun wie im kontinuierlichen Fall die Aussagen von Satz 2.7.4. ◇

Die Voraussetzung “ $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{X})$ ” ging in dem obigen Beweis des klassischen Satzes von Hartman-Grobman nur an einer Stelle ein — bei der Linearisierung des Teilprozesses (2.102). Ohne diese Voraussetzung garantiert der Beweis von Satz 2.7.4 demnach noch das folgende Ergebnis:

Korollar 2.7.5 Gegeben sei wieder der diskrete dynamische Prozeß

$$\begin{cases} x' = A(k)x + F(k, x, y) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y) \end{cases} \quad (2.103)$$

der den Voraussetzungen von Satz 2.7.4 genüge. Die auf \mathbb{Z} definierte Abbildung A darf nun jedoch Werte in $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ annehmen. Betrachtet man noch den entkoppelten, teilweise linearen Prozeß

$$\begin{cases} x' = A(k)x + F(k, x, s_0(k, x)) \\ y' = B(k)y \end{cases} \quad (2.104)$$

so gilt: Es existieren stetige Abbildungen $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ mit $\mathcal{H}(\kappa, 0, 0) \equiv \tilde{\mathcal{H}}(\kappa, 0, 0) \equiv (0, 0)$ auf \mathbb{Z} , die die Eigenschaften (c) und (d) aus Satz 2.7.4 aufweisen, sowie ferner:

- (a) Ist μ eine Lösung von (2.103), so ist $\mathcal{H}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (2.104).
- (b) Ist ν eine Lösung von (2.104), so ist $\tilde{\mathcal{H}}(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (2.103).

Die diskreten dynamischen Prozesse (2.103) und (2.104) sind also topologisch äquivalent.

Was geschieht nun aber, wenn die rechte Seite der diskreten dynamischen Prozesse (2.95) bzw. (2.103) in Satz 2.7.4 bzw. Korollar 2.7.5 nicht invertierbar ist? Ist diese Voraussetzung nicht viel zu restriktiv? Zur Beantwortung dieser Fragen soll im folgenden das ebene diskrete dynamische System

$$\begin{cases} x' = \frac{2c}{\pi} \arctan x \sin y \\ y' = 2y \end{cases} \quad (2.105)$$

untersucht werden, das auf ein Beispiel von AULBACH [6] zurückgeht. Man überzeugt sich leicht, daß (2.105) für hinreichend kleines $c > 0$ allen Voraussetzungen von Satz 2.7.4 bzw. Korollar 2.7.5 genügt — mit Ausnahme der Invertierbarkeitsvoraussetzungen. (Dazu setzt man etwa $A := 0$, $B := 2$, $F(x, y) := \frac{2c}{\pi} \arctan x \sin y$, $G(x, y) := 0$, $K := 1$, $\alpha := \frac{1}{2}$, $L := c$.)

Kürzt man die rechte Seite von (2.105) durch $P(x, y) := (\frac{2c}{\pi} \arctan x \sin y, 2y)$ ab, so läßt sich die Wirkung der Abbildung $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ folgendermaßen beschreiben (vergleiche Abbildung 2.8):

- Für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ werden alle Punkte der horizontalen Geraden $\{(x, k\pi) : x \in \mathbb{R}\}$ auf den Punkt $(0, 2k\pi)$ abgebildet.
- Für beliebiges $y \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ wird die Gerade $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}\}$ homöomorph auf die Strecke $\{(x, 2y) : -c|\sin y| < x < c|\sin y|\}$ abgebildet.

Angenommen, (2.105) könnte wie in Korollar 2.7.5 entkoppelt und teilweise linearisiert werden. Dann gäbe es eine Abbildung $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß (2.105) dem System

$$\begin{cases} x' = s(x) \\ y' = 2y \end{cases} \quad (2.106)$$

topologisch äquivalent wäre. Die Beziehungen (2.72) und (2.100) garantieren damit eine Bijektion $\mathcal{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$QH = \mathcal{H}P,$$

wobei Q durch $Q(x, y) := (s(x), 2y)$ definiert ist. Das folgende Lemma zeigt, daß eine derartige Bijektion nicht existieren kann.

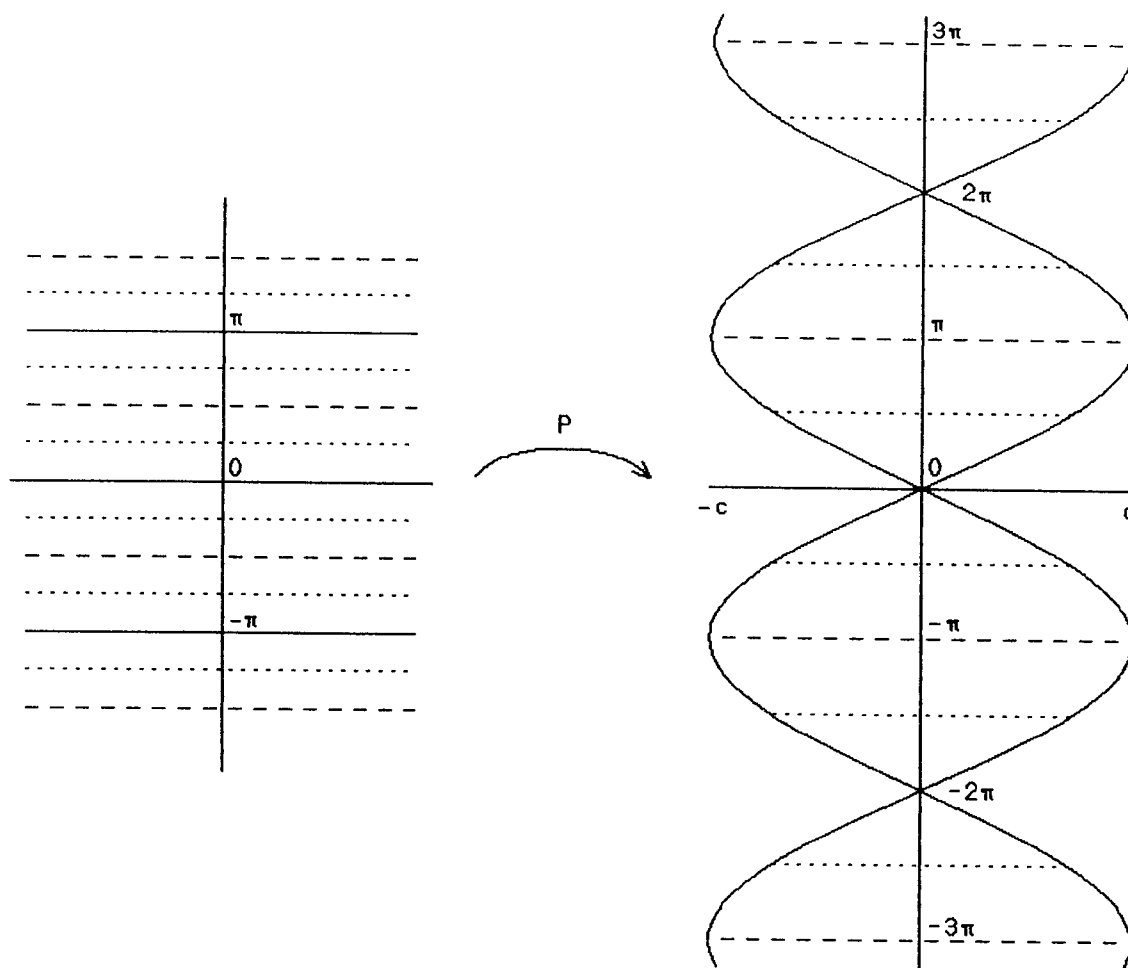


Abbildung 2.8: Ein Gegenbeispiel zum Satz von Hartman-Grobman

Lemma 2.7.6 Gegeben sei eine Abbildung $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Konstante $c > 0$. Definiert man zwei Abbildungen $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} P(x, y) &:= \left(\frac{2c}{\pi} \arctan x \sin y, 2y \right), \\ Q(x, y) &:= (s(x), 2y), \end{aligned}$$

so existiert keine Bijektion $\mathcal{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $Q\mathcal{H} = \mathcal{H}P$.

Beweis: Angenommen, es gäbe doch eine derartige Bijektion. Sei $M_P \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Punkte, die mindestens zwei Urbilder unter P besitzen, $M_Q \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Punkte mit mindestens zwei Urbildern unter Q . Die oben beschriebene Wirkung von P impliziert dann unmittelbar:

$$M_P = \{(0, 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.107)$$

Ferner gilt:

$$(x, y) \in M_P \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}(x, y) \in M_Q. \quad (2.108)$$

Zum Beweis dieser Aussage sei zunächst $(x, y) \in M_P$. Es existieren also zwei verschiedene Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) = P(x_1, y_1) = P(x_2, y_2)$. Dann gilt aber $\mathcal{H}(x, y) =$

$\mathcal{H}P(x_1, y_1) = \mathcal{H}P(x_2, y_2)$ und wegen $Q\mathcal{H} = \mathcal{H}P$ schließlich $\mathcal{H}(x, y) = Q\mathcal{H}(x_1, y_1) = Q\mathcal{H}(x_2, y_2)$; die Bijektivität von \mathcal{H} impliziert sofort $\mathcal{H}(x_1, y_1) \neq \mathcal{H}(x_2, y_2)$, und damit $\mathcal{H}(x, y) \in M_Q$. Analog zeigt man die andere Richtung von (2.108).

Damit kann der abschließende Widerspruch hergeleitet werden: Wegen (2.108) ist die Einschränkung $\mathcal{H}|_{M_P} : M_P \rightarrow M_Q$ ebenfalls eine Bijektion, d.h. wegen (2.107) ist M_Q abzählbar unendlich, insbesondere nicht leer. Sei nun $(x, y) \in M_Q$ beliebig. Dann existieren zwei Punkte $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ mit $(x, y) = Q(x_1, y_1) = (s(x_1), 2y_1) = Q(x_2, y_2) = (s(x_2), 2y_2)$, woraus $s(x_1) = s(x_2)$ und $x_1 \neq x_2$ (wegen $y_1 = y_2$) folgt. Für beliebiges $y \in \mathbb{R}$ erhält man nun aber

$$Q(x_1, y) = (s(x_1), 2y) = (s(x_2), 2y) = Q(x_2, y) \quad , \quad x_1 \neq x_2 \quad ,$$

und damit $(s(x_1), 2y) \in M_Q$ für beliebige $y \in \mathbb{R}$, im Widerspruch zur oben bewiesenen Abzählbarkeit von M_Q . \diamond

Dieses Lemma zeigt, daß es — wie die Abbildung $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auch definiert sein mag — keinen Homöomorphismus $\mathcal{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ geben kann, der die Lösungen des diskreten dynamischen Systems (2.105) auf Lösungen von (2.106) abbildet, d.h. (2.105) und (2.106) sind nicht topologisch äquivalent.

Das obige Beispiel (2.105) kann also nicht entkoppelt und teilweise linearisiert, geschweige denn ganz linearisiert werden. Somit sind die Aussagen von Satz 2.7.4 und Korollar 2.7.5 für diesen Prozeß mit nichtinvertierbarer rechter Seite falsch — und die Invertierbarkeitsvoraussetzungen “gerechtfertigt.” (Auch die eingangs aufgeführten Arbeiten zum klassischen Satz von Hartman-Grobman fordern die Invertierbarkeit der rechten Seite. Erst vor wenigen Jahren versuchte QUANDT [27] das Ergebnis auf nichtinvertierbare diskrete dynamische Systeme auszuweiten.)

2.7.3 Der verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman

Zum Abschluß des zweiten Kapitels soll jetzt noch der verallgemeinerte Satz von Hartman-Grobman für diskrete dynamische Prozesse bewiesen werden. Weitere Beweise findet man in KIRCHGRABER, PALMER [19] (nur autonome Version) und HILGER [13].

Satz 2.7.7 (Verallgemeinerter Satz von Hartman-Grobman) *Gegeben sei der diskrete dynamische Prozeß*

$$\begin{array}{l} x' = A(k)x + F(k, x, y, z) \\ y' = B(k)y + G(k, x, y, z) \\ z' = C(k)z + H(k, x, y, z) \end{array} \quad (2.109)$$

mit Banachräumen \mathcal{X} , \mathcal{Y} und \mathcal{Z} , sowie stetigen Abbildungen $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{X})$, $B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Y})$, $C : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{Z})$, $F : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$, $G : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$, $H : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ mit $F(k, 0, 0, 0) \equiv 0$, $G(k, 0, 0, 0) \equiv 0$, $H(k, 0, 0, 0) \equiv 0$ auf \mathbb{Z} . Ferner gelte:

(H1) Die erweiterten Übergangsabbildungen Φ bzw. Ψ bzw. Ξ der linearen Prozesse $x' = A(k)x$ bzw. $y' = B(k)y$ bzw. $z' = C(k)z$ erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{array}{lll} \|\Phi(m, n)\| & \leq & K\alpha_1^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n \\ \|\Psi(m, n)\| & \leq & K\alpha_2^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n \\ \|\Psi(m, n)\| & \leq & K(2 - \alpha_2)^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n \\ \|\Xi(m, n)\| & \leq & K(2 - \alpha_1)^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n \end{array}$$

mit Konstanten $K \geq 1$ und $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

(H2) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $(x, y, z), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(k, x, y, z) - F(k, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| + L\|z - \bar{z}\| \\ \|G(k, x, y, z) - G(k, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| + L\|z - \bar{z}\| \\ \|H(k, x, y, z) - H(k, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\| + L\|z - \bar{z}\| \end{aligned}$$

mit

$$0 \leq L < \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{16K^2} (1 + K - \sqrt{1 + K^2}).$$

(H3) Für alle $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ und $z \in \mathcal{Z}$ gilt

$$\|F(k, x, y, z)\| \leq M \quad \text{und} \quad \|H(k, x, y, z)\| \leq M$$

mit einer Konstanten $M \geq 0$.

(H4) Für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ ist die rechte Seite von (2.109) ein Homöomorphismus auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$.

Dann existieren stetige Abbildungen $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}} : \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $(c_1, c_2) : \mathbb{Z} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ mit $\mathcal{V}(\kappa, 0, 0, 0) \equiv \tilde{\mathcal{V}}(\kappa, 0, 0, 0) \equiv (0, 0, 0)$ und $(c_1, c_2)(\kappa, 0) \equiv (0, 0)$ auf \mathbb{Z} , sowie folgenden Eigenschaften:

(a) Für beliebige $\kappa \in \mathbb{Z}$ und $\eta \in \mathcal{Y}$ ist die Lösung μ von (2.109) mit $\mu(\kappa) = (c_1(\kappa, \eta), \eta, c_2(\kappa, \eta))$ die eindeutig bestimmte Lösung von (2.109) mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\mu_2(\kappa) = \eta$.
- (ii) μ ist $(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2})^-$ -quasibeschränkt.
- (iii) μ ist $(2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2})^+$ -quasibeschränkt.

Darüberhinaus ist (c_1, c_2) stetig und eine Periodizität der rechten Seite von (2.109) in k überträgt sich auf (c_1, c_2) .

(b) Der gegebene Prozeß (2.109) ist dem Prozeß

$$\begin{array}{l} x' = A(k)x \\ y' = B(k)y + G(k, c_1(k, y), y, c_2(k, y)) \\ z' = C(k)z \end{array} \quad (2.110)$$

topologisch äquivalent und es gilt:

- (i) Ist μ eine Lösung von (2.109), so ist $\mathcal{V}(\cdot, \mu(\cdot))$ eine Lösung von (2.110).
- (ii) Ist ν eine Lösung von (2.110), so ist $\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \nu(\cdot))$ eine Lösung von (2.109).
- (iii) Für beliebiges $\kappa \in \mathbb{Z}$ sind die Abbildungen $\mathcal{V}(\kappa, \cdot)$ und $\tilde{\mathcal{V}}(\kappa, \cdot)$ einander invers, mithin Homöomorphismen auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$.
- (iv) Sind A, B, C, F, G und H periodisch in k mit Periode Θ , so auch \mathcal{V} und $\tilde{\mathcal{V}}$.

Bemerkung: Für ein endlichdimensionales, diskretes dynamisches System der Form

$$\begin{array}{l} x' = Ax + F(x, y, z) \\ y' = By + G(x, y, z) \\ z' = Cz + H(x, y, z) \end{array} \quad (2.111)$$

mit $A \in \mathbb{K}^{M \times M}$, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $C \in \mathbb{K}^{P \times P}$, $F : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^P \rightarrow \mathbb{K}^M$, $G : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^P \rightarrow \mathbb{K}^N$, $H : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^P \rightarrow \mathbb{K}^P$, ist die Bedingung (H1) an die Übergangsabbildungen erfüllt, wenn für die Eigenwerte von A, B und C gilt:

- Die Eigenwerte von A liegen im Inneren,
- die Eigenwerte von B auf dem Rand und
- die Eigenwerte von C im Äußeren des Einheitskreises.

Genügt (2.111) auch noch den restlichen Voraussetzungen von Satz 2.7.7, ist es somit dem linearen dynamischen System

$$\begin{array}{l} x' = Ax \\ y' = By + G(c_1(y), y, c_2(y)) \\ z' = Cz \end{array} \quad (2.112)$$

topologisch äquivalent: Es existiert ein Homöomorphismus $\mathcal{V} : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^P \rightarrow \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^P$ mit $\mathcal{V}(0, 0, 0) \equiv (0, 0, 0)$ auf \mathbb{R} , der Lösungen von (2.111) auf Lösungen von (2.112) abbildet. Die rechten Seiten von (2.111) und (2.112) sind wieder topologisch konjugiert und die Menge $\{(c_1(y), y, c_2(y)) : y \in \mathbb{K}^N\}$ ist eine globale *Zentrumsmannigfaltigkeit* für das diskrete dynamische System (2.111).

Beweis: Der Beweis kann fast wortwörtlich vom Beweis des Satzes 1.7.4 abgeschrieben werden. Man beachte auch den Beweis von Satz 2.7.4. \diamond

Anhang A

Hilfsmittel aus Analysis und Funktionalanalysis

Im folgenden werden einige Begriffe und Ergebnisse aus der Analysis und der nichtlinearen Funktionalanalysis zusammengestellt. Die Sätze sind dabei meist nicht in vollster Allgemeinheit angegeben, sondern gemäß ihrer Verwendung im Rahmen dieser Arbeit.

A.1 Differential- und Integralrechnung in Banachräumen

Die aus der Analysis bekannte Differential- und Integralrechnung reeller Funktionen läßt sich ohne Schwierigkeiten auf Funktionen $x : I \rightarrow \mathcal{X}$ übertragen, wenn $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und \mathcal{X} ein beliebiger Banachraum ist. Die in dieser Arbeit benötigten Ergebnisse sollen in diesem Abschnitt zusammengestellt werden. Sie sind den drei Büchern DIEUDONNÉ [8, pp. 142–170], LJUSTERNIK, SOBOLEW [22, pp. 287–299] und ZEIDLER [30, pp. 75–78] entnommen; dort können auch die Beweise der Aussagen nachgelesen werden.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und \mathcal{X} ein beliebiger (reeller oder komplexer) Banachraum. Eine Abbildung $x : I \rightarrow \mathcal{X}$ heißt dann *differenzierbar im Punkt* $t \in I$, wenn der Grenzwert

$$\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(x(t+h) - x(t)) \in \mathcal{X}$$

existiert. Ist t ein Endpunkt des Intervalls I , so ist der entsprechende einseitige Grenzwert zu bilden. Die Abbildung x heißt *differenzierbar*, wenn x in jedem Punkt $t \in I$ differenzierbar ist. Die Abbildung $\dot{x} : I \rightarrow \mathcal{X}$ nennt man dann *Ableitung von* x . Wie in der gewöhnlichen Analysis ist eine Abbildung, die in einem Punkt differenzierbar ist, an dieser Stelle auch stetig. Ferner gilt:

- Sind die Abbildungen $x, y : I \rightarrow \mathcal{X}$ differenzierbar im Punkt $t \in I$, so sind auch die Abbildungen $x + y$ und λx , wobei λ ein beliebiger Skalar ist, im Punkt t differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = \dot{x}(t) + \dot{y}(t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(\lambda x(t)) = \lambda \dot{x}(t).$$

- Ist die Abbildung $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ differenzierbar in t , so sind für jedes $\xi \in \mathcal{X}$ und $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ auch die Abbildungen $A(\cdot)\xi : I \rightarrow \mathcal{Y}$ und $A(\cdot)\Xi : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ differenzierbar im Punkt t und es gilt:

$$\frac{d}{dt}(A(t)\xi) = \dot{A}(t)\xi,$$

$$\frac{d}{dt}(A(t)\Xi) = \dot{A}(t)\Xi.$$

- *Mittelwertsatz der Differentialrechnung:* Sei $x : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ eine differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$\|x(b) - x(a)\| \leq (b - a) \cdot \sup\{\|\dot{x}(t)\| : t \in (a, b)\}$$

und

$$\|x(b) - x(a) - (b - a)\dot{x}(t_0)\| \leq (b - a) \cdot \sup\{\|\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0)\| : t \in (a, b)\},$$

mit beliebigem $t_0 \in [a, b]$, sofern die angegebenen Suprema existieren.

Als nächstes soll der Begriff des Integrals eingeführt werden. Da in dieser Arbeit nur über stetige Abbildungen integriert wird, ist die folgende einfache Definition möglich:

Sei $x : I \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Abbildung. Eine Abbildung $X : I \rightarrow \mathcal{X}$ heißt *Stammfunktion von x* , wenn X differenzierbar ist und $\dot{X}(t) = x(t)$ für alle $t \in I$ erfüllt. Wie in der gewöhnlichen Analysis läßt sich zeigen, daß jede stetige Abbildung eine Stammfunktion besitzt, und daß sich zwei verschiedene Stammfunktionen einer gegebenen Abbildung nur um eine Konstante unterscheiden (vergleiche etwa DIEUDONNÉ [8, p. 159]). Für beliebige $a, b \in I$ definiert man nun das *Integral über x von a bis b* durch

$$\int_a^b x(t)dt := X(b) - X(a) \in \mathcal{X},$$

wobei X eine beliebige Stammfunktion von x ist. Offensichtlich ist der Wert des Integrals von der gewählten Stammfunktion unabhängig. Ferner gelten die folgenden Aussagen:

- Sind $x, y : I \rightarrow \mathcal{X}$ stetige Abbildungen, so gilt für beliebige $a, b, c \in I$ und jeden Skalar λ :

$$\begin{aligned} \int_a^b (x(t) + y(t))dt &= \int_a^b x(t)dt + \int_a^b y(t)dt, \\ \int_a^b (\lambda x(t))dt &= \lambda \int_a^b x(t)dt, \\ \int_a^b x(t)dt &= \int_a^c x(t)dt + \int_c^b x(t)dt, \\ \left\| \int_a^b x(t)dt \right\| &\leq \int_a^b \|x(t)\|dt. \end{aligned}$$

- Ist $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ und $x : I \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Abbildung, so gilt für beliebige $a, b \in I$:

$$\int_a^b Ax(t)dt = A \int_a^b x(t)dt.$$

- Sei $x : I \times I \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Abbildung. Für beliebiges $s \in I$ sei die Abbildung $x(\cdot, s) : I \rightarrow \mathcal{X}$ differenzierbar mit Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}x(\cdot, s) : I \rightarrow \mathcal{X}$ und die so entstehende Abbildung $\frac{\partial}{\partial t}x(\cdot, \cdot) : I \times I \rightarrow \mathcal{X}$ sei stetig. Für beliebiges $a \in I$ ist dann die durch

$$y(t) = \int_a^t x(t, s)ds$$

definierte Abbildung $y : I \rightarrow \mathcal{X}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\dot{y}(t) = x(t, t) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}x(t, s)ds. \quad (\text{A.1})$$

Schließlich soll noch der Begriff des uneigentlichen Integrals definiert werden. Sei dazu wieder $x : I \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Abbildung. Das Intervall I sei nach links unbeschränkt. Existiert dann für ein $a \in I$ der Grenzwert

$$\int_{-\infty}^a x(t) dt := \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \int_{\tau}^a x(t) dt ,$$

so nennt man ihn das *uneigentliche Integral von x auf $(-\infty, a]$* . In diesem Fall existiert das uneigentliche Integral von x auch auf $(-\infty, b]$ für beliebiges $b \in I$ und man nennt x *uneigentlich integrierbar auf I* . Bezüglich der Existenz uneigentlicher Integrale ist das folgende Ergebnis äußerst nützlich:

- Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nach links unbeschränktes Intervall und $x : I \rightarrow \mathcal{X}$ stetig. Existiert dann für ein $a \in I$ eine auf $(-\infty, a]$ uneigentlich integrierbare reelle Funktion $m : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\|x(t)\| \leq m(t) \quad \text{für alle } t \in (-\infty, a] ,$$

so ist auch x auf $(-\infty, a]$ uneigentlich integrierbar und es gilt

$$\left\| \int_{-\infty}^a x(t) dt \right\| \leq \int_{-\infty}^a m(t) dt .$$

Uneigentliche Integrale spielen bei der Konstruktion quasibeschränkter Lösungen linearer Differentialgleichungen eine zentrale Rolle. In diesem Zusammenhang werden die folgenden Lemmata benötigt.

Lemma A.1.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nach links unbeschränktes Intervall der Form $(-\infty, \tau]$, $\tau \in \mathbb{R}$, \mathcal{X}, \mathcal{P} seien Banachräume und $x : I \times I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Abbildung. Darüberhinaus gelte*

$$\|x(t, s, p)\| \leq c(t)m(s) \quad \text{für alle } s \leq t, \quad t, s \in I, p \in \mathcal{P} , \quad (\text{A.2})$$

mit stetigen Abbildungen $c, m : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und m sei uneigentlich integrierbar auf I . Dann ist die durch

$$y(t, p) := \int_{-\infty}^t x(t, s, p) ds$$

definierte Abbildung $y : I \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig.

Beweis: Wegen (A.2) und der vorausgesetzten Integrierbarkeit von m existiert das uneigentliche Integral in der Definition von y für beliebige $t \in I$ und $p \in \mathcal{P}$.

Seien nun $t_0 \in I$, $p_0 \in \mathcal{P}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Definiert man $K := I \cap \overline{B_1(t_0)}$, so ist K offensichtlich kompakt. Wegen der Stetigkeit von x existiert also ein $\delta_1 > 0$, so daß für alle $t \in I$ mit $|t - t_0| < \delta_1$ gilt:

$$|t - t_0| \max\{\|x(\tau, \sigma, p_0)\| : \tau, \sigma \in K\} < \frac{\varepsilon}{4} . \quad (\text{A.3})$$

Ferner existiert gemäß Lemma A.2.6 ein $\delta_2 > 0$ mit

$$\|x(t, s, p) - x(t, s, p_0)\| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } t, s \in K, p \in B_{\delta_2}(p_0) . \quad (\text{A.4})$$

Die Voraussetzung (A.2) impliziert für beliebige $s < t_0$, $s \notin K$, $t \in K$ und $p \in \mathcal{P}$ die Abschätzung

$$\|x(t, s, p) - x(t_0, s, p_0)\| \leq c(t)m(s) + c(t_0)m(s) \leq 2 \max\{c(\tau) : \tau \in K\} \cdot m(s) ,$$

d.h. wegen der uneigentlichen Integrierbarkeit von m existiert ein $\tau_0 < t_0$ mit

$$\int_{-\infty}^{\tau_0} \|x(t, s, p) - x(t_0, s, p_0)\| ds < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } t \in K, p \in \mathcal{P}. \quad (\text{A.5})$$

Abschließend liefert die nochmalige Anwendung von Lemma A.2.6 ein $\delta_3 > 0$ mit

$$\|x(t, s, p) - x(t_0, s, p_0)\| < \frac{\varepsilon}{4(t_0 - \tau_0)} \quad \text{für alle } s \in [\tau_0, t_0], \quad (\text{A.6})$$

sofern $|t - t_0| + \|p - p_0\| < \delta_3$. Setzt man nun $\delta := \min\{1, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, so gilt für alle $(t, p) \in I \times \mathcal{P}$ mit $|t - t_0| + \|p - p_0\| < \delta$ zunächst $t \in K$; (A.3), (A.4) implizieren die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t \|x(t, s, p)\| ds \right| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|x(t, s, p) - x(t, s, p_0)\| ds \right| + \left| \int_{t_0}^t \|x(t, s, p_0)\| ds \right| < \\ &< |t - t_0| \cdot \frac{\varepsilon}{4} + |t - t_0| \cdot \max\{\|x(\tau, \sigma, p_0)\| : \tau, \sigma \in K\} < \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

(A.5) und (A.6) ergeben

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_0} \|x(t, s, p) - x(t_0, s, p_0)\| ds &= \int_{-\infty}^{\tau_0} \|x(t, s, p) - x(t_0, s, p_0)\| ds + \\ &\quad + \int_{\tau_0}^{t_0} \|x(t, s, p) - x(t_0, s, p_0)\| ds < \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + (t_0 - \tau_0) \frac{\varepsilon}{4(t_0 - \tau_0)} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

woraus insgesamt die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned} \|y(t, p) - y(t_0, p_0)\| &= \left\| \int_{-\infty}^t x(t, s, p) ds - \int_{-\infty}^{t_0} x(t_0, s, p_0) ds \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|x(t, s, p)\| ds \right| + \int_{-\infty}^{t_0} \|x(t, s, p) - x(t_0, s, p_0)\| ds < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

folgt. Damit ist das Lemma bewiesen. \diamond

Die Differenzierbarkeit ist Gegenstand des nächsten Lemmas.

Lemma A.1.2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nach links unbeschränktes Intervall der Form $(-\infty, \tau]$, $\tau \in \mathbb{R}$, \mathcal{X} ein Banachraum und $x : I \times I \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Abbildung. Ferner seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (a) Für beliebiges $t \in I$ ist $x(t, \cdot)$ uneigentlich integrierbar auf I .
- (b) Für beliebiges $s \in I$ ist $x(\cdot, s)$ differenzierbar mit Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} x(\cdot, s)$.
- (c) Die Abbildung $\frac{\partial}{\partial t} x(\cdot, \cdot) : I \times I \rightarrow \mathcal{X}$ ist stetig.
- (d) Es existieren stetige Abbildungen $c, m : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} x(t, s) \right\| \leq c(t)m(s) \quad \text{für alle } s \leq t, \quad t, s \in I,$$

und m sei uneigentlich integrierbar auf I .

Dann ist die durch

$$y(t) := \int_{-\infty}^t x(t, s) ds$$

definierte Abbildung $y : I \rightarrow \mathcal{X}$ differenzierbar mit Ableitung

$$\dot{y}(t) = x(t, t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} x(t, s) ds .$$

Beweis: Sei $t_0 \in I$ beliebig. Es soll gezeigt werden, daß y in t_0 differenzierbar ist, mit der oben angegebenen Ableitung. Definiere dazu $K := I \cap \overline{B_1}(t_0)$. Dann ist K offensichtlich kompakt. Ferner sei $b < t_0$ eine beliebige, aber feste, reelle Zahl mit $b \notin K$. Wegen

$$y(t) = \int_{-\infty}^b x(t, s) ds + \int_b^t x(t, s) ds$$

und

$$\frac{d}{dt} \int_b^t x(t, s) ds = x(t, t) + \int_b^t \frac{\partial}{\partial t} x(t, s) ds$$

genügt es offensichtlich die Gültigkeit von

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^b x(t, s) ds \Big|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^b \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s) ds \quad (\text{A.7})$$

nachzuweisen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Setzt man $M := \max\{c(t) : t \in K\}$, so gilt für beliebige $t \in K$ und $s \leq b$ die Ungleichung

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} x(t, s) \right\| \leq M m(s) .$$

Da m uneigentlich integrierbar auf I ist, existiert ein $a < b$ mit

$$\int_{-\infty}^a 2M m(s) ds < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

woraus mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für beliebige $s \leq a < b$ und beliebiges h mit $0 < |h| < 1$ und $t_0 + h \in I$ sofort die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|} \|x(t_0 + h, s) - x(t_0, s) - h \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s)\| &\leq \sup\{\|\frac{\partial}{\partial t} x(t, s) - \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s)\| : t \in K\} \leq \\ &\leq 2M m(s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{h} \int_{-\infty}^a x(t_0 + h, s) ds - \frac{1}{h} \int_{-\infty}^a x(t_0, s) ds - \int_{-\infty}^a \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s) ds \right\| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^a \frac{1}{|h|} \|x(t_0 + h, s) - x(t_0, s) - h \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s)\| ds \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^a 2M m(s) ds < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

folgen. Ferner ist $\frac{\partial}{\partial t} x$ gleichmäßig stetig auf $K \times [a, b]$, d.h. es existiert ein positives $\delta < 1$ mit

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} x(t_0 + h, s) - \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s) \right\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

für beliebige $s \in [a, b]$ und beliebige h mit $0 < |h| < \delta$, $t_0 + h \in I$, sowie

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|h|} \left| x(t_0 + h, s) - x(t_0, s) - h \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s) \right| \leq \\ & \leq \sup \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial t} x(t, s) - \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s) \right| : |t - t_0| < |h| < \delta, t \in K \right\} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} \int_a^b x(t_0 + h, s) ds - \frac{1}{h} \int_a^b x(t_0, s) ds - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s) ds \right| \leq \\ & \leq \int_a^b \frac{1}{|h|} \left| x(t_0 + h, s) - x(t_0, s) - h \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s) \right| ds \leq \\ & \leq (b-a) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also für beliebige h mit $0 < |h| < \delta$ und $t_0 + h \in I$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} \int_{-\infty}^b x(t_0 + h, s) ds - \frac{1}{h} \int_{-\infty}^b x(t_0, s) ds - \int_{-\infty}^b \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s) ds \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{h} \int_{-\infty}^a x(t_0 + h, s) ds - \frac{1}{h} \int_{-\infty}^a x(t_0, s) ds - \int_{-\infty}^a \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s) ds \right| + \\ & \quad + \left| \frac{1}{h} \int_a^b x(t_0 + h, s) ds - \frac{1}{h} \int_a^b x(t_0, s) ds - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} x(t_0, s) ds \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

womit (A.7) gezeigt wäre. Damit ist das Lemma bewiesen. \diamond

A.2 Der Banachsche Fixpunktsatz und verwandte Ergebnisse

Eine zentrale Frage der nichtlinearen Funktionalanalysis ist ohne Zweifel die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten gewisser Abbildungen. Das spiegelt sich auch in der vorliegenden Arbeit wieder — kaum ein Beweis kommt ohne den Begriff des Fixpunktes aus. Alle dabei zitierten Sätze haben ihren Ursprung im allgemein bekannten *Banachschen Fixpunktsatz*.

Satz A.2.1 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei \mathcal{X} ein Banachraum und $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Kontraktion, d.h. für beliebige $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ gelte

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq k \|x_1 - x_2\|,$$

mit einer Konstanten $0 \leq k < 1$. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt in \mathcal{X} , d.h. es existiert genau ein $x \in \mathcal{X}$ mit $Tx = x$.

Beweis: Siehe etwa LJUSTERNIK, SOBOLEW [22, pp. 26ff]. \diamond

Für Kontraktionen auf Banachräumen garantiert der Banachsche Fixpunktsatz also einen eindeutig bestimmten Fixpunkt. Häufig jedoch, wie etwa in dieser Arbeit, hängt die Kontraktion T auch noch stetig von einem Parameter p ab. Hängt dann der vom Banachschen Fixpunktsatz gelieferte Fixpunkt ebenfalls stetig von diesem Parameter ab? Eine positive Antwort gibt das folgende *gleichmäßige Kontraktionsprinzip*.

Satz A.2.2 (Gleichmäßiges Kontraktionsprinzip) Sei \mathcal{X} ein beliebiger Banachraum, \mathcal{P} ein metrischer Raum und $T : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ eine stetige Abbildung. Ist T eine gleichmäßige Kontraktion, d.h. gilt für beliebige $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$

$$\|T(x_1, p) - T(x_2, p)\| \leq k \|x_1 - x_2\|, \quad (\text{A.8})$$

mit einer Konstanten $0 \leq k < 1$, dann existiert zu jedem $p \in \mathcal{P}$ genau ein Fixpunkt $t(p) \in \mathcal{X}$ von $T(\cdot, p) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ und die Abbildung $t : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ ist stetig.

Beweis: Es ist nur die Stetigkeit von t nachzuweisen. Seien dazu $p, p_0 \in \mathcal{P}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|t(p) - t(p_0)\| &= \|T(t(p), p) - T(t(p_0), p_0)\| \leq \\ &\leq \|T(t(p), p) - T(t(p_0), p)\| + \|T(t(p_0), p) - T(t(p_0), p_0)\| \leq \\ &\leq k \|t(p) - t(p_0)\| + \|T(t(p_0), p) - T(t(p_0), p_0)\|, \end{aligned}$$

und damit

$$\|t(p) - t(p_0)\| \leq \frac{1}{1-k} \|T(t(p_0), p) - T(t(p_0), p_0)\|.$$

Wegen der Stetigkeit von T gilt $\|T(t(p_0), p) - T(t(p_0), p_0)\| \rightarrow 0$ für $p \rightarrow p_0$, d.h. man erhält $\|t(p) - t(p_0)\| \rightarrow 0$ für $p \rightarrow p_0$. Daraus folgt unmittelbar die Stetigkeit von t . \diamond

Eine Konsequenz des gleichmäßigen Kontraktionsprinzips ist das folgende Korollar über Störungen stetiger Isomorphismen, das im zweiten Kapitel mehrfach benötigt wird.

Korollar A.2.3 Seien \mathcal{X}, \mathcal{Y} und \mathcal{P} beliebige Banachräume, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ein stetiger Isomorphismus und $S : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ eine stetige Abbildung mit

$$\|S(x_1, p) - S(x_2, p)\| \leq k \|x_1 - x_2\|$$

für beliebige $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $p \in \mathcal{P}$. Erfüllt dann die Konstante $k \geq 0$ die Ungleichung $k \|L^{-1}\| < 1$, so ist für jedes $p \in \mathcal{P}$ die durch $N(x, p) := Lx + S(x, p)$ definierte Abbildung $N(\cdot, p) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bijektiv mit Umkehrabbildung $N^{-1}(\cdot, p) : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, und $N^{-1} : \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ ist stetig.

Beweis: Nach dem Satz von der offenen Abbildung (vergleiche etwa YOSIDA [29, pp. 75ff]) ist mit L auch L^{-1} stetig. Definiert man für beliebige $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ und $p \in \mathcal{P}$

$$T(x, y, p) := L^{-1}y - L^{-1}S(x, p),$$

so ist die Abbildung $T : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig. Ferner ist für beliebige $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, $p \in \mathcal{P}$ die Abschätzung

$$\|T(x_1, y, p) - T(x_2, y, p)\| = \|L^{-1}(S(x_1, p) - S(x_2, p))\| \leq k \|L^{-1}\| \cdot \|x_1 - x_2\|$$

erfüllt, d.h. wegen $k \|L^{-1}\| < 1$ ist T eine gleichmäßige Kontraktion. Für beliebiges $y \in \mathcal{Y}$, $p \in \mathcal{P}$ existiert deshalb mit Satz A.2.2 genau ein Fixpunkt $t(y, p) \in \mathcal{X}$ von $T(\cdot, y, p)$ und die Abbildung $t : \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ ist stetig. Wegen

$$x = t(y, p) \Leftrightarrow x = T(x, y, p) \Leftrightarrow x = L^{-1}y - L^{-1}S(x, p) \Leftrightarrow y = Lx + S(x, p)$$

ist t die versprochene stetige Umkehrabbildung. \diamond

Das gleichmäßige Kontraktionsprinzip wird in dieser Arbeit mehrmals erfolgreich angewandt. In gewissen Situationen ist es jedoch zu schwach, wie etwa beim Beweis der Existenz und Stetigkeit der allgemeinen Lösung einer parameterabhängigen Differentialgleichung im ersten Abschnitt des ersten Kapitels. Die dabei auftauchende Abbildung erfüllt zwar die Abschätzung (A.8), die Konstante k ist jedoch im allgemeinen nicht kleiner als 1 — und damit ist Satz A.2.2 nicht anwendbar. Daß die Abbildung dennoch einen eindeutig bestimmten Fixpunkt besitzt, ist eine Konsequenz des folgenden Satzes, der im wesentlichen dem Buch DALECKII, KREIN [7, pp. 52f] entstammt.

Zunächst muß aber noch eine Bezeichnung eingeführt werden. Ist $T : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Abbildung, so wird die n -te Iterierte $T^n : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ folgendermaßen rekursiv definiert:

$$T^n(x, p) := \begin{cases} T(x, p) & \text{für } n = 1 \\ T(T^{n-1}(x, p), p) & \text{für } n \geq 2 \end{cases} \quad \text{für } (x, p) \in \mathcal{X} \times \mathcal{P}. \quad (\text{A.9})$$

Man überzeugt sich leicht, daß für beliebiges $n \geq 2$ auch die Beziehung

$$T^n(T(x, p), p) = T^{n+1}(x, p)$$

erfüllt ist. Damit kann der angekündigte Satz formuliert und bewiesen werden.

Satz A.2.4 *Gegeben sei ein beliebiger Banachraum \mathcal{X} , ein metrischer Raum \mathcal{P} , sowie eine stetige Abbildung $T : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$. Ferner existiere eine Konstante $0 \leq k < 1$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für beliebige $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ die Abschätzung*

$$\|T^n(x_1, p) - T^n(x_2, p)\| \leq k \|x_1 - x_2\|$$

erfüllt ist. Dann gibt es zu jedem $p \in \mathcal{P}$ genau einen Fixpunkt $t(p)$ von $T(\cdot, p) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ und die Abbildung $t : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ ist stetig.

Beweis: Mit Induktion folgt aus der Stetigkeit von T leicht die Stetigkeit von T^n . Auf T^n ist also das gleichmäßige Kontraktionsprinzip anwendbar, d.h. zu jedem $p \in \mathcal{P}$ existiert genau ein Fixpunkt $t(p)$ von $T^n(\cdot, p)$, und die Abbildung t ist stetig.

Bleibt nur noch zu zeigen, daß $t(p)$ der eindeutig bestimmte Fixpunkt von $T(\cdot, p)$ ist. Zunächst erhält man mit der obigen Definition der Iterierten die Beziehung

$$T^n(T(t(p), p), p) = T^{n+1}(t(p), p) = T(T^n(t(p), p), p) = T(t(p), p),$$

da $t(p)$ Fixpunkt von $T^n(\cdot, p)$ ist. Also ist auch $T(t(p), p)$ ein Fixpunkt von $T^n(\cdot, p)$, und mit der Eindeutigkeit des Fixpunktes folgt

$$T(t(p), p) = t(p).$$

Somit ist $t(p)$ ein Fixpunkt von $T(\cdot, p)$. Sei nun abschließend x ein beliebiger Fixpunkt von $T(\cdot, p)$. Mit Induktion erhält man leicht $T^n(x, p) = x$, d.h. x ist auch Fixpunkt von $T^n(\cdot, p)$, und deshalb gilt $x = t(p)$. Damit ist alles gezeigt. \diamond

Die Stetigkeit der Abbildung $T : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ ist eine zentrale Voraussetzung in den Sätzen A.2.2 und A.2.4. Um den Nachweis dieser Stetigkeit in den Anwendungen möglichst einfach zu gestalten, wird in dieser Arbeit häufig das folgende Lemma verwendet.

Lemma A.2.5 *Seien \mathcal{X}, \mathcal{Y} beliebige Banachräume, \mathcal{P} ein metrischer Raum und $T : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ eine Abbildung, die den folgenden Bedingungen genügt:*

- (1) Es existiert eine Konstante $k \in \mathbb{R}_0^+$, so daß für beliebige $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ und $p \in \mathcal{P}$ die Abschätzung

$$\|T(x_1, p) - T(x_2, p)\| \leq k \|x_1 - x_2\|$$

erfüllt ist.

- (2) Für beliebiges $x \in \mathcal{X}$ ist die Abbildung $T(x, \cdot) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ stetig.

Dann ist die Abbildung T stetig.

Beweis: Seien $x_0 \in \mathcal{X}$ und $p_0 \in \mathcal{P}$ beliebig, aber fest. Dann folgt aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \|T(x, p) - T(x_0, p_0)\| &\leq \|T(x, p) - T(x_0, p)\| + \|T(x_0, p) - T(x_0, p_0)\| \leq \\ &\leq k \|x - x_0\| + \|T(x_0, p) - T(x_0, p_0)\| \end{aligned}$$

mit den Voraussetzungen (1) und (2) sofort:

$$T(x, p) \rightarrow T(x_0, p_0) \quad \text{für} \quad (x, p) \rightarrow (x_0, p_0).$$

T ist also stetig in $(x_0, p_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{P}$. Da dieser Punkt beliebig gewählt war, erhält man unmittelbar die Behauptung. \diamond

Schließlich wird im ersten Kapitel bei der Anwendung dieses Lemmas auf Integraloperatoren noch das folgende einfache Ergebnis benötigt.

Lemma A.2.6 Gegeben seien ein kompakter metrischer Raum K , Banachräume \mathcal{X} und \mathcal{Y} , eine offene Teilmenge $M \subset \mathcal{X}$, sowie eine stetige Abbildung $f : K \times M \rightarrow \mathcal{Y}$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in M$ ein $\delta > 0$, so daß

$$\|f(t, x) - f(t, x_0)\| < \varepsilon \quad \text{für beliebige} \quad x \in B_\delta(x_0) \quad \text{und} \quad t \in K$$

erfüllt ist.

Beweis: Angenommen, die Aussage des Lemmas ist falsch. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, ein $x_0 \in M$, und eine Folge $(t_n, x_n)_{n=1}^\infty \subset K \times M$ mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \|f(t_n, x_n) - f(t_n, x_0)\| \geq \varepsilon > 0$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von K ist die Folge $(t_n)_{n=1}^\infty$ o.B.d.A. konvergent mit Grenzwert $t_0 \in K$ (etwa durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge). Die Stetigkeit von f impliziert jedoch mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n, x_n) = f(t_0, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n, x_0),$$

d.h. im Widerspruch zu $\|f(t_n, x_n) - f(t_n, x_0)\| \geq \varepsilon > 0$, für beliebige $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t_n, x_n) - f(t_n, x_0)\| = 0.$$

Damit ist alles gezeigt. \diamond

A.3 Asymptotisches Verhalten von Matrixfunktionen

Im Hinblick auf die Anwendung der allgemeinen Ergebnisse dieser Arbeit auf autonome endlich-dimensionale Differential- und Differenzgleichungen werden Abschätzungen für die Übergangsmatrizen homogener linearer autonomer Systeme benötigt. Die Übergangsmatrix eines derartigen Differentialgleichungssystems ist die Matrixexponentialfunktion (eine sehr ausführliche Darstellung findet man in HIRSCH, SMALE [14, pp. 29–143]), die eines Differenzgleichungssystems eine Matrixpotenz. Diese beiden speziellen Matrixfunktionen werden im folgenden behandelt. Zunächst soll jedoch an ein Ergebnis aus der linearen Algebra erinnert werden:

Satz A.3.1 (Jordansche Normalform) Gegeben seien ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Dann existiert eine reguläre Matrix $R \in \mathbb{C}^{N \times N}$, so daß die Matrix $J = RMR^{-1}$ von der Form

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_n) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

ist, mit Matrizen

$$J_k = \lambda_k \text{id} + D = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_k & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_k \times N_k} \quad , \quad N_k \in \mathbb{N} \quad ,$$

und $D := (\delta_{i+1,j})_{i,j=1,\dots,N_k}$. Dabei ist λ_k ein Eigenwert von M und es gilt $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \sigma(M)$. Ist darüberhinaus ein Eigenwert $\lambda \in \sigma(M)$ halbeinfach, d.h. stimmen seine algebraische und geometrische Vielfachheit überein, so sind alle Jordanblöcke J_k mit $\lambda_k = \lambda$ eindimensional, d.h. $J_k = (\lambda_k) \in \mathbb{C}$.

Beweis: Siehe etwa GREUB [9, pp. 383–413]. ◇

Dieser Satz wird im folgenden mehrfach verwendet.

A.3.1 Die Matrixexponentialfunktion

Möchte man die allgemeine Lösung des homogenen linearen autonomen Systems

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \tag{A.10}$$

für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ beschreiben, so bedient man sich bekanntlich am besten der Übergangsmatrix $\Phi(t, s)$. Für $N = 1$ sieht man leicht, daß die Übergangsmatrix durch $\Phi(t, s) = e^{A(t-s)}$ gegeben ist. In Analogie zu diesem einfachen Spezialfall definiert man für eine beliebige $N \times N$ -Matrix A eine neue Matrix $e^A \in \mathbb{K}^{N \times N}$.

Sei dazu $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{K}^N ; die von dieser Norm induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{K}^{N \times N}$ wird ebenfalls mit $\|\cdot\|$ bezeichnet. Für beliebiges $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ erhält man dann aus

$$\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

und der Konvergenz der reellen Folge $(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \|A\|^k)_{n=0}^\infty$, daß die Folge $(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k)_{n=0}^\infty$ im Banachraum $\mathbb{K}^{N \times N}$ eine Cauchy-Folge, und damit konvergent ist. Ferner ist dieser Grenzwert von

der Norm $\|\cdot\|$ unabhängig, da in endlichdimensionalen Banachräumen alle Normen äquivalent sind (vergleiche etwa LJUSTERNIK, SOBOLEW [22, pp. 47f]). Bezeichnet man den Grenzwert mit

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

so ist die folgende Definition möglich:

Definition A.3.2 Die Funktion

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{K}^{N \times N} & \rightarrow \mathbb{K}^{N \times N} \\ A & \mapsto e^A \end{cases}$$

heißt Matrixexponentialfunktion.

Mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion kann man nun leicht die Übergangsmatrix von (A.10) angeben. Das erledigt der folgende Satz, der auch weitere Eigenschaften der Matrix e^A enthält, die insbesondere zur expliziten Berechnung der Matrixexponentialfunktion benötigt werden.

Satz A.3.3 Seien $N \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ beliebig. Dann gilt:

- (a) Die Übergangsmatrix des Systems (A.10) lautet $\Phi(t, s) = e^{A(t-s)}$.
- (b) Ist $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit $AB = BA$, so gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.
- (c) Ist $R \in \mathbb{K}^{N \times N}$ regulär, so gilt $e^A = R^{-1} e^{RAR^{-1}} R$.
- (d) Ist A von der Form $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ mit $A_k \in \mathbb{K}^{N_k \times N_k}$, so erhält man

$$e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_n}).$$

Beweis: Siehe AMANN [1, pp. 151ff] oder KNOBLOCH, KAPPEL [20, pp. 80ff]. ◇

Mit diesem Satz sind bereits alle Hilfsmittel bereitgestellt, um die in Kapitel 1 benötigten Abschätzungen für die Übergangsmatrix von (A.10) herzuleiten. Es zeigt sich, daß allein die Lage der Realteile der Eigenwerte von A die Quasibeschränktheit der Übergangsmatrix bestimmt.

Satz A.3.4 Seien $N \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ beliebig. Dann gilt für beliebige $t, s \in \mathbb{R}$:

- (a) Zu jedem $\beta > \sigma_{\max}^r(A)$ existiert ein $K = K(\beta) \geq 1$ mit

$$\|e^{A(t-s)}\| \leq K e^{\beta(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s.$$

Sind alle Eigenwerte von A mit Realteil $\sigma_{\max}^r(A)$ halbeinfach, so ist auch $\beta = \sigma_{\max}^r(A)$ wählbar.

- (b) Zu jedem $\alpha < \sigma_{\min}^r(A)$ existiert ein $K = K(\alpha) \geq 1$ mit

$$\|e^{A(t-s)}\| \leq K e^{\alpha(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s.$$

Sind alle Eigenwerte von A mit Realteil $\sigma_{\min}^r(A)$ halbeinfach, so ist auch $\alpha = \sigma_{\min}^r(A)$ wählbar.

Beweis: Es wird nur (a) bewiesen; die Gültigkeit von (b) erhält man völlig analog. Wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{K}^{N \times N}$ kann man sich auf den Spezialfall $\|\cdot\| = |\cdot|_1$ der Spaltensummennorm beschränken. Da darüberhinaus jede reelle Matrix als komplexe Matrix mit derselben Spaltensummennorm aufgefaßt werden kann, muß der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nicht eigens behandelt werden. Sei also im folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Der Beweis wird in drei Teile unterteilt.

(i) Sei zunächst $N \geq 2$ und $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ein Jordanblock, d.h. $A = \lambda \text{id} + D$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $D = (\delta_{i+1,j})_{i,j=1,\dots,N}$ (vergleiche Satz A.3.1). Wegen $(\lambda \text{id})D = D(\lambda \text{id})$ liefert Satz A.3.3(b) für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ die Beziehung $e^{A\tau} = e^{(\lambda \text{id})\tau} e^{D\tau}$. Satz A.3.3(d) impliziert ferner $e^{(\lambda \text{id})\tau} = e^{\lambda\tau} \text{id}$. Beachtet man schließlich, daß D nilpotent ist, so folgt mit Definition A.3.2 unmittelbar

$$e^{A\tau} = e^{\lambda\tau} \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} & \cdots & \frac{\tau^{N-1}}{(N-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\tau^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \tau \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$|e^{A\tau}|_1 = |e^{\lambda\tau}| \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|\tau|^k}{k!} = e^{\tau r} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|\tau|^k}{k!} \quad \text{mit } r = \text{Re}\lambda.$$

Für beliebiges $\beta > \sigma_{\max}^r(A) = r$ ist offensichtlich $r - \beta < 0$, d.h. man erhält

$$|e^{A\tau}|_1 e^{-\beta\tau} = e^{\tau(r-\beta)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|\tau|^k}{k!} \rightarrow 0 \quad \text{für } \tau \rightarrow \infty.$$

Also existiert $K := \sup\{|e^{A\tau}|_1 e^{-\beta\tau} : \tau \in \mathbb{R}_0^+\} \geq 1$ und für alle $\tau = t - s \geq 0$ gilt somit

$$|e^{A(t-s)}|_1 \leq K e^{\beta(t-s)}.$$

Die geforderte Abschätzung ist demnach erfüllt.

(ii) Sei nun $N = 1$ und $A = (\lambda) \in \mathbb{C}$ ein eindimensionaler Jordanblock. Dann erhält man unmittelbar $e^{A(t-s)} = e^{\lambda(t-s)}$, und damit $|e^{A(t-s)}|_1 = |e^{\lambda(t-s)}| = e^{r(t-s)}$, wobei $r = \text{Re}\lambda$ wieder der Realteil von λ sei. Für beliebiges $\beta \geq \sigma_{\max}^r(A) = r$ gilt also

$$|e^{A(t-s)}|_1 = e^{r(t-s)} \leq e^{\beta(t-s)} \quad \text{für } t \geq s,$$

und mit $K := 1$ folgt die Behauptung.

(iii) Sei nun $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ beliebig, $N \in \mathbb{N}$. Gemäß Satz A.3.1 existiert eine reguläre Matrix $R \in \mathbb{C}^{N \times N}$, so daß $J = RAR^{-1}$ von der Form

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_n) \quad \text{mit } J_k = \lambda_k \text{id} + D \in \mathbb{C}^{N_k \times N_k} \quad \text{und } \lambda_k \in \sigma(A)$$

ist. Gilt nun $\beta > \sigma_{\max}^r(A)$ — oder ist $\beta = \sigma_{\max}^r(A)$ und alle Eigenwerte mit Realteil $\sigma_{\max}^r(A)$ sind halbeinfach — so erhält man wegen (i), (ii) und Satz A.3.1 zu jedem $k = 1, \dots, n$ ein $K_k \geq 1$ mit

$$|e^{J_k\tau}|_1 \leq K_k e^{\beta\tau} \quad \text{für alle } \tau \geq 0.$$

Wegen der Definition der Spaltensummennorm und Satz A.3.3(c),(d) folgt daraus für beliebige $\tau \in \mathbb{R}_0^+$

$$\begin{aligned} |e^{A\tau}|_1 &\leq |R^{-1}|_1 |e^{J\tau}|_1 |R|_1 = \\ &= |R^{-1}|_1 |R|_1 |\text{diag}(e^{J_1\tau}, \dots, e^{J_n\tau})|_1 = \\ &= |R^{-1}|_1 |R|_1 \max\{|e^{J_k\tau}|_1 : k = 1, \dots, n\} \leq \\ &\leq |R^{-1}|_1 |R|_1 \max\{K_k : k = 1, \dots, n\} e^{\beta\tau}. \end{aligned}$$

Mit $K := |R^{-1}|_1 |R|_1 \max\{K_k : k = 1, \dots, n\} \geq 1$ und $\tau = t - s \geq 0$ folgt die Behauptung. \diamond

Satz A.3.4 ermöglicht beispielsweise die folgenden Aussagen über das Verhalten der allgemeinen Lösung $\lambda(t; \tau, \xi) = e^{A(t-\tau)}\xi$ von (A.10):

- Sind die Realteile aller Eigenwerte von A negativ, so konvergieren alle Lösungen von (A.10) für $t \rightarrow \infty$ gegen 0.
- Sind die Realteile aller Eigenwerte von A kleiner oder gleich 0 und die Eigenwerte mit Realteil 0 halbeinfach, so sind alle Lösungen von (A.10) für $t \rightarrow \infty$ beschränkt.

In beiden Fällen kann man leicht zeigen, daß auch die Umkehrung der Aussage richtig ist; vergleiche dazu AMANN [1, pp. 163ff].

A.3.2 Matrixpotenzen

Im Gegensatz zu den Differentialgleichungen kann die Übergangsmatrix einer homogenen linearen autonomen Differenzgleichung äußerst leicht angegeben werden. Betrachte dazu das System

$$\boxed{x' = Ax} \tag{A.11}$$

mit einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Die Übergangsmatrix $\Phi(m, n)$ von (A.11) lautet

$$\Phi(m, n) = A^{m-n} \quad \text{für } m \geq n.$$

Ist A regulär, so erhält man weiter

$$\Phi(m, n) = (A^{-1})^{n-m} = A^{m-n} \quad \text{für } m < n.$$

Analog zu Satz A.3.4 können nun die Abschätzungen für die Übergangsmatrix von (A.11) hergeleitet werden, die im zweiten Kapitel in nahezu allen Ergebnissen benötigt werden. Der folgende Satz zeigt, daß allein die Lage der Eigenwerte von A in der komplexen Zahlenebene die Quasi-beschränktheit der Übergangsmatrix bestimmt.

Satz A.3.5 Seien $N \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ beliebig. Dann gilt für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$:

- (a) Zu jedem $\beta > \sigma_{\max}^b(A)$ existiert ein $K = K(\beta) \geq 1$ mit

$$\|A^{m-n}\| \leq K\beta^{m-n} \quad \text{für alle } m \geq n.$$

Sind alle Eigenwerte von A mit Betrag $\sigma_{\max}^b(A)$ halbeinfach, so ist auch $\beta = \sigma_{\max}^b(A)$ wählbar.

(b) Ist A regulär, so existiert zu jedem $0 < \alpha < \sigma_{\min}^b(A)$ ein $K = K(\alpha) \geq 1$ mit

$$\|A^{m-n}\| \leq K\alpha^{m-n} \quad \text{für alle } m \leq n.$$

Sind alle Eigenwerte von A mit Betrag $\sigma_{\min}^b(A)$ halbeinfach, so ist auch $\alpha = \sigma_{\min}^b(A)$ wählbar.

Beweis: Es wird nur (a) bewiesen; die Aussagen in (b) folgen unmittelbar durch Anwendung von (a) auf A^{-1} . Wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{K}^{N \times N}$ kann man sich wieder auf den Spezialfall $\|\cdot\| = |\cdot|_1$ der Spaltensummennorm beschränken. Da darüberhinaus jede reelle Matrix als komplexe Matrix mit derselben Spaltensummennorm aufgefaßt werden kann, wird im folgenden nur der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ behandelt. Der Beweis erfolgt in drei Schritten.

(i) Sei zunächst $N \geq 2$ und $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ein Jordanblock, d.h. $A = \lambda \text{id} + D$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $D = (\delta_{i+1,j})_{i,j=1,\dots,N}$ (vergleiche Satz A.3.1). Dann gilt für beliebige $\kappa \in \mathbb{N}_0$

$$A^\kappa = (\lambda \text{id} + D)^\kappa = \sum_{i=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{i} \lambda^{\kappa-i} D^i.$$

Mit $D^N = 0$ und $|D|_1 = 1$ folgt hieraus für alle $\kappa \geq N - 1$ und $\beta > \sigma_{\max}^b(A) = |\lambda|$

$$\begin{aligned} |A^\kappa|_1 \beta^{-\kappa} &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \binom{\kappa}{i} \lambda^{\kappa-i} D^i \right|_1 \beta^{-\kappa} \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \binom{\kappa}{i} |\lambda|^{\kappa-i} |D|_1^i \beta^{-\kappa} = \\ &= \left(\frac{|\lambda|}{\beta} \right)^\kappa \sum_{i=0}^{N-1} \binom{\kappa}{i} |\lambda|^{-i} \rightarrow 0 \quad \text{für } \kappa \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

denn es gilt $0 \leq \frac{|\lambda|}{\beta} < 1$ und die letzte Summe ist ein Polynom in κ vom Grad höchstens $N - 1$. Also existiert $\tilde{K} := \sup\{|A^\kappa|_1 \beta^{-\kappa} : \kappa \geq N - 1\}$. Setzt man schließlich $K := \max\{|A^0|_1 \beta^{-0}, \dots, |A^{N-2}|_1 \beta^{-(N-2)}, \tilde{K}\} \geq 1$, so erhält man für alle $\kappa = m - n \geq 0$

$$|A^{m-n}|_1 \leq K \beta^{m-n}.$$

Die geforderte Abschätzung ist demnach erfüllt.

(ii) Sei nun $N = 1$ und $A = (\lambda) \in \mathbb{C}$ ein eindimensionaler Jordanblock. Für beliebiges $\beta \geq \sigma_{\max}^b(A) = |\lambda|$ gilt also

$$|A^{m-n}|_1 = |\lambda^{m-n}|_1 = |\lambda|^{m-n} \leq \beta^{m-n} \quad \text{für } m \geq n,$$

und mit $K := 1$ folgt die Behauptung.

(iii) Sei nun $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ beliebig, $N \in \mathbb{N}$. Gemäß Satz A.3.1 existiert eine reguläre Matrix $R \in \mathbb{C}^{N \times N}$, so daß $J = RAR^{-1}$ von der Form

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_n) \quad \text{mit } J_k = \lambda_k \text{id} + D \in \mathbb{C}^{N_k \times N_k} \quad \text{und } \lambda_k \in \sigma(A)$$

ist. Gilt nun $\beta > \sigma_{\max}^b(A)$ — oder ist $\beta = \sigma_{\max}^b(A)$ und alle Eigenwerte mit Realteil $\sigma_{\max}^b(A)$ sind halbeinfach — so erhält man wegen (i), (ii) und Satz A.3.1 zu jedem $k = 1, \dots, n$ ein $K_k \geq 1$ mit

$$|J_k^\kappa|_1 \leq K_k \beta^\kappa \quad \text{für alle } \kappa \geq 0.$$

Wegen der Definition der Spaltensummennorm und $J^\kappa = \text{diag}(J_1^\kappa, \dots, J_n^\kappa)$ folgt daraus für beliebige $\kappa \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} |A^\kappa|_1 &= |(R^{-1}JR)^\kappa|_1 = |R^{-1}J^\kappa R|_1 \leq \\ &\leq |R^{-1}|_1 |J^\kappa|_1 |R|_1 = \\ &= |R^{-1}|_1 |R|_1 |\text{diag}(J_1^\kappa, \dots, J_n^\kappa)|_1 = \\ &= |R^{-1}|_1 |R|_1 \max\{|J_k^\kappa|_1 : k = 1, \dots, n\} \leq \\ &\leq |R^{-1}|_1 |R|_1 \max\{K_k : k = 1, \dots, n\} \beta^\kappa. \end{aligned}$$

Mit $K := |R^{-1}|_1 |R|_1 \max\{K_k : k = 1, \dots, n\} \geq 1$ und $\kappa = m - n \geq 0$ folgt die Behauptung. \diamond

Auch Satz A.3.5 ermöglicht folgende Aussagen über das Verhalten der allgemeinen Lösung $\lambda(k; \kappa, \xi) = A^{k-\kappa}\xi$ von (A.11):

- Sind die Beträge aller Eigenwerte von A kleiner als 1, so konvergieren alle Lösungen von (A.11) für $k \rightarrow \infty$ gegen 0.
- Sind die Beträge aller Eigenwerte von A kleiner oder gleich 1 und die Eigenwerte mit Betrag 1 halbeinfach, so sind alle Lösungen von (A.11) für $k \rightarrow \infty$ beschränkt.

In beiden Fällen gelten auch die Umkehrungen der Aussagen.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Amann, *Ordinary Differential Equations : An Introduction to Nonlinear Analysis* (De Gruyter Studies in Mathematics, Volume 13). De Gruyter, Berlin – New York (1990).
- [2] B. Aulbach, *A reduction principle for nonautonomous differential equations*. Archiv der Mathematik **39** (1982), 217–232.
- [3] B. Aulbach, *Hierarchies of invariant manifolds*. Preprint Nr. 185, Universität Augsburg (1988).
- [4] B. Aulbach, *Vorlesung über die “Qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.”* Universität Augsburg, Sommersemester 1990.
- [5] B. Aulbach, *Vorlesung über “Differenzgleichungen und dynamische Systeme.”* Universität Augsburg, Wintersemester 1990/1991.
- [6] B. Aulbach, Vortragsmanuskript.
- [7] Ju. L. Daleckii, M. G. Krein, *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space* (Translations of Mathematical Monographs, Volume 43). American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1974).
- [8] J. Dieudonné, *Grundzüge der modernen Analysis, Band 1*. Vieweg, Braunschweig – Wiesbaden (1985).
- [9] W. Greub, *Linear Algebra* (Graduate Texts in Mathematics, Volume 23). Springer, New York – Heidelberg – Berlin (1981).
- [10] D. M. Grobman, *The topological classification of the vicinity of a singular point in n -dimensional space*. Math. USSR-Sbornik **56** (1962), 77–94.
- [11] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*. Robert E. Krieger, Malabar, Florida (1980).
- [12] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*. Birkhäuser, Boston – Basel – Stuttgart (1982).
- [13] S. Hilger, *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*. Dissertation, Universität Würzburg (1988).
- [14] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* (Pure and Applied Mathematics, Volume 60). Academic Press, San Diego (1974).
- [15] M. C. Irwin, *Smooth Dynamical Systems* (Pure and Applied Mathematics, Volume 94). Academic Press, London (1980).

- [16] M. C. Irwin, *A new proof of the pseudo-stable manifold theorem*. Journal of the London Mathematical Society (2) **21** (1980), 557–566.
- [17] A. Kelley, *The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds*. Journal of Differential Equations **3** (1967), 546–570.
- [18] A. Kelley, *Stability of the center-stable manifold*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **18** (1967), 336–344.
- [19] U. Kirchgraber, K. J. Palmer, *Geometry in the Neighborhood of Invariant Manifolds of Maps and Flows and Linearization*. Preprint.
- [20] H. W. Knobloch, F. Kappel, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, Stuttgart (1974).
- [21] V. Lakshmikantham, D. Trigiante, *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications* (Mathematics in Science and Engineering, Volume 181). Academic Press, San Diego (1988).
- [22] L. A. Ljusternik, W. I. Sobolew, *Elemente der Funktionalanalysis*. Harri Deutsch, Thun – Frankfurt/Main (1979).
- [23] K. J. Palmer, *A generalization of Hartman's linearization theorem*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **41** (1973), 753–758.
- [24] K. J. Palmer, *Linearization near an integral manifold*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **51** (1975), 243–255.
- [25] V. A. Pliss, *Principle reduction in the theory of the stability of motion*. Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Mat. Ser. **28** (1964), 1297–1324 (Russisch).
- [26] C. C. Pugh, *On a theorem of P. Hartman*. American Journal of Mathematics **91** (1969), 363–367.
- [27] J. Quandt, *On the Hartman-Grobman theorem for maps*. Journal of Differential Equations **64** (1986), 154–164.
- [28] M. Shub, *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer, New York – Berlin – Heidelberg (1987).
- [29] K. Yosida, *Functional Analysis* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 123). Springer, Berlin – Heidelberg – New York (1980).
- [30] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Volume I: Fixed-Point Theorems*. Springer, New York – Berlin – Heidelberg – Tokyo (1986).